

519

Г. 56

БЫЧЕНКО, ЮКЕВЯКОВ, А. Д. СОЛОВЬЕВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ  
МЕТОДЫ  
В ТЕОРИИ  
НАДЕЖНОСТИ



Б. В. ГНЕДЕНКО, Ю. К. БЕЛЯЕВ, А. Д. СОЛОВЬЕВ

# МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НАДЕЖНОСТИ

ОСНОВНЫЕ  
ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДЕЖНОСТИ  
И ИХ СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»  
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ  
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ  
МОСКВА 1965

517.8  
Г 56  
УДК 519.95

## АННОТАЦИЯ

В существующей уже достаточно обширной монографической литературе по теории надежности до сих пор нет книги, в которой было бы дано систематическое изложение основ этой теории. Настоящая книга написана с целью восполнить этот пробел.

Авторы излагают формализованный подход к определению основных понятий теории надежности, различные планы оценки характеристик надежности по результатам испытаний, методы проверки гипотез, теорию резервирования без восстановления и с восстановлением, методы приемочного контроля. Книга снабжена большим числом таблиц, многие из которых были специально подсчитаны для настоящей книги. Книге предпослана вводная глава, в которой излагаются необходимые сведения из теории вероятностей, математической статистики и преобразований Лапласа.

Книга рассчитана на математиков, инженеров и студентов, интересующихся вопросами теории надежности. Глава, посвященная контролю качества продукции, полезна для работников отделов технического контроля.

*Борис Владимирович Гнеденко, Юрий Константинович Беллев,  
Александр Дмитриевич Соловьев*

Математические методы в теории надежности

(Серия: «Физико-математическая библиотека инженера»)

М., 1965 г., 524 стр. с илл.

Редактор В. Г. Кисунько

Техн. редактор И. Ш. Аксельрод

Корректор С. Н. Емельянова

Сдано в набор 18/IV 1965 г. Подписано к печати 20/VIII 1965 г. Бумага 60×90/16.  
Физ. печ. л. 32,75. Условн. печ. л. 32,75. Уч.-изд. л. 32,70. Тираж 27 000 экз. Т-10282.  
Цена книги 1 р. 79 к. Заказ № 2522.

Издательство «Наука»

Главная редакция физико-математической литературы.  
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Первая Образцовая типография имени А. А. Жданова Главполиграфпрома  
Государственного комитета Совета Министров СССР по печати.  
Москва, Ж-54, Вальная, 28.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	6
Введение . . . . .	9
<b>Глава 1. Элементы теории вероятностей и математической статистики . . . . .</b>	<b>14</b>
§ 1.1. Понятие случайного события. Основные формулы теории вероятностей . . . . .	14
§ 1.2. Случайные величины и их функции распределения . . . . .	22
§ 1.3. Числовые характеристики случайных величин . . . . .	33
§ 1.4. Некоторые предельные теоремы теории вероятностей . . . . .	39
§ 1.5. Общие сведения о теории случайных процессов . . . . .	49
§ 1.6. Элементы математической статистики . . . . .	57
§ 1.7. Преобразование Лапласа . . . . .	71
<b>Глава 2. Характеристики надежности . . . . .</b>	<b>79</b>
§ 2.1. Основные понятия теории надежности . . . . .	79
§ 2.2. Надежность элемента, работающего до первого отказа . . . . .	89
§ 2.3. Надежность восстанавливаемого элемента . . . . .	108
§ 2.4. Надежность системы . . . . .	133
<b>Глава 3. Оценка показателей надежности по результатам испытаний 156</b>	
§ 3.1. Испытания на надежность . . . . .	156
§ 3.2. Общие методы оценки показателей надежности по результатам испытаний . . . . .	162
§ 3.3. Оценка параметра экспоненциального закона . . . . .	181
§ 3.4. Доверительные интервалы для параметра экспоненциального закона . . . . .	195
§ 3.5. Доверительные интервалы и множества. Случай многих параметров . . . . .	208
<b>Глава 4. Проверка гипотез о надежности . . . . .</b>	<b>225</b>
§ 4.1. Общие положения теории проверки статистических гипотез . . . . .	225
§ 4.2. Проверка гипотезы о показательности распределения времени безотказной работы . . . . .	241
§ 4.3. Критерии проверки гипотез о значениях параметра показательного распределения . . . . .	253
§ 4.4. Критерии типа последовательного анализа для проверки гипотез о значении параметра $\lambda$ экспоненциального распределения . . . . .	264
§ 4.5. Непараметрические методы оценки однородности статистического материала . . . . .	277



<b>Глава 5. Резервирование без восстановления</b> . . . . .	288
§ 5.1. Введение . . . . .	288
§ 5.2. Нагруженный резерв . . . . .	289
§ 5.3. Схема гибели . . . . .	297
§ 5.4. Ненагруженный резерв . . . . .	306
§ 5.5. Облегченный резерв . . . . .	313
§ 5.6. Учет ненадежности переключателей . . . . .	322
§ 5.7. Некоторые принципиальные вопросы резервирования системы . . . . .	329
<b>Глава 6. Резервирование с восстановлением</b> . . . . .	335
§ 6.1. Введение . . . . .	335
§ 6.2. Дублирование с восстановлением . . . . .	336
§ 6.3. Процесс гибели и размножения . . . . .	346
§ 6.4. Изучение нестационарного периода . . . . .	352
§ 6.5. Применение процесса гибели и размножения к резервированию с восстановлением . . . . .	368
<b>Глава 7. Статистические методы контроля качества и надежности массовой продукции</b> . . . . .	376
§ 7.1. Вводные понятия . . . . .	376
§ 7.2. Численные характеристики планов приемочного контроля . . . . .	391
§ 7.3. Стандарты планов приемочного контроля . . . . .	404
§ 7.4. Экономичные планы контроля . . . . .	415
§ 7.5. Последующие оценки качества по результатам контроля . . . . .	436
§ 7.6. Введение в задачи текущего контроля . . . . .	459
<b>Приложения</b>	
Таблица 1. Значения функции $y = e^{-x}$ . . . . .	470
Таблица 2. Значения функции $y = x^x$ . . . . .	473
Таблица 3. Квантили нормального распределения . . . . .	475
Таблица 4. Квантили распределения $\chi^2$ . . . . .	476
Таблица 5. Сокращенная таблица биномиального распределения . . . . .	477
Таблица 6. Формулы оценок и доверительных интервалов для параметра $\lambda$ экспоненциального закона . . . . .	480
Таблица 7. Квантили $\Delta_\alpha(d)$ пуассоновского распределения, $L_\alpha(\Delta_\alpha(d)) = \alpha$ . . . . .	484
Таблица 8. Значения $\underline{\Delta}_\alpha(d)$ и $\bar{\Delta}_\alpha(d)$ , $\alpha = 0,95$ . . . . .	486
Таблица 9. Проверка гипотезы о равенстве вероятностей безотказной работы элементов двух типов с вероятностью ошибки $\alpha = 0,1$ . . . . .	487
Таблица 10. 95%-ные доверительные пределы для параметра в биномиальном распределении для малых $N$ . . . . .	488
Таблица 11. Критические значения $F$ -распределения а) $F_{0,99}$ , б) $F_{0,995}$ . . . . .	490
Таблица 12. Критерий Хартли . . . . .	492
Таблица 13. Критерий Фишера . . . . .	492
Таблица 14. Значения функции $y = 2 \arcsin \sqrt{x}$ . . . . .	492
Таблица 15. Критерий Колмогорова. Значения функции Колмогорова $K(y)$ . . . . .	493
Таблица 16. Критические значения максимального отклонения эмпирической функции распределения от теоретической (случай конечных объемов выборки) . . . . .	495
Таблица 17. Критерий Смирнова . . . . .	498
Таблица 18. Границы критической области для критерия знаков . . . . .	500
Таблица 19. Распределение статистики Вилкоксона . . . . .	501

Таблица 20. Колумбийский стандарт: однократная выборка . . . . .	503
Таблица 21. Колумбийский стандарт: двухкратная выборка . . . . .	504
Таблица 22. Колумбийский стандарт: последовательная выборка . . . . .	506
Таблица 23. Значения $\rho_c$ . . . . .	510
Таблица 24. Значения $\theta_c$ . Однократные планы типа $(n, c)_{2s}$ , обеспечивающие минимум инспекции при заданном предельном выходном качестве . . . . .	511
Таблица 25. Экономичные планы типа однократной выборки . . . . .	512
Номограмма . . . . .	514
Литература . . . . .	516
Указатель терминов . . . . .	522

---

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Интерес к теории надежности, который сейчас проявляют инженеры, экономисты, математики, а также организаторы производства, привел к появлению значительного числа книг, посвященных общим и специальным ее вопросам (см. литературу к главе 1 [1]—[4]).

Проблемы теории надежности весьма многогранны. В них затрагиваются технологические, экономические, конструктивные, физико-химические и организационные аспекты и выявляется необходимость разработки развитого математического аппарата, приспособленного к специфике выдвигаемых вопросов. В связи с этим естественно появление книг по теории надежности, освещающих ее задачи с разных сторон.

В нашей книге рассмотрены математические методы лишь некоторых разделов теории надежности. Это можно усмотреть уже из краткого описания содержания книги.

*Первая* глава носит вводный характер. В ней мы приводим основные понятия теории вероятностей и математической статистики, а также даем формулировки основных теорем, на которые опираемся впоследствии. В этой же главе дана сводка основных свойств преобразования Лапласа, необходимых в главах 5 и 6.

*Вторая* глава посвящена принципиальным вопросам — основным понятиям теории надежности и выяснению связей между основными ее числовыми характеристиками. Здесь мы несколько отступаем от традиционного толкования термина «надежность» и даем, как нам кажется, достаточно широкий подход, способный объединить различные определения, предлагавшиеся в научной литературе. Мы считаем, что теоретико-множественный подход к теории надежности и ее центральным понятиям в наибольшей степени способен передать картину изучаемых ею явлений и поэтому заслуживает достаточно ясного и четкого изложения.

Главы *третья* и *четвертая* носят статистический характер. В них предложены пути оценки параметров надежности на основе результатов испытаний, а также пути проверки разного типа гипотез о надежности. Попутно формулируются и некоторые положен-

ния математической статистики, на которые мы при этом опираемся. Значительная часть этих глав посвящена случаю показательного распределения, которое пока играет доминирующую роль в теории надежности.

Главы *пятая* и *шестая* изучают важный прием повышения надежности изделий—резервирование. В первой из названных глав рассмотрены различные задачи резервирования без восстановления, во второй—резервирование с восстановлением.

Глава *седьмая* имеет дело с задачами контроля качества продукции. В вопросах текущего контроля мы ограничиваемся при этом почти исключительно лишь постановками задач. Основное внимание уделено нами задачам приемочного контроля. Здесь нами даны некоторые общие схемы, в том числе и такие, которые еще находятся в состоянии научной разработки. Эта глава стоит несколько особняком. Ее содержание и изложенные в ней методы могут быть полезны в первую очередь работникам ОТК, а также инженерно-техническим работникам, занимающимся вопросами контроля качества и надежности.

В тексте имеется большое число графиков, многие из них приведены лишь с целью иллюстрации.

В конце книги помещено большое число таблиц. Если эти таблицы уже имеются в широко распространенной литературе, то мы ограничиваемся в них лишь двумя-тремя значащими цифрами. Если же таблицы труднодоступны или совсем не были опубликованы на русском языке, то мы приводим их с тем числом знаков, с каким они приведены в оригинальных работах. Ряд таблиц подсчитан специально для настоящей книги. Источники, откуда заимствованы таблицы, указаны в подстрочных примечаниях.

Работа по книге была распределена следующим образом: главы 3, 4 и 7, а также § 2.1 написаны Ю. К. Беляевым; главы 2, 5 и 6—А. Д. Соловьевым; глава 1 и § 4.5—Б. В. Гнеденко, которому принадлежит также и согласование всех глав книги. Обсуждение содержания книги, ее композиции, стиля изложения проводилось всеми тремя авторами совместно.

В процессе работы над книгой мы получили многое от бесед с товарищами. Мы пользуемся случаем поблагодарить всех, кто помог нам своими предложениями, советами, наблюдениями над своеобразием поведения аппаратуры при испытаниях. Особенно мы благодарны нашему общему учителю А. Н. Колмогорову, прочитавшему главу 7 и давшему по ней ряд советов. Мы благодарны Я. Б. Шору, прочитавшему всю рукопись целиком; к сожалению, по независящим от нас причинам мы не имели возможности воспользоваться всеми его советами, касающимися расположения материала книги. Авторы рады отметить большой труд Т. Н. Топорищевой по вычислению таблиц; И. А. Ушаков, А. А. Ступаченко и Л. Л. Кристаллинский

своими беседами существенно дополнили наши сведения об особенностях тех физических процессов, с которыми приходится встречаться при проведении испытаний радиоэлектронной аппаратуры.

Первоначально мы предполагали в одной книге уместить все основные результаты, относящиеся к статистическим методам в теории надежности. В процессе работы выяснилось, что эта задача невыполнима. После того как настоящая часть работы завершена, авторы предполагают продолжить ее. В новой книге, о которой мы начали думать, будут затронуты вопросы расчета надежности сложных систем, оптимального резервирования, оптимального поиска неисправностей, оптимальной профилактики, прогноза неисправностей, методов ускоренных испытаний, синтеза надежных устройств, выполняющих логические операции. В предполагаемой книге найдут отражение новые статистические методы исследования — планирование эксперимента, теория управляемых случайных процессов и др.

Настоящая книга предназначена не для беглого просмотра, а требует от читателя значительного внимания, а также систематического проведения необходимых вспомогательных выкладок. Особенно это относится к главам 3—6. Главы 2 и 7 можно читать независимо от других. Быть может, при изучении глав 3 и 4 полезно иметь под руками хорошую книгу по математической статистике (например, [7]—[10] по списку литературы к гл. 1). Впрочем, книга может быть использована и для справок, поскольку мы стремились основные формулы сводить в специальные справочные таблицы, а также достаточно выпукло выделять их в тексте.

Авторы отдают себе ясный отчет в том, что книга не свободна от недостатков. Поэтому мы обращаемся с просьбой ко всем читателям сообщать нам пожелания по улучшению книги и информацию о замеченных недочетах любому из авторов по адресу:

Москва, В-234, МГУ, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей.

---

## ВВЕДЕНИЕ

В связи с развитием современной техники особую важность приобрели многочисленные вопросы повышения эффективности различного рода устройств. Комплексная автоматизация производственных процессов ставит перед управляющими устройствами исключительно ответственные задачи, которые должны выполняться безупречно на протяжении всего периода работы автоматической линии, автоматизированного цеха или предприятия. Перерыв в работе управляющего устройства может привести не только к ухудшению качества производимой продукции или к полному прекращению производственного процесса, но и к весьма серьезным авариям, выходящим за локальные рамки предприятия. Требования к безотказности механизмов и разного рода устройств приходится, конечно, предъявлять не только к тем из них, которым поручено управление теми или иными процессами. К любому техническому устройству и изделию мы вынуждены предъявлять эти условия. Какой смысл в самолете, который не может безотказно совершать перелеты? Какой смысл в тракторе, который не в состоянии выполнять поручаемые ему работы, или в автомобиле, который не в состоянии перевозить грузы или пассажиров? Современная медицина широко использует разного рода технические средства как для диагностических и исследовательских целей, так и для выполнения ответственных функций во время и после операции. К их работе приходится предъявлять особо высокие требования, так как перебои в работе, скажем, искусственного сердца во время операции на сердце могут привести к летальному исходу. С многочисленными примерами, в которых качество продукции играет основную роль, каждый из нас встречается в повседневной жизни.

Общая научная дисциплина, изучающая общие методы и приемы, которых следует придерживаться при проектировании, изготовлении, приемке, транспортировке и эксплуатации изделий для обеспечения максимальной их эффективности в процессе использования, а также разрабатывающая общие методы расчета качества устройств по известным качествам составляющих их частей,

получила название *теории надежности*. Теория надежности устанавливает закономерности возникновения отказов устройств и методы их прогнозирования; ищет способы повышения надежности изделий при конструировании и последующем изготовлении, а также приемы поддержания надежности во время их хранения и эксплуатации; разрабатывает методы проверки надежности изделий и способы контроля надежности при приемке больших партий продукции. Теория надежности вводит в рассмотрение количественные показатели качества продукции.

Несомненно, что теория надежности является наукой комплексной, относящейся в первую очередь к компетенции инженера, физика, химика и экономиста. Однако большое число вопросов теории надежности по своему существу носит математический характер и требует для своего разрешения как уже известных математических средств, так и разработки новых. Более того, если желать науку о надежности сделать способной к точным заключениям и выводам, если стремиться вывести ее из состояния чисто качественных, а порой и сугубо субъективных заключений, мы обязательно должны обратиться к языку математики. Утверждения типа: «я уверен, что такая конструкция будет надежнее, чем иная», «мы убеждены, что наша продукция лучше, чем изготовляемая соседним предприятием», которые не имеют иных подтверждений, кроме личной уверенности, не могут служить основой для надежных выводов.

Для исследования и решения значительной части вопросов, возникающих в теории надежности, оказываются необходимыми методы теории вероятностей и математической статистики. Это вызвано существом дела, а не специфическими интересами тех, кто работает теперь в теории надежности. Как бы мы ни стремились к сохранению условий постоянства в процессе производства, однородности исходных материалов и неизменности технологии изготовления, неизбежные колебания всех этих компонент приводят к существенному разбросу свойств готовых изделий. Молекулярные свойства веществ, играющие исключительную роль при изготовлении полупроводниковых и электронных приборов, не теряют своего значения и для механических устройств. Процессы износа и упрочнения материалов неизбежно приводят к необходимости изучения их молекулярной структуры. Вместе с молекулярной структурой вещества в теорию надежности вносятся и математические методы, свойственные этой части физики, — методы теории вероятностей и математической статистики. Далее, в процессе эксплуатации изделия попадают в разные условия: автомобилю приходится передвигаться как по совершенным дорогам, так и по проселку. В результате он подвергается не только переменным, но и случайным воздействиям. В процессе изложения мы будем неоднократно встре-

чатся с реальными примерами, которые проиллюстрируют это общее положение. Если мы изготовили в определенных условиях из одной и той же партии сырья большое число определенного типа изделий и затем собрали статистические данные о длительности их бесперебойной работы, то выясняется весьма специфическая картина: длительность безотказной работы изделия имеет значительный разброс и в отношении каждого определенного изделия нет возможности точно предсказать длительность его службы. В то же время относительно больших партий этих изделий можно делать достаточно определенные предсказания о доле их, способной проработать то или иное время, о причинах поломок изделий и пр. В результате мы оказываемся в типичной обстановке, с которой имеет дело математическая статистика.

Обратим внимание на то, что перед теорией надежности зачастую возникают взаимно противоречивые задачи. В связи с усложнением функций, которые поручаются различного типа устройствам, эти устройства включают в себя все большее число элементов. Увеличение числа элементов приводит к уменьшению надежности их совокупного действия. Но в то же время ответственность выполняемых устройствами заданий требует от них все большей надежности. Разрешение возникающего противоречия требует самого тщательного и всестороннего исследования проблем повышения надежности элементов и устройств: возможность и целесообразность повышения надежности отдельных элементов, выбор режимов работы, отыскание целесообразных схем и конструктивных решений, расчет резервирования и оптимальных режимов профилактики и пр. Следует подчеркнуть такую, казалось бы, самоочевидную истину, что *повышение надежности не дается даром и ее получение требует как определенных материальных затрат, так и систематических научных поисков.*

Отметим, что одной из весьма заманчивых задач теории надежности должна явиться разработка таких принципов конструирования сложной аппаратуры, которые позволяли бы получать устройства, способные сохранять рабочее состояние даже при выходе из рабочего состояния некоторой части составляющих их элементов. Биологические системы в высокой степени обладают этим ценнейшим свойством. Изучение биологических систем с точки зрения принципов их устройства и обеспечения надежности может дать в руки техники исключительно богатый набор средств и приемов, полезных для технического осуществления. Мы убеждены, что природа шла не только по линии расточительного резервирования, но в первую очередь по пути *выбора оптимальных схемных решений*, тщательного *отбора элементов*, способных сохранять исключительную устойчивость в работе. Несомненно, что изучение особенностей биологических систем с позиций теории надежности позволит



открыть и новые принципы, которые не приходят в голову, когда к техническим задачам подходят исключительно с позиций традиционной техники.

О повышении надежности изделий сейчас говорят не только инженеры и ученые, но и государственные деятели. Нередко повышение надежности изделий называют проблемой номер один. И это не дань моде, а настоятельное требование времени и эпохи. Во вводной главе недавно вышедшей книги двух американских авторов, Дэвида Ллойда и Мирона Липова, сказано несколько фраз, которые мы хотели бы здесь воспроизвести. «Ненадежность сказывается на стоимости, на временных затратах, психологически — в виде неудобств, а в определенных случаях грозит также безопасности людей и нации. Обычно потери за счет ненадежности представляют собой не только стоимость выходящего из строя агрегата, но также и стоимость связанного с ним оборудования, которое портится или разрушается в результате отказа... Классическим примером психологического эффекта ненадежности являются печальной памяти спутники «Авангард». Соединенные Штаты, остро переживая успехи России, запустившей Спутник-1, попытались вступить в соревнование, использовав для этого почти не испытанную ракету, которой пришлось работать почти на пределе своих возможностей. Неудачи и последовавшие за этим уныние и потеря престижа были очень серьезны».

В соответствии с теми задачами теории надежности, которые были нами обрисованы, естественно возникает несколько групп вопросов, относящихся к обеспечению надежности. На первой стадии создания изделия, когда его еще нет и появилась только мысль о нем, уже необходимо думать об его надежности: какие материалы наилучшим образом способны выдерживать те нагрузки, которые предстоят во время работы изделию; какие схемы особенно благоприятны для того, чтобы сохранять устойчивость к внешним воздействиям; какие режимы следует выбирать для работы изделия; как обеспечить сохранность работоспособности при перегрузках и т. д. Конструирование изделия завершено, перед запуском в серию оно должно быть испытано. Испытания на этой стадии создания обязательно должны предусматривать и проверку надежности изделия. Здесь очень важно отметить, что испытания должны быть достаточно представительными, чтобы по ним можно было судить не только об этих изделиях, изготовленных в тепличных условиях, но и об изделиях, которые будут изготавливаться серийно. На этой стадии следует также разработать систему правил, которых следует придерживаться при изготовлении изделий на заводе, приемке, транспортировке и эксплуатации для наилучшего сохранения надежности в работе. Третья стадия обеспечения надежности наступает после сдачи принятого к производству изделия на предприятие.

После тщательной проверки схемы необходимо убедиться в качестве исходных материалов, производственного оборудования, точности обработки, соответствия технологического процесса техническому заданию. Никакие временные отступления от задания не допустимы ни на одной операции.

Проверка качества исполнения может осуществляться многими путями. Для массового и крупносерийного производства, в частности, — методами текущего статистического контроля. Изготовлена партия, для проверки надежности изделий должны быть разработаны методы испытаний, а также планы проверки качества, включающие в себя количество испытываемых изделий, длительность и характер проверки. Для периода эксплуатации необходимо разработать меры обеспечения надежности, включающие в себя периодичность профилактических осмотров, замену элементов, правила поиска неисправностей и пр. Расчет надежности, естественно, должен производиться на стадии проектирования. Подавляющая часть отмеченных здесь требований носит не математический, а чисто инженерный характер.

Физико-химические процессы, приводящие к отказам элементов и изделий, очень сложны. Их природа исследована до сих пор в очень малой степени. Как правило, число параметров, которые необходимо учитывать при построении математических моделей явлений старения, постепенного изменения свойств изделий и др., очень велико. Уже одно это обстоятельство должно приводить к необходимости разработки новых математических методов исследования. Мы убеждены, что в самые ближайшие годы теория надежности явится источником многих новых математических задач, а также новых математических теорий. Уже сейчас ясно, что методы математической статистики, теории вероятностей, демографии, теории эксперимента нуждаются в серьезном развитии, чтобы они могли в достаточно полной мере способствовать развитию теории надежности.

---

## ГЛАВА I

# ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

### § 1.1. Понятие случайного события. Основные формулы теории вероятностей

Представление о случайном событии как о событии, относительно наступления которого нельзя высказать суждений с полной определенностью, интуитивно ясно. Однако чтобы стать объектом математического исследования и получить серьезное прикладное значение, представление это требует серьезного уточнения. Действительно, одного утверждения, что пробой конденсатора в период испытания представляет собой случайное событие, для практики недостаточно. Нам всегда необходимо знать также, как часто может наступить это событие при испытании большого числа конденсаторов. Точно так же для практики недостаточно только одного знания, что автомобиль может пройти без капитального ремонта двести тысяч километров. Для оценки качества автомобилей важно выяснение того, как часто может произойти такого рода событие. Поскольку в теории надежности приходится использовать понятие случайного события во всей общности и общепринятая система изложения полезна не только для введения понятий теории вероятностей и математической статистики, но и для отчетливого выяснения понятий самой теории надежности, мы предпочтем сразу ввести читателя в общие идеи аксиоматического определения случайного события и его вероятности, предложенные А. Н. Колмогоровым.

Понятие случайного события в концепции, предложенной Колмогоровым и получившей всеобщее признание, не является первичным, а строится на базе понятия элементарного события.

Предполагается, что имеется некоторое множество  $\Omega$  элементов, тесно связанное с изучаемой задачей. Природа этого множества, важная для понимания физической сути задачи, не играет роли при логическом построении теории вероятностей. Далее рассмат-

ривается система  $\mathfrak{F}$  подмножеств множества  $\Pi$ , которая обладает следующими свойствами:

1°. Система  $\mathfrak{F}$  в качестве элемента содержит все множество  $\Pi$ .

2°. Если  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$  суть подмножества множества  $\Pi$  и входят в  $\mathfrak{F}$  в качестве элементов, то  $\mathfrak{F}$  содержит также множества  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ,  $\bar{\mathfrak{A}}$  и  $\bar{\mathfrak{B}}$ <sup>1)</sup>.

Как принято в теории множеств, через  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B}$  мы обозначаем сумму  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , т. е. множество, каждый элемент которого принадлежит по меньшей мере одному из множеств  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ ; через  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$  обозначаем пересечение  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ , т. е. множество всех тех и только тех элементов  $\Pi$ , которые принадлежат сразу и  $\mathfrak{A}$  и  $\mathfrak{B}$ ;  $\bar{\mathfrak{A}}$  означает множество тех элементов  $\Pi$ , которые не входят в  $\mathfrak{A}$ , т. е. дополнение  $\mathfrak{A}$  до множества  $\Pi$ .

Поскольку  $\mathfrak{F}$  содержит в качестве элемента  $\Pi$ , то по требованию 2°  $\mathfrak{F}$  обязано содержать также  $\bar{\Pi}$ , т. е. множество без элементов — пустое множество.

Легко понять, что второе требование влечет за собой принадлежность к  $\mathfrak{F}$  сумм и пересечений любого конечного числа множеств, принадлежащих  $\mathfrak{F}$ .

Каждый элемент множества  $\mathfrak{F}$  называется случайным событием.

Проиллюстрируем сказанное простым примером. Обозначим через  $t$  длительность жизни некоторого изделия в определенных условиях эксплуатации или испытаний. Примем за исходное множество  $\Pi$  все неотрицательные числа, т. е. все мыслимые сроки жизни изделия. Элементарное событие  $\tau = t$  означает, что изделие проработало в точности время  $t$ , а затем испортилось. В частности,  $t = 0$  означает, что изделие испортилось немедленно при включении его в работу.

Предположим теперь, что всякое множество типа  $\tau \geq t$  входит в систему  $\mathfrak{F}$ . Случайное событие  $\tau \geq t$  означает, очевидно, что изделие проработает время не меньше, чем  $t$ . При  $t = 0$  мы получаем все множество  $\Pi$ . Таким образом, первое требование, которое мы высказали относительно системы  $\mathfrak{F}$ , выполнено. Однако система  $\mathfrak{F}$  гораздо богаче элементами, чем те, которые только что были указаны. Действительно, в силу второго требования наряду с множествами  $\tau \geq a$  и  $\tau \geq b$  ( $a < b$ ) система  $\mathfrak{F}$  содержит также множества  $\tau < a$ ,  $\tau < b$  и  $a \leq \tau < b$ . Мы не станем входить в более подробное изучение структуры системы.

Может случиться, что для тех или иных целей нам важно следить за несколькими параметрами, например за диаметром вала, его конусностью и сопротивлением на изгиб. Пусть возможные значения диаметра лежат в пределах  $a \leq d \leq b$ , конусности  $\rho$  —

<sup>1)</sup> Нередко употребляются также обозначения  $\mathfrak{A} \cup \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$ ,  $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ .  $\bar{\mathfrak{A}}$  — множество тех элементов  $\mathfrak{A}$ , которые не входят в  $\mathfrak{A}$ .

в пределах  $\alpha \leq r \leq \beta$  и сопротивления на изгиб  $R$  — в пределах  $r_1 \leq R \leq r_2$ , тогда множество элементарных состояний характеризуется точками трехмерного пространства  $(d, r, R)$ , лежащими в параллелепипеде, определенном ранее написанными неравенствами.

Во многих задачах система  $\mathfrak{F}$ , подчиненная только ранее указанным двум требованиям, оказывается слишком бедной и должна быть пополнена случайными событиями более тонкой природы. В частности, такое расширение требуется обычно для разного рода предельных переходов. Мы потребуем от множества  $\mathfrak{F}$  дополнительно следующего:

3°. Если подмножества  $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \mathfrak{A}_3, \dots$  множества  $\mathfrak{U}$  являются элементами множества  $\mathfrak{F}$ , то их сумма  $\cup \mathfrak{A}_i$  и пересечение  $\cap \mathfrak{A}_i$  также являются элементами  $\mathfrak{F}$ .

Множество  $\mathfrak{F}$ , удовлетворяющее требованиям 1°—3°, называется *полем событий* или же  *$\sigma$ -алгеброй*. Последний термин вошел теперь в теоретико-вероятностной литературе во всеобщее употребление.

В теории вероятностей принята специфическая терминология, мы считаем нужным ввести ее теперь же.

Если два случайных события  $A$  и  $B$  не имеют в своем составе одних и тех же элементов, то они называются *несовместимыми событиями*. События  $\Pi$  и  $\bar{\Pi}$  называются соответственно *достоверным* и *невозможным* событиями. События  $A$  и  $\bar{A}$  называются *противоположными*.

Для приведенного нами примера достоверно, что длительность жизни изделия будет заключена в пределах от 0 до  $\infty$ ; события  $a \leq \tau \leq b$  и  $c \leq \tau \leq d$ , если  $b < c$ , несовместимы; события  $\tau \leq a$  и  $\tau > a$  при любом  $a > 0$  противоположны.

Понятие вероятности случайного события вводится аксиоматически с помощью следующих аксиом.

1. Каждому случайному событию  $A$  из поля  $\mathfrak{F}$  поставлено в соответствие неотрицательное число  $P\{A\}$ , называемое его вероятностью.

$$2. P\{\Omega\} = 1.$$

3. Если события  $A$  и  $B$  несовместны, то

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\}.$$

Последняя аксиома называется аксиомой сложения вероятностей.

Приведенные аксиомы позволяют получить ряд важных выводов относительно вероятностей случайных событий.

Вероятность невозможного события равна нулю:  $P\{\bar{\Omega}\} = 0$ ; для любого случайного события  $A$   $0 \leq P\{A\} \leq 1$ ; вероятности противоположных событий  $A$  и  $\bar{A}$  связаны равенством

$$P\{\bar{A}\} = 1 - P\{A\}. \quad (1.1.1)$$

Говорят, что случайное событие  $A$  *влечет* за собой событие  $B$ , если множество  $B$  содержит в себе все элементы, составляющие множество  $A$ . В нашем примере событие  $A = \{\tau \leq a\}$  влечет за собой событие  $B = \{\tau \leq b\}$ , если  $a < b$ .

Если событие  $A$  влечет за собой событие  $B$ , то  $P\{A\} \leq P\{B\}$ . Для произвольных событий  $A$  и  $B$  имеет место теорема сложения

$$P\{A \cup B\} = P\{A\} + P\{B\} - P\{A \cap B\}. \quad (1.1.2)$$

Отсюда вытекают очевидное неравенство

$$P\{A \cup B\} \leq P\{A\} + P\{B\},$$

а также его обобщение: для любого конечного числа событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  имеет место неравенство

$$P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n\} \leq P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_n\}. \quad (1.1.3)$$

Построение теории вероятностей во всей полноте требует дополнительной аксиомы.

Расширенная аксиома сложения. Если событие  $A$  равносильно наступлению хотя бы одного из попарно несовместимых событий  $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ , то

$$P\{A\} = P\{A_1\} + P\{A_2\} + \dots + P\{A_n\} + \dots$$

В реальных задачах постоянно приходится иметь дело с таким положением вещей, когда требуется найти вероятность некоторого события  $A$  при дополнительном условии, что некоторое другое событие  $B$  наступило. Вообще говоря, это дополнительное знание меняет вероятности событий. Для примера, если мы знаем, что некоторое изделие уже проработало время  $T$ , то вероятность ему проработать еще время  $t$ , как правило, больше вероятности того, что начавшее работать изделие проработает срок  $T + t$ .

Если нужно найти вероятность некоторого события  $A$  при условии, что событие  $B$ , имеющее положительную вероятность, уже наступило, то эту искомую вероятность называют *условной вероятностью* и обозначают символом  $P\{A|B\}$  или же символом  $P_B\{A\}$ . Строго говоря, всякая вероятность (и безусловная, и условная) является условной, поскольку о случайном событии и его вероятности имеет смысл говорить лишь тогда, когда могут происходить лишь события, входящие в семейство  $\mathfrak{F}$ . Кроме того, сами вероятности событий существенно зависят от тех внешних условий, в которых находится наша система. Для примера рассмотрим длительность  $\tau$  жизни некоторого изделия при двух различных комплексах условий. Первый комплекс условий состоит в том, что изделие работает при постоянной температуре  $t_0$  в отсутствие вибраций. Если эти условия изменяются, температура повысится

до  $t_1$  или же появятся вибрации — второй комплекс условий, то вместе с ними, вообще говоря, изменится и вероятность события  $\tau < a$ . Таким образом, когда говорят о вероятности случайного события, то всегда предполагают, что имеется некоторый комплекс условий, при выполнении которого и рассматривается это случайное событие.

В теории надежности мы тоже не можем говорить о надежности изделия безотносительно к тем условиям, в которых ему придется работать. Надежность автомобиля существенно зависит от того, придется ли ему работать в условиях крайнего севера, Москвы или песчаной пустыни. При этом может случиться, что исходное множество  $\Omega$  элементарных событий не изменится, но изменятся вероятности интересующих нас случайных событий.

В силу ряда причин условная вероятность события  $A$  при условии, что  $B$  произошло, определяется посредством равенства

$$P\{A|B\} = \frac{P\{A \cap B\}}{P\{B\}}. \quad (1.1.4)$$

Отсюда, в частности, получаем, что  $P\{B|B\} = 1$ ; это равенство естественно было ожидать, поскольку нам уже достоверно известно, что событие  $B$  произошло.

Из только что данного определения условной вероятности мы получаем важное равенство

$$P\{A \cap B\} = P\{B\} P\{A|B\},$$

которое носит название теоремы умножения вероятностей. Так как

$$P\{A \cap B\} = P\{A\} P\{B|A\}, \quad (1.1.5)$$

то из последних двух равенств мы делаем заключение

$$P\{A\} P\{B|A\} = P\{B\} P\{A|B\}. \quad (1.1.6)$$

Говорят, что событие  $A$  не зависит от  $B$ , если  $P\{A|B\} = P\{A\}$ . Как показывает предыдущее равенство, независимость является свойством взаимным, т. е. если  $A$  не зависит от  $B$ , то и  $B$  не зависит от  $A$ .

Предположим теперь, что событие  $B$  может осуществляться с одним из  $n$  несовместимых событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . При этих условиях имеет место важная формула полной вероятности:

$$P\{B\} = \sum_{i=1}^n P\{A_i\} P\{B|A_i\}. \quad (1.1.7)$$

Проиллюстрируем эту формулу простым примером. Пусть некоторые детали (например, конденсаторы) поставляются тремя заво-

дами, причем вероятность того, что данное изделие изготовлено на первом заводе, равна  $\frac{1}{5}$ , на втором —  $\frac{3}{10}$  и на третьем —  $\frac{1}{2}$ . Вероятности того, что при определенных условиях работы конденсатор сохранит работоспособность в течение времени  $T$ , для первого, второго и третьего заводов соответственно равны 0,9; 0,92; 0,808. Чему равна вероятность того, что наудачу взятый конденсатор из имеющегося запаса сохранит работоспособность в течение времени  $T$ ? Этот конденсатор может оказаться с первого (событие  $A_1$ ), второго (событие  $A_2$ ) или третьего завода (событие  $A_3$ ). Согласно формуле, интересующее нас событие (событие  $B$ ) имеет вероятность

$$P\{B\} = 0,2 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,92 + 0,5 \cdot 0,808 = 0,86.$$

Мы остановимся теперь еще на одной формуле, которая носит название теоремы Бейеса. Пусть по-прежнему событие  $B$  может произойти только вместе с одним из несовместимых событий  $A_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). В результате испытания оказалось, что событие  $B$  наступило. Какова вероятность того, что оно наступило вместе с событием  $A_i$ ? Нам нужно найти вероятность  $P\{A_i|B\}$ . Согласно равенству (1.1.6) находим, что

$$P\{A_i|B\} = \frac{P\{A_i\}P\{B|A_i\}}{P\{B\}}. \quad (1.1.8)$$

Вероятность  $P\{B\}$  может быть вычислена по формуле (1.1.7).

Пусть в только что приведенном примере конденсатор не выдержал установленного срока работы и отказал. Каковы вероятности того, что он был с первого, второго или третьего заводов? Вычисления по формуле (1.1.8) приводят нас к таким результатам:

$$P\{A_1|\bar{B}\} = 0,143; \quad P\{A_2|\bar{B}\} = 0,171; \quad P\{A_3|\bar{B}\} = 0,686.$$

Мы видим, что, после того как становятся известными результаты испытаний, априорная (доопытная) оценка неизвестных вероятностей существенно изменяется.

В дальнейшем нам потребуется обобщение понятия независимости на случай нескольких событий. Мы скажем, что события  $A_1, A_2, \dots, A_s$  независимы в совокупности, если для любой группы  $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}$  ( $k \leq s$ ) из них выполнены равенства

$$P\left\{\prod_{r=1}^k A_{i_r}\right\} = \prod_{r=1}^k P\{A_{i_r}\}.$$

Для независимости в совокупности недостаточно, чтобы были независимы каждые два события.

Рассмотрим теперь задачу на применение общих правил.

Найти вероятность того, что некоторое изделие проработает не меньше, чем время  $t$ , если вероятность отказа изделия за



промежутков  $(t, t+h)$ , когда оно проработало уже время  $t$ , равна  $a(t)h + o(h)$ .

Обозначим через  $p(t)$  вероятность того, что изделие проработает по меньшей мере срок  $t$ ; тогда в силу условия

$$p(t+h) = p(t)(1 - a(t)h - o(h)).$$

Отсюда находим, что

$$p'(t) = -a(t)p(t)$$

и, значит,

$$p(t) = Ce^{-\int_0^t a(z) dz}.$$

Так как при  $t=0$  изделие работало, то  $p(0) = 1$  и, следовательно,  $C = 1$ . Итак,

$$p(t) = e^{-\int_0^t a(z) dz}.$$

Если  $a(t) = a$ , т. е. вероятность изделию проработать еще некоторое время не зависит от того, сколько оно уже проработало, то

$$p(t) = e^{-at}.$$

В демографии при составлении таблиц смертности для взрослого населения нередко пользуются формулой Макегамы, согласно которой

$$a(t) = \alpha + \gamma\beta e^{\gamma t}.$$

Предположение Макегамы означает, что смертность происходит под влиянием двух составляющих: одной, не зависящей от возраста, и другой, увеличивающейся (при  $\gamma > 0$ ) или уменьшающейся (при  $\gamma < 0$ ) в геометрической прогрессии с возрастом. При сделанном дополнительном предположении находим, что

$$p(t) = e^{-\alpha t - \beta(e^{\gamma t} - 1)}. \quad (1.1.9)$$

В теории надежности большую роль играет так называемая схема Бернулли. Предположим, что производится последовательность  $n$  независимых испытаний, в каждом из которых событие  $A$  может произойти с одной и той же вероятностью  $p$ . Спрашивается, чему равна вероятность того, что событие  $A$  произойдет при  $m$  каких-то испытаниях, а при остальных  $n-m$  не произойдет. Если обозначить эту вероятность через  $P_n(m)$  и ввести обозначение  $q = 1-p$ , то имеет место формула Бернулли

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m};$$

здесь  $C_n^m$  означает число сочетаний из  $n$  элементов по  $m$ , равное, как известно,  $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ .

Если, для примера, на стенде поставлены на испытания 20 ламп и вероятность выхода лампы из строя за период испытания равна 0,1, то вероятности  $P_{20}(0)$ ,  $P_{20}(1)$ ,  $P_{20}(2)$  будут соответственно равны

$$0,9^{20}, 2 \cdot 0,9^{19}, 1,9 \cdot 0,9^{18};$$

вероятность же того, что за время испытаний откажет не более четырех ламп, равна

$$\sum_{m=0}^4 C_{20}^m 0,1^m 0,9^{20-m}.$$

В теории надежности нередко рассматривают так называемое *отрицательное биномиальное распределение*, появляющееся из следующей модели. Представим себе, что производятся независимые наблюдения, в каждом из которых некоторое событие  $A$  (например, пробой конденсатора) может произойти с вероятностью  $p$ . Испытания повторяются до тех пор, пока не появится  $k$  раз событие  $A$ . Спрашивается, чему равна вероятность того, что потребуется ровно  $n$  наблюдений?

Из самой постановки задачи ясно, что последнее испытание должно принести наступление события  $A$ , а в предыдущих  $n-1$  как-то расположатся  $k-1$  ранее наступивших событий. Вероятность того, что в последнем испытании наступит событие  $A$ , равна  $p$ , а вероятность того, что в  $n-1$  предшествующих испытаниях как-то разместятся  $k-1$  появлений  $A$ , согласно схеме Бернулли равна  $C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$ . Таким образом, искомая вероятность равна

$$P\{\mu = n\} = C_{n-1}^{k-1} p^k q^{n-k}.$$

Здесь  $\mu$  может принимать значения  $k, k+1, k+2, \dots$

Обозначим через  $\nu$  величину  $\mu - k$ , т. е. число испытаний, которое нужно провести сверх  $k$  для завершения требуемой процедуры. Тогда

$$P\{\nu = r\} = P\{\mu = r + k\} = C_{r+k-1}^{k-1} p^k q^r. \quad (1.1.10)$$

Величина  $\nu$  может принимать значения  $0, 1, 2, \dots$

Легко убедиться, что общий член разложения произведения

$$p^k (1-q)^{-k}$$

по степеням  $q$  равен как раз вероятности  $P\{\nu = r\}$ . В силу этого говорят, что величина  $\nu$  имеет *отрицательное биномиальное*

распределение вероятностей, тогда как обычное биномиальное распределение получается аналогичным образом, но с заменой  $k$  на  $k$ .

Наряду с формулами Бернулли в теории надежности значительную роль играет одна схема, которая зачастую носит название схемы *невозвращенного шара*. Представим себе, что имеется  $N$  предметов, среди которых  $M$  обладают определенным свойством  $A$ , а остальные этим свойством не обладают. Из совокупности  $N$  имеющихся предметов наудачу выбираются  $n$ . Спрашивается, чему равна вероятность того, что среди вынутых предметов  $m$  обладают свойством  $A$ , а остальные  $n - m$  им не обладают?

Очевидно, что  $m$  может принимать лишь значения

$$l_0 = \max(0, n - N + M), \quad l_0 + 1, \quad l_0 + 2, \dots, \min(M, n).$$

Если же  $n$  меньше, чем  $M$  и  $N - M$ , то  $m$  может принимать любые значения от 0 до  $n$ .

Несложные рассуждения приводят нас к равенству

$$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}.$$

Для практических целей особенно интересен случай, когда  $M$  значительно меньше, чем  $N$ , и  $n$  мало по сравнению с  $N$ . В этом важном для теории надежности случае, очевидно,  $m$  может принимать значения  $0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$ .

Одна из задач, для которых используется приведенная формула, состоит в следующем: известно, что в партии из  $N$  штук изделий содержится  $M$  бракованных. Производится случайная выборка из этой партии в  $n$  штук. Чему равна вероятность того, что в выборке окажется  $m$  дефектных изделий?

## § 1.2. Случайные величины и их функции распределения

Хорошо известно, что основные характеристики надежности изделий (длительность безотказной работы, время восстановления, величина износа за определенный срок и др.), изготовленных, казалось бы, в одних и тех же условиях и из одних и тех же исходных материалов, имеют значительный разброс. Для примера в таблице 1.2.1 приведены данные испытаний на усталость при консольном изгибе образцов из сплава В 95. Длительность работы образца измеряется числом  $N$  циклов до разрушения. Всего испытано 463 образца. Результаты испытаний разбиты на группы в зависимости от величины логарифма числа  $N$ .

Таким образом, если взять какое-нибудь из большого числа изделий, то заранее нельзя предсказать, как долго оно будет

Таблица 1.2.1

$\log N$	Численность группы	$\log N$	Численность группы	$\log N$	Численность группы
4,60—4,65	2	5,05—5,10	43	5,50—5,55	12
4,65—4,70	3	5,10—5,15	41	5,55—5,60	8
4,70—4,75	3	5,15—5,20	45	5,60—5,65	10
4,75—4,80	12	5,20—5,25	42	5,65—5,70	5
4,80—4,85	12	5,25—5,30	38	5,70—5,75	1
4,85—4,90	20	5,30—5,35	22	5,75—5,80	1
4,90—4,95	18	5,35—5,40	24	5,80—5,85	1
4,95—5,00	27	5,40—5,45	14	5,85—5,90	0
5,00—5,05	41	5,45—5,50	18		

работать. Однако на основании соответствующим образом поставленных испытаний можно указать, в каком проценте случаев это изделие способно проработать тот или иной срок. Иными словами, для любых заданных  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ) можно оценить вероятность того, что изделие проработает срок, не меньший  $a$  и не больший  $b$ . Таким образом, для теории и практики надежности необходимо научиться оперировать со случайными величинами, т. е. с величинами, которые в зависимости от случая могут принимать те или иные значения.

Чтобы охарактеризовать случайную величину, необходимо указать, во-первых, какие значения она может принимать, т. е. множество возможных ее значений, и, во-вторых, вероятности этих значений. Если случайная величина может принимать только конечное или счетное множество значений, то охарактеризовать эту величину просто: достаточно перечислить ее возможные значения и указать те вероятности, с какими она их принимает. Для иллюстрации рассмотрим два примера, с которыми мы познакомились в предыдущем параграфе.

**Пример 1.** Число появлений события  $A$  при  $n$  независимых испытаниях, в каждом из которых  $A$  может произойти с одной и той же вероятностью  $p$ , представляет собой случайную величину, способную принять только значения  $0, 1, 2, \dots, n$ . Как мы знаем, вероятность того, что событие  $A$  наступит ровно при  $m$  испытаниях, равна  $P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$ . Рассматриваемая случайная величина называется *биномиально распределенной*, а совокупность соответствующих вероятностей — *биномиальным распределением*.

**Пример 2.** *Гипергеометрическое распределение.* Случайную величину (рассмотренную в § 1.1, стр. 22), принимающую цело-

численные значения  $m = 0, 1, 2, \dots, \min(M, n)$  с вероятностями

$$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n},$$

называют *распределенной по гипергеометрическому закону*.

Только что рассмотренный метод задания случайной величины, однако, нельзя использовать для всех случайных величин. Действительно, если множество возможных значений несчетно, то приписать каждому возможному значению определенную вероятность уже нельзя. Возникает задача разыскания такого приема, который был бы применим во всех случаях. Одним из самых распространенных приемов такого рода является использование понятия функции распределения. *Функцией распределения случайной величины*  $\xi$  называется вероятность того, что  $\xi$  примет значение меньшее, чем  $x$ ,

$$F_\xi(x) = \mathbf{P}\{\xi < x\}.$$

Здесь аргумент  $x$  может принимать любое действительное значение.

Любая функция распределения обладает следующими свойствами: при увеличении  $x$  функция  $F_\xi(x)$  не убывает, т. е. если  $x_2 > x_1$ , то

$$F_\xi(x_2) \geq F_\xi(x_1).$$

Для нее существуют пределы

$$F_\xi(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F_\xi(x) = 1, \quad F_\xi(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F_\xi(x) = 0.$$

Вероятность того, что  $\xi$  примет значение, меньшее  $b$  и не меньшее  $a$ , т. е. вероятность неравенства

$$a \leq \xi < b,$$

вычисляется по формуле

$$\mathbf{P}\{a \leq \xi < b\} = F_\xi(b) - F_\xi(a).$$

Для любого  $c$  имеет место равенство

$$\mathbf{P}\{\xi = c\} = F_\xi(c+0) - F_\xi(c).$$

Таким образом, если функция  $F_\xi(x)$  в точке  $c$  непрерывна, то вероятность того, что  $\xi$  примет в точности значение  $c$ , равна 0. Если же в точке  $c$  функция  $F_\xi(x)$  имеет скачок, то величина этого скачка равна вероятности того, что  $\xi$  примет значение  $c$ .

На каждую неубывающую функцию  $F(x)$ , для которой

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

и при произвольном  $x$

$$\lim_{z \rightarrow x-0} F(z) = F(x),$$

можно смотреть как на некоторую функцию распределения. Для примера, функция, определенная рис. 1.2.1, является функцией распределения случайной величины, которая принимает значение 0 с вероятностью  $\frac{1}{4}$ , в промежутке (0, 1) может принять любое значение, причем вероятность попадания в этот отрезок равна  $\frac{1}{4}$ . Поскольку в отрезке (1, 2)

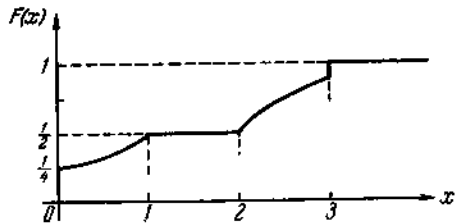


Рис. 1.2.1.

отрезке возможных значений не имеет. В промежутке (2, 3) случайная величина может попасть с вероятностью  $\frac{1}{3}$  и, наконец, значение 3 она принимает с вероятностью  $\frac{1}{6}$ . От  $-\infty$  до 0 функция  $F(x)$  равна 0, от 3 до  $+\infty$  равна 1. В этих двух отрезках определяемая ею случайная величина значений не принимает.

Если можно найти такую функцию  $f_{\xi}(x)$ , для которой при всех значениях  $x$  выполнено равенство

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(z) dz,$$

то про случайную величину  $\xi$  говорят, что она непрерывна; функцию  $f_{\xi}(x)$  называют плотностью распределения  $\xi$ . Для плотности распределения имеют место равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{\xi}(x) dx = 1;$$

при любых  $a$  и  $b$

$$P\{a \leq \xi < b\} = \int_a^b f_{\xi}(x) dx;$$

при тех значениях  $x$ , при которых существует производная  $F'_{\xi}(x)$ ,

$$f_{\xi}(x) = F'_{\xi}(x).$$

Теперь мы перейдем к рассмотрению ряда функций распределения, представляющих особый интерес для теории надежности.

Пример 3. *Равномерное распределение.* Случайная величина  $\xi$  называется *равномерно распределенной* в отрезке  $(a, b)$ , если ее функция распределения (рис. 1.2.2) определяется равенствами

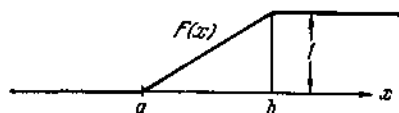


Рис. 1.2.2

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{при } a < x \leq b, \\ 1 & \text{при } x > b. \end{cases}$$

Плотность равномерного распределения равна

$$f_{\xi}(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < a \text{ и } x > b, \\ \frac{1}{b-a} & \text{при } a \leq x \leq b. \end{cases}$$

Пример 4. *Нормальное распределение.* Случайная величина  $\xi$  *нормально распределена*, если ее плотность распределения имеет вид

$$f_{\xi}(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Постоянные  $a$  и  $\sigma > 0$  могут быть любыми, их вероятностное значение будет нами определено в следующем параграфе. Функция  $f_{\xi}(x)$  симметрична относительно ординаты в точке  $x = a$ ; ее график изображен на рис. 1.2.3.

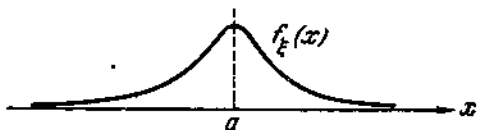


Рис. 1.2.3

Пример 5. *Несобственное распределение.* Случайная величина, функция распределения которой задается равенствами

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ 1 & \text{при } x > a, \end{cases}$$

называется *несобственной*; она с вероятностью 1 принимает единственное возможное значение  $a$ . Мы видим, что постоянная может рассматриваться как несобственная случайная величина.

Пример 6. *Распределение Пуассона.* Случайная величина, которая принимает только неотрицательные целочисленные значения с вероятностями

$$p_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

называется *распределенной по закону Пуассона*. Ее функция распределения представляет собой лестницу с бесконечным множеством ступенек, начинающихся в неотрицательных целочисленных абсциссах.

Распределение Пуассона играет особую роль в теории надежности, поскольку при широких условиях оно описывает закономерности появления внезапных отказов в сложных системах.

Смысл параметра  $\lambda$  будет выяснен в следующем параграфе.

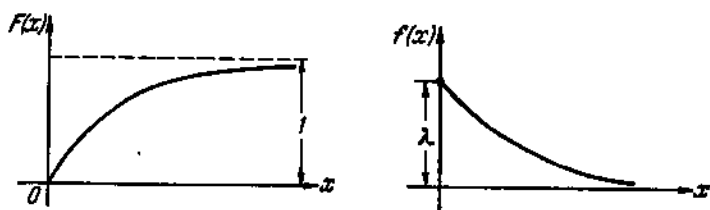


Рис. 1.2.4.

Пример 7. *Показательное распределение* (рис. 1.2.4)

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Плотность распределения существует и равна

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Постоянная  $\lambda$  имеет простой вероятностный смысл, который будет вскрыт в следующем параграфе.

Показательное распределение играет исключительную роль в теории надежности и в практике расчетов. Отметим сейчас, что во многих случаях промежутков времени между двумя последовательными отказами сложной системы подчиняется как раз показательному распределению.

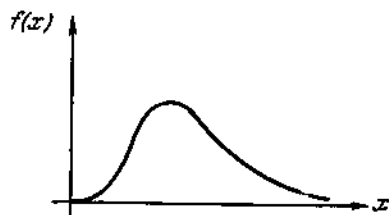


Рис. 1.2.5

Пример 8. *Распределение гамма* имеет плотность (рис. 1.2.5), определяемую равенствами

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0, \\ Cx^{\alpha-1}e^{-\beta x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Постоянные  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$  будут определены нами в следующем параграфе. Постоянное  $C$  определяется через  $\alpha$  и  $\beta$  из



равенства

$$C \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} dx = 1,$$

откуда

$$C = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha)},$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx.$$

В качестве частных случаев распределение гамма содержит показательное распределение ( $\alpha = 1$ ) и так называемые

распределения Эрланга (в случае целочисленных  $\alpha$ ). Распределение Эрланга с  $\alpha = k$  может быть интерпретировано как распределение длительности промежутка между первым и  $(k+1)$ -м отказом сложной системы (или же между последовательными вызовами, поступившими на телефонную станцию, разделенными во времени  $k$  другими вызовами).

Пример 9. *Распределение Вейбулла.* В последние годы функция распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 1 - e^{-cx^{\alpha}} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

где  $c$  и  $\alpha$  — положительные параметры (рис. 1.2.6), получила

название *распределения Вейбулла*. В работе [13] Вейбулл использовал это распределение для описания экспериментально наблюдавшихся разбросов усталостной прочности стали, пределов ее упругости, размеров частиц копоти и др. В последнее время распределение Вейбулла было использовано для изучения разброса сроков службы радиоэлектронной аппаратуры.

Распределение Вейбулла в теории вероятностей было известно ранее как предельное распределение (при  $n \rightarrow \infty$ ) самой меньшей из  $n$  независимых случайных величин с одним и тем же распределением. Об этом подробнее будет рассказано нами в § 1.4.

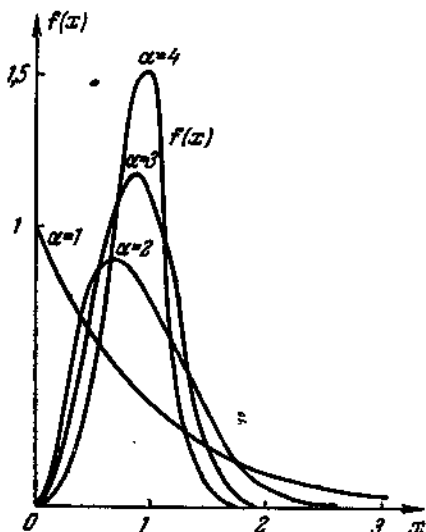


Рис. 1.2.6.

Пример 10. *Двойное показательное распределение.* В задачах, где необходимо установить распределение самого долговечного изделия из большого числа одинаковых изделий, может принести пользу *двойное показательное распределение*, имеющее вид

$$\Lambda(x) = e^{-ce^{-\alpha x}};$$

постоянные  $c > 0$  и  $\alpha > 0$  определяют форму функции распределения (рис. 1.2.7).

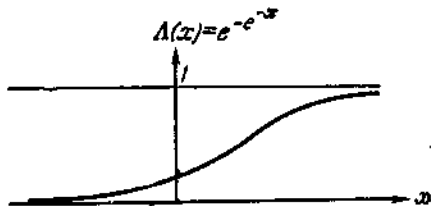


Рис. 1.2.7.

Пример 11. *Логарифмически нормальное распределение.*

В последние годы в разнообразных вопросах техники, биологии, экономики, геологии и теории надежности серьезное значение приобрело *логарифмически нормальное распределение*. В частности, как показал А. Н. Колмогоров ([14], см. также А. Ф. Филиппов [15]), к этому распределению приводит изучение размеров частиц при дроблении. Неотрицательная случайная величина распределена логарифмически нормально, если ее логарифм распределен нормально.

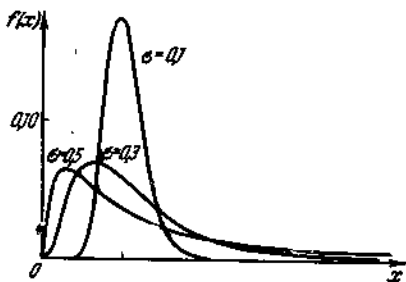


Рис. 1.2.8.

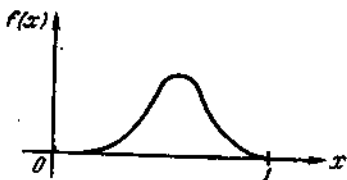


Рис. 1.2.9.

Плотность логарифмически нормального распределения (рис. 1.2.8) задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{(\lg x - a)^2}{2\sigma^2}} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Пример 12. *Распределение бета.* В задачах математической статистики большое значение имеет *распределение бета*, плотность распределения которого (рис. 1.2.9) задается формулой

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > 1, \\ \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a, b)} & \text{при } 0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

$$B(a, b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

Пример 13. *Распределение смеси.* Часто в практических ситуациях приходится иметь дело с таким положением дел, когда случайная величина является смесью двух или более случайных величин с различными распределениями. Для примера, распределение деталей на складе по долговечности удовлетворяет как раз этому условию, если детали поступают с разных заводов или, как это бывает на ремонтных заводах, с новыми деталями смешиваются годные детали, снятые с ремонтируемых машин (обезличенный ремонт). Пусть смешиваются случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , функции распределения которых соответственно равны  $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$ , причем величина  $\xi_k$  берется с вероятностью  $p_k$ ,  $\sum p_k = 1$ . Тогда функция распределения и плотность вероятности смеси имеют вид

$$F(x) = \sum p_k F_k(x), \quad f(x) = \sum p_k f_k(x). \quad (1.2.1)$$

Если распределение  $F(x, \lambda)$ , с которым приходится иметь дело, зависит от параметра  $\lambda$ , который сам является случайным с распределением  $A(\lambda)$ , то функция распределения наблюдаемой случайной величины равна

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x, \lambda) dA(\lambda). \quad (1.2.2)$$

Формула (1.2.1) является частным случаем только что написанной, если за параметр  $\lambda$  принять индекс  $k$ , а за функцию  $A(\lambda)$  — ступенчатое распределение со скачками  $p_k$  в точках  $\lambda = k$  ( $k = 1, \dots, n$ ).

Если  $F(x, \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}$  и  $\lambda$  случайно с плотностью распределения гамма:

$$A(x) = \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda^{\alpha} e^{-\beta\lambda} \quad \text{при } \lambda > 0,$$

то согласно формуле (1.2.2)

$$F(x) = \int_0^{\infty} [1 - e^{-\lambda x}] \frac{\lambda^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \lambda^{\alpha} e^{-\beta\lambda} d\lambda = 1 - \frac{\beta^{\alpha+1}}{(\beta+x)^{\alpha+1}}.$$

Пусть, в частности, на склад поступили определенные изделия с трех заводов; распределения долговечности этих изделий нормальны, но с разными параметрами  $a_i$  и  $\sigma_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Доля изделий, поступивших с каждого из заводов, соответственно равна  $p_1, p_2$  и  $p_3$ . Спрашивается, если взять наудачу из партии изделий одно, то какова будет плотность вероятности для его

долговечности? Согласно формуле (1.2.1)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{p_1}{\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} + \frac{p_2}{\sigma_2} e^{-\frac{(x-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} + \frac{p_3}{\sigma_3} e^{-\frac{(x-a_3)^2}{2\sigma_3^2}} \right].$$

Ряд других важных примеров распределений будет дан в следующем параграфе.

В практических задачах зачастую приходится рассматривать не одну-единственную случайную величину, а совокупность случайных величин, как правило, связанных между собой. Для полного описания совокупности  $n$  случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  или, как говорят,  $n$ -мерного вектора, а также  $n$ -мерной случайной величины, употребляют  $n$ -мерные функции распределения, т. е. вероятности совместного выполнения неравенств  $\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n$ ,

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathbf{P} \{ \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n \}.$$

Случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  называются *независимыми*, если при любых  $x_1, x_2, \dots, x_n$  выполнены равенства

$$\mathbf{P} \{ \xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \dots, \xi_n < x_n \} = \prod_{k=1}^n \mathbf{P} \{ \xi_k < x_k \}.$$

В терминах функций распределения это равенство записывается так:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{k=1}^n F_k(x_k).$$

В теории надежности постоянно приходится по данным случайным величинам образовывать новые случайные величины. Так, например, при расчете влияния введения резервных элементов или устройств важно бывает рассчитать по функции (или функциям) распределения длительностей безотказной работы элементов распределение безотказного периода работы зарезервированной группы. Если резервирование нагруженное (горячий резерв) и устройство работает, пока работает хотя бы один элемент (основной или резервный), то длительность работы резервной группы равна

$$\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n),$$

где  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  — длительности работы резервных элементов. Пусть  $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$  — функция распределения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ , тогда

$$\begin{aligned} A_n(x) = \mathbf{P} \{ \eta_n < x \} &= \mathbf{P} \{ \xi_1 < x, \xi_2 < x, \dots, \xi_n < x \} = \\ &= F(x, x, \dots, x). \end{aligned}$$

В случае независимых  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  эта формула переписывается в виде

$$A_n(x) = P[\eta_n < x] = F_1(x) F_2(x) \dots F_n(x),$$

где  $F_k(x)$  обозначает функцию распределения случайной величины  $\xi_k$ . Если все случайные величины, о которых идет речь, вдобавок одинаково распределены (например, резервные элементы взяты из той же партии продукции, из которой взят и основной элемент), то

$$A_n(x) = F^n(x).$$

Плотность распределения величины  $\eta_n$  в случае одинаково распределенных независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

$$a_n(x) = A_n'(x) = nF^{n-1}(x) f(x).$$

Обозначим теперь

$$\zeta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n).$$

Чтобы  $\zeta_n > x$ , очевидно, необходимо одновременное выполнение неравенств  $\xi_1 > x, \xi_2 > x, \dots, \xi_n > x$ . Таким образом,

$$B_n(x) = P\{\zeta_n < x\} = 1 - P\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\}.$$

В случае, когда величины  $\xi_k$  независимы и одинаково распределены,

$$B_n(x) = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Обратим внимание на то, что при любом  $n$  для распределения  $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$  распределение величины  $\eta_n$  получается из исходного путем сдвига начала координат, как это видно из равенства

$$A_n(x) = e^{-ne^{-x}} = e^{-e^{-(x - \log n)}}.$$

Точно так же для распределения Вейбулла  $F(x) = 1 - e^{-x^2}$  при любом  $n$  распределение  $\zeta_n$  получается из исходного путем изменения масштаба, как это вытекает из равенства

$$B_n(x) = 1 - e^{-nx^2} = 1 - e^{-(\sqrt[n]{n}x)^2}.$$

Изложение в настоящем параграфе носило чисто интуитивный характер. Теперь мы сделаем набросок понятия случайной величины с позиций аксиоматики случайного события, о которой речь была в § 1.1. В соответствии с общими представлениями мы исходим из множества элементарных событий  $\Omega$ . Каждому элементарному событию  $e$  поставим в соответствие некоторое число (или группу чисел)

$$\xi = f(e).$$

Функция  $\xi$  называется *случайной величиной*, если она измерима относительно введенной в рассматриваемом множестве  $\Pi$  вероятности. Иными словами, если при каждом действительном  $x$  для множества  $\mathfrak{A}_x$  тех  $e$ , для которых  $f(e) < x$ , определена вероятность. Функция распределения случайной величины при этом вводится совершенно естественно:

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\mathfrak{A}_x\}.$$

### § 1.3. Числовые характеристики случайных величин

Наиболее полная характеристика случайной величины дается ее функцией распределения, которая указывает, какие значения и с какими вероятностями принимает данная величина. Однако нередко требуются некоторые более суммарные представления о случайной величине. Так, для подсчета примерного числа машин, которые необходимы для выполнения определенной работы, нужно только знание того, какую работу «в среднем» способна выполнить каждая из машин. Для теории вероятностей и ее применений, в том числе для теории надежности, большую роль играют некоторые постоянные числа, получаемые по определенным правилам из функций распределения. Среди этих постоянных, служащих для общей количественной оценки случайных величин, для характеристики их «в целом», особое значение имеют *среднее значение* (или, иначе, *математическое ожидание*), *дисперсия*, *медиана*, *мода* и *моменты* различных порядков.

Если случайная величина  $\xi$  принимает значения  $x_1, x_2, \dots$  соответственно с вероятностями  $p_1, p_2, \dots, \sum_i p_i = 1$  и

$$\sum_i |x_i| p_i < +\infty,$$

то сумма (сумма произведений возможных значений случайной величины на их вероятности)

$$M\xi = \sum_i x_i p_i \quad (1.3.1)$$

называется *математическим ожиданием* величины  $\xi$  или *средним значением*  $\xi$  и обозначается символом  $M\xi$  (часто также —  $E\xi$ ).

Для примера, математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равно

$$\begin{aligned} M\xi &= \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} = \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda. \end{aligned}$$

Отправляясь от формулы (1.3.1), можно прийти к определению математического ожидания в случае, когда задана функция распределения величины  $\xi$ . Для этой цели только требуется понятие интеграла Стильтьеса

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x). \quad (1.3.2)$$

В случае существования плотности распределения

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx. \quad (1.3.3)$$

Если случайная величина  $\xi$  распределена равномерно в отрезке  $(a, b)$ , то

$$M\xi = \int_a^b \frac{x dx}{b-a} = \frac{a+b}{2},$$

т. е. математическое ожидание равно среднему арифметическому крайних абсцисс отрезка  $(a, b)$ .

Для нормального распределения с параметрами  $a$  и  $\sigma$

$$M\xi = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (a + z\sigma) e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sqrt{2\pi} \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,$$

то

$$M\xi = a.$$

Мы получили результат: *параметр  $a$  нормального распределения равен математическому ожиданию.*

Далеко не каждое распределение вероятностей обладает математическим ожиданием. Так, например, распределение Коши, для которого плотность распределения равна  $p(x) = \frac{a}{\pi(a^2 + x^2)}$ , не имеет математического ожидания, поскольку для него интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} xp(x) dx$  расходится.

Для практических и теоретических целей важны общие свойства математического ожидания, которые мы сейчас перечислим.

1°. Математическое ожидание постоянной  $C$  равно этой же постоянной:  $M C = C$ .

2°. Постоянный множитель выносится за знак математического ожидания:  $M C \xi = C M \xi$ .

3°. Математическое ожидание суммы любых случайных величин (как угодно связанных) равно сумме их математических ожиданий:  $M(\xi + \eta) = M \xi + M \eta$ .

4°. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий:  $M \xi \eta = M \xi \cdot M \eta$ .

Для оценки разброса значений случайной величины около ее среднего значения используется несколько числовых характеристик, важнейшей из них является дисперсия. Дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D \xi = M (\xi - M \xi)^2. \quad (1.3.4)$$

Несложные алгебраические преобразования и использование только что сформулированных свойств математического ожидания приводят к равенству

$$D \xi = M \xi^2 - (M \xi)^2. \quad (1.3.5)$$

Если случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения, то для вычисления дисперсии можно пользоваться следующими формулами:

$$D \xi = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M \xi)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x) dx - \left( \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \right)^2. \quad (1.3.6)$$

Приведем примеры вычисления дисперсии для некоторых важных распределений.

Дисперсия нормального распределения с параметрами  $a$  и  $\sigma$ :

$$D \xi = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \sigma^2.$$

Мы видим, что для нормального распределения и второй параметр  $\sigma$  имеет простой вероятностный смысл — его квадрат равен дисперсии.

Дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона с параметром  $\lambda$ :

$$D \xi = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} - \lambda^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^{\infty} (k-1) \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \\ = \lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = \lambda.$$



Мы получили интересный результат, который находит применение при проверке гипотезы о том, что наблюдаемое распределение является пуассоновским: *математическое ожидание и дисперсия распределения Пуассона равны по величине.*

Дисперсия равномерно распределенной в отрезке  $(a, b)$  величины  $\xi$  равна  $D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}$  и, следовательно, является возрастающей функцией длины отрезка  $(a, b)$ . Дисперсию можно поэтому рассматривать как меру рассеяния (разбросанности) значений случайной величины от ее среднего значения. Для нормального распределения (как, впрочем, и для многих других) соответствующая случайная величина при любом положительном значении дисперсии может принимать любые действительные значения. Однако, чем меньше величина дисперсии, тем большая доля значений случайной величины принимается из области, непосредственно примыкающей к математическому ожиданию. Для иллюстрации этого замечания мы приводим на рис. 1.3.1 графики плотности нормального распределения для  $\sigma = 0,5; 1; 2$ .

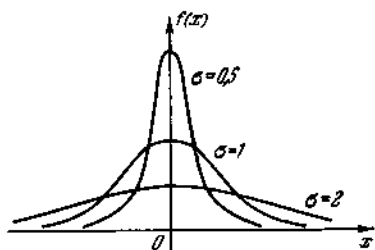


Рис. 1.3.1.

Дисперсия обладает следующими свойствами:

- 1°. Дисперсия постоянного равна нулю:  $DС = 0$ .
- 2°. Постоянный множитель выходит за знак дисперсии в квадрате:  $DС\xi = C^2D\xi$ .
- 3°. Дисперсия суммы попарно независимых случайных величин равна сумме дисперсий слагаемых:  $D \sum_{k=1}^n \xi_k = \sum_{k=1}^n D\xi_k$ .

Моментом  $k$ -го порядка величины  $\xi$  называется математическое ожидание  $k$ -й степени разности  $(\xi - a)$ :

$$\nu_k(a) = M(\xi - a)^k.$$

Если  $a = 0$ , то момент иногда называется *начальным*, а если  $a = M\xi$ , то *центральным*. Дисперсия, таким образом, есть второй центральный момент. Впоследствии станем обозначать центральные моменты буквой  $\mu_k$ , а начальные — буквой  $\nu_k$ ; индекс  $k$  означает порядок момента. Легко проверить, что между центральными и начальными моментами имеет место равенство ( $k \geq 1$ )

$$\mu_k = \sum_{r=2}^k (-1)^{k-r} C_k^r \nu_r \nu_1^{k-r} + (-1)^{k-1} (k-1) \nu_1^k.$$

Для первых четырех моментов, играющих особо важную роль в теории вероятностей и математической статистике, это равенство принимает такую форму:

$$\begin{aligned}\mu_0 &= 1, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= v_2 - v_1^2, \\ \mu_3 &= v_3 - 3v_2v_1 + 2v_1^3, \\ \mu_4 &= v_4 - 4v_3v_1 + 6v_2v_1^2 - 3v_1^4.\end{aligned}$$

Модой непрерывного распределения, имеющего плотность  $p(x)$ , называется абсцисса  $x_M$ , при которой  $p(x)$  достигает максимума. Нормальное распределение одномодально, для него мода и математическое ожидание совпадают. Распределение Вейбулла при  $\alpha > 1$  имеет моду, а при  $\alpha \leq 1$  моды не имеет. А. Я. Хинчин [16] выяснил условия, при которых распределение будет одномодальным (или, как он назвал, унимодальным).

Пусть  $F(x)$  — некоторое распределение. Корень уравнения

$$F(x) = \alpha \quad (0 < \alpha < 1)$$

называют  $\alpha$ -квантилью распределения  $F(x)$ . Если функция  $F(x)$  разрывна, то  $\alpha$ -квантили существуют не для каждого  $\alpha$ , поскольку, как правило, при заданном  $\alpha$  найдется лишь такое  $x_\alpha$ , что

$$F(x_\alpha - 0) \leq \alpha < F(x_\alpha + 0).$$

Если же  $F(x)$  непрерывна и имеет промежутки, в которых она сохраняет постоянное значение, то для некоторых  $\alpha$  имеется целый континуум  $\alpha$ -квантилей — все те значения  $x$ , при которых  $F(x) = \alpha$ .

Легко проверить по таблицам, что для нормального распределения квантили при  $\alpha = 0,25$ ;  $\alpha = 0,5$  и  $\alpha = 0,75$  равны соответственно  $x_{0,25} = a - 0,6745\sigma$ ;  $x_{0,5} = a$ ;  $x_{0,75} = a + 0,6745\sigma$ .

Квантиль для  $\alpha = 0,5$  называется *медианой* распределения. У нормального распределения медиана совпадает с математическим ожиданием.

Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  связаны зависимостью  $\eta = \varphi(\xi)$ , причем функция  $\varphi(x)$  является неубывающей функцией от  $x$ , то квантили величины  $\eta$  (обозначим их  $y_\alpha$ ) связаны с квантилями величины  $\xi(x_\alpha)$  простым соотношением

$$y_\alpha = \varphi(x_\alpha).$$

Пусть  $F(x)$  непрерывна. Рассмотрим функцию  $\Psi(x)$ , обратную  $F(x)$ , т. е. такую, что при любом  $x$

$$\Psi(F(x)) = x.$$

Ясно, что имеет место равенство  $x_\alpha = \Psi(\alpha)$ . Это последнее равенство используется для изготовления различных «вероятностных бумаг».

Рассмотрим еще несколько примеров распределений, широко использующихся в теории надежности.

Пример 14. *Распределение  $\chi^2$* . Пусть случайные величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  независимы и нормально распределены,  $M\xi_i = a$ ,  $D\xi_i = \sigma^2$ . Функция распределения величины

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a)^2$$

носит название *распределения  $\chi^2$* . Плотность распределения  $\chi^2$  равна 0 при  $x \leq 0$  и при  $x > 0$

$$p_n(x) = \frac{x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Число  $n$  носит название *числа степеней свободы*.

Пример 15. *Распределение Стьюдента*. Если случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы,  $\xi$  распределено нормально,  $M\xi = 0$ ,  $D\xi = 1$ , а  $\eta^2$  имеет распределение  $\chi^2$ , то отношение  $\frac{\xi}{\eta}$  распределено по закону Стьюдента (Госсета):

$$p(x; n) = \left[ 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n} \right]^{-1} \left( 1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}}.$$

Если  $\xi$  нормально распределено,  $M\xi = \delta$ ,  $D\xi = 1$ , а  $\eta$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $n$  степенями свободы, то отношение  $\frac{\xi - \delta}{\eta}$  имеет *нецентральное распределение Стьюдента* со смещением  $\delta$ . Плотность нецентрального распределения Стьюдента имеет вид

$$p(x; \delta, n) = \left[ 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n} \right]^{-1} e^{-\frac{1}{2} \frac{n\delta^2}{n+x^2}} \times \\ \times \left( 1 + \frac{x^2}{n} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \int_0^{\infty} z^n e^{-\frac{1}{2} \left( z - \frac{x\delta}{\sqrt{n+z^2}} \right)^2} dz.$$

Пример 16. *Распределение Фишера — Снедекора*. Пусть случайные величины  $\chi_1^2$  и  $\chi_2^2$  независимы и имеют  $\chi^2$ -распределения

с  $n_1$  и  $n_2$  степенями свободы. Отношение  $F = \frac{n_2 \chi_1^2}{n_1 \chi_2^2}$  имеет *распределение F*. Плотность распределения  $F$  дается формулой

$$f_{n_1, n_2}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1 + n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2} - 1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2} x\right)^{-\frac{n_1 + n_2}{2}}.$$

### § 1.4. Некоторые предельные теоремы теории вероятностей

Предельные теоремы играют огромную роль в теории вероятностей и в ее приложениях, поскольку в значительной мере они позволяют учесть реальные особенности строения изучаемых объектов (влияние большого числа воздействий, каждое из которых незначительно по величине, молекулярное строение и пр.). Мы здесь укажем несколько теорем такого типа, где общие закономерности определяются не характером каждого отдельного воздействия, а большим числом их. С такого рода явлениями в теории надежности приходится встречаться постоянно по разным причинам. С одной стороны, когда переходят к глубокому изучению явлений износа трущихся поверхностей или же процессов, происходящих в современных полупроводниковых приборах, то самим ходом событий мы принуждены изучать явления на молекулярном уровне и даже принимать во внимание атомистическое строение вещества. Сведения же о природе частиц и их взаимодействиях весьма скудны; достоверно лишь то, что их очень много. Естественно, что в таких условиях особенно удачен и хорошо приспособлен к объекту исследования аппарат теории вероятностей и ее предельных теорем: имеется большое число в основном равноправных ингредиентов и главная цель состоит в разыскании тех общих закономерностей, которые обусловлены в первую очередь именно этим массовым характером явления и лишь в незначительной степени зависят от индивидуального характера составляющих. Далее, составление математических моделей явлений зачастую становится более прозрачным, когда откидывается то, что затемняет картину явления, но не оказывает решающего влияния на него.

✓ Теорема Пуассона. *Если в  $n$  независимых испытаниях событие  $A$  имеет малую вероятность  $p$ , то при больших значениях  $n$*

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

где  $\lambda = np$ .

В частности, если вероятность изготовления бракованного изделия мала, то вероятность того, что в партии из  $n$  штук

встретится то или иное число бракованных изделий, с хорошим приближением можно считать распределенной по закону Пуассона.

Интегральная теорема Муавра—Лапласа. Если в последовательности независимых испытаний вероятность события  $A$  равна  $p$ , причем  $0 < p < 1$ , то вероятность того, что число  $\mu$  появлений события  $A$  в  $n$  последовательных испытаниях, удовлетворяет неравенствам ( $a$  и  $b$  — произвольные числа)

$$a \leq \frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < b,$$

при больших  $n$  близка к

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Интегральная теорема Муавра—Лапласа находит широкое применение как при теоретических исследованиях, так и при проведении непосредственно прикладных расчетов. Пусть, для примера, известно, что в течение сезона какая-нибудь деталь может прослужить без замены лишь в  $\frac{2}{3}$  случаев, а в  $\frac{1}{3}$  случаев такая замена необходима. В некоторой области имеется 16 200 агрегатов, в которых имеется по одной такой детали. Сколько необходимо завезти этих деталей, чтобы обеспечить бесперебойное снабжение действующих агрегатов?

Обозначим через  $\mu$  число поломавшихся за сезон деталей. Тогда согласно теореме Муавра—Лапласа вероятность того, что будет достаточно запasti 5400 деталей (именно так подсчитывают обычно потребность в запасных частях), равна вероятности того, что число поломок окажется меньшим этого числа,

$$\begin{aligned} P\{\mu < 5400\} &= P\{\mu - 5400 < 0\} = P\left\{\frac{\mu - 5400}{\sqrt{npq}} < 0\right\} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0,5. \end{aligned}$$

Таким образом, при подобном расчете запасов мы сумеем покрыть потребность лишь с вероятностью  $\frac{1}{2}$ , т. е. лишь в половине случаев наших запасов будет достаточно.

Естественно спросить себя о таких запасах, которые удовлетворили бы потребность с подавляющей вероятностью, например с вероятностью 0,95. Итак, каково должно быть  $b$ , чтобы

$$P\{\mu < b\} = 0,95?$$

Имеем

$$P\{\mu < b\} = P\left\{\frac{\mu - np}{\sqrt{npq}} < \frac{b - np}{\sqrt{npq}}\right\}.$$

По теореме Лапласа

$$P\{\mu < b\} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{b-np}{\sqrt{npq}}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Из таблиц находим, что интеграл Лапласа равен 0,95 при значении аргумента, равном 1,65; таким образом,

$$1,65 = \frac{b-np}{\sqrt{npq}} = \frac{b-5400}{60}.$$

Из этого уравнения находим, что для удовлетворения потребности в подавляющем большинстве случаев достаточно запasti только 5499 деталей.

✓ Закон больших чисел в форме Бернулли. Пусть в последовательности независимых испытаний событие  $A$  имеет неизменную вероятность появления  $p$ ; пусть, далее,  $\mu$  означает число появлений события  $A$  в  $n$  последовательных испытаниях. Тогда, каково бы ни было положительное число  $\varepsilon > 0$ , при  $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\left|\frac{\mu}{n} - p\right| > \varepsilon\right\} \rightarrow 0.$$

В начале нашего века французским математиком Э. Борелем было обнаружено более сильное предложение, согласно которому

$$P\left\{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\mu}{n} = p\right\} = 1.$$

Теоремы Бернулли и Бореля служат основанием оценки неизвестной вероятности события  $A$  посредством частоты его появления, т. е. величины  $\frac{\mu}{n}$ .

Закон больших чисел в форме Чебышева. Если последовательность попарно независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots$  такова, что их математические ожидания  $M\xi_n = a_n$  конечны и дисперсии ограничены одной и той же постоянной  $C$  ( $D\xi_n \leq C$ ), то при  $n \rightarrow \infty$  и любой положительной постоянной  $\varepsilon$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k)\right| \leq \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Отсюда следует, что при  $n \rightarrow \infty$

$$P\left\{\left|\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k\right| < \varepsilon\right\} \rightarrow 1.$$

В частности, если все случайные величины имеют одно и то же математическое ожидание ( $a_n = a$ ), то при  $n \rightarrow \infty$

$$P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_k - a \right| < \varepsilon \right\} \rightarrow 1.$$

Центральная предельная теорема (теорема Ляпунова и ее обобщения). Теоремы типа закона больших чисел способствуют сближению сумм независимых случайных величин с некоторой последовательностью постоянных. Для практических целей, как правило, требуется несравненно большее — указание на то, как часто, т. е. с какой вероятностью, может наступать то или иное отклонение от этих постоянных рассматриваемой суммы. При весьма общих условиях ответ на этот вопрос дает центральная предельная теорема. Мы приведем формулировку этой теоремы в условиях Линдеберга.

Пусть дана последовательность взаимно независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ , о которых мы предположим, что они имеют конечные математические ожидания и дисперсии,

$$a_n = M \xi_n, \quad b_n^2 = D \xi_n, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^n b_k^2 = 0 \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Если при любом  $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \int_{|x-a_k| > B_n \tau} (x-a_k)^2 dF_k(x) = 0, \quad (1.4.1)$$

где  $F_k(x)$  — функция распределения  $\xi_k$ , то при любом  $x$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (1.4.2)$$

Условие (1.4.1) называется *условием Линдеберга*; можно доказать, что если условие Линдеберга выполнено, то обязательно: при любом  $\tau > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \frac{|\xi_k - a_k|}{B_n} > \tau \right\} = 0.$$

Иными словами, если условие Линдеберга выполнено, то все слагаемые равномерно малы в том смысле, что вероятность хотя бы одному слагаемому  $\frac{\xi_k - a_k}{B_n}$  превзойти величину  $\tau$  стремится к нулю при возрастании числа слагаемых до бесконечности.

Теореме Линдеберга предшествовала важная в принципиальном и прикладном отношении теорема А. М. Ляпунова. Мы

сформулируем эту теорему в частном предположении наличия конечных третьих моментов. Впоследствии именно в этой форме мы используем ее при изучении вопросов резервирования.

Предположим, что последовательность взаимно независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$  имеет конечные третьи моменты. Введем обозначения

$$c_k = M|\xi_k - a_k|^3, \quad C_n = \sum_{k=1}^n c_k$$

в дополнение к тем, которые были введены при формулировке теоремы Линдеберга.

Если при  $n \rightarrow \infty$  отношение Ляпунова

$$L_n = \frac{C_n}{B_n^3} \rightarrow 0, \quad (1.4.3)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ \frac{1}{B_n} \sum_{k=1}^n (\xi_k - a_k) < x \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Соотношение (1.4.3) носит название *условия Ляпунова*.

Если все слагаемые одинаково распределены и имеют конечную дисперсию, то условие Линдеберга обязательно выполнено и, значит, для суммы таких слагаемых имеет место равенство (1.4.2).

Требование одинаковой распределенности слагаемых слишком сильное, но оно может быть ослаблено. Именно, можно требовать лишь конечности дисперсий слагаемых, а также того, что среди функций распределения членов последовательности  $\xi_1, \xi_2, \dots$  имеется лишь конечное число различных.

Точно так же, если все величины  $\xi_k$  ограничены сверху и снизу одними и теми же величинами  $a$  и  $b$  ( $a \leq \xi_k \leq b$ ) и  $B_n \rightarrow \infty$  при  $n \rightarrow \infty$ , то условие Линдеберга выполнено и предельное равенство (1.4.2) имеет место.

Мы привели два частных случая центральной предельной теоремы, чтобы составить себе представление о том разнообразии возможностей, при которых может появляться нормальное распределение.

Предельные теоремы типа центральной предельной теоремы играют в приложениях очень большую роль, поскольку нередко приходится иметь дело с ситуацией, в которой интересующий нас результат протекает под влиянием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых производит лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных. Именно такая картина наблюдается в теории ошибок наблюдений, в явлениях износа, случайном рассеянии значений параметров, определяющих качество продукции изделий массового производства. Условие центральной предельной теоремы нередко



можно считать выполненными, и потому распределения, близкие к нормальному, встречаются в реальных задачах очень часто. Впоследствии у нас будет много случаев, когда мы станем пользоваться этим выводом.

Предельные распределения для максимального и минимального значения. Рассмотрим группу  $n$  одинаково распределенных независимых случайных величин  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ . Образует теперь новые величины  $\eta_n = \max(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$  и  $\zeta_n = \min(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ , понимая под этим следующее: пусть величины  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  приняли значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , тогда припишем величине  $\eta_n$  значение, равное  $\max(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , а величине  $\zeta_n$  — значение  $\min(x_1, x_2, \dots, x_n)$ . Функции распределения величин  $\eta_n$  и  $\zeta_n$  определяются равенствами

$$F_n(x) = \mathbf{P}\{\eta_n < x\} = \mathbf{P}\{\xi_1 < x, \xi_2 < x, \dots, \xi_n < x\} = F^n(x)$$

и

$$F_n^*(x) = \mathbf{P}\{\zeta_n < x\} = 1 - \mathbf{P}\{\xi_1 \geq x, \xi_2 \geq x, \dots, \xi_n \geq x\} = 1 - (1 - F(x))^n.$$

Спросим себя, к каким распределениям могут сходиться распределения величин  $\frac{\eta_n - b_n}{a_n}$  и  $\frac{\zeta_n - b_n}{a_n}$  при надлежащем подборе постоянных  $b_n$  и  $a_n > 0$ , когда  $n \rightarrow \infty$ ? Оказывается, что предельные распределения для величин  $\frac{\eta_n - b_n}{a_n}$  исчерпываются следующими типами:

- 1)  $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$ ,
- 2)  $\Phi_\alpha(x) = 0$  при  $x \leq 0$  и  $e^{-x^{-\alpha}}$  при  $x > 0$ ,
- 3)  $\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha}$  при  $x \leq 0$  и 1 при  $x > 0$ .

Предельные распределения для  $\frac{\zeta_n - b_n}{a_n}$  исчерпываются следующими типами:

- 1)  $\Lambda^*(x) = 1 - e^{-e^x}$ ,
- 2)  $\Phi_\alpha^*(x) = 1 - e^{-(-x)^{-\alpha}}$  при  $x \leq 0$  и 1 при  $x > 0$ ,
- 3)  $\Psi_\alpha^*(x) = 0$  при  $x \leq 0$  и  $1 - e^{-x^\alpha}$  при  $x > 0$ .

Постоянная  $\alpha$  может принимать любое положительное значение.

Существенно заметить, что среди перечисленных распределений содержится распределение Вейбулла. Быть может, обширные применения распределения Вейбулла на практике могут быть объяснены тем, что наблюдаемая величина является минимумом большого числа независимо действующих величин.

Условия сходимости к каждому из возможных предельных распределений хорошо изучены [17], [18].

Об одной модели появления логарифмически нормального распределения. Из центральной предельной теоремы можно получить многочисленные следствия, подобные тому, о котором сейчас пойдет речь.

Если  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, для которых  $\mathbb{M} \log \xi_k = a$  и

$\mathbb{D} \log \xi_k = \sigma^2$ , то произведение  $\prod_{k=1}^n \xi_k$  асимптотически распределено по логарифмически нормальному закону с параметрами  $na$  и  $n\sigma^2$ .

По сути дела, эта идея многократно использовалась для создания моделей явлений, при которых приходится рассматривать логарифмически нормальное распределение. В частности, А. Н. Колмогоров в 1941 г. исходил из близкого принципа при объяснении распределения размеров частиц при дроблении [14].

В 1903 г. Кэптейном [19] была предложена следующая модель. Предположим, что состояние некоторого процесса характеризуется величиной  $X(t)$ . Изменение  $X(t)$  за время от  $t_i$  до  $t_{i+1}$  пропорционально достигнутому состоянию

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = \varepsilon_i X(t_i); \quad (1.4.4)$$

коэффициент пропорциональности  $\varepsilon_i$  является случайной величиной, независимой от остальных  $\varepsilon_j$  и от величин  $X(t_j)$ . Теперь

$$\sum_{i=0}^n \varepsilon_i = \sum_{i=0}^n \frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{X(t_i)}$$

и

$$\sum_{i=0}^n \frac{X(t_{i+1}) - X(t_i)}{X(t_i)} \sim \int_{t_0}^{t_{n+1}} \frac{dX}{X},$$

если только значения  $t_i$  взяты близко одно от другого. Положив  $t = t_{n+1}$ , мы находим, что

$$\log X(t) = \sum_{i=0}^n \varepsilon_i + \log X(t_0).$$

При  $n$  большом и надлежащих предположениях относительно  $\varepsilon_i$  логарифм  $X(t)$  имеет почти нормальное распределение и, значит, само  $X(t)$  распределено асимптотически логарифмически нормально.

Если предположение (1.4.4) заменить на

$$X(t_{i+1}) - X(t_i) = \varepsilon_i \varphi(X(t_i)),$$

где  $\varphi(z)$  — некоторая заданная функция, то схема Кэптейна дает возможность получить широкое разнообразие возможных предельных

Таблица 1.4.1

## Непрерывные распределения

Наименование распределения	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
Равномерное	$(a, b)$	$\frac{1}{b-a}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	—
Нормальное	$(-\infty, \infty)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$a$	$\sigma^2$	$a$
Логарифмически нормальное	$(0, \infty)$	$\frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - a)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{\frac{\sigma^2}{2} + a}$	$e^{2\sigma^2 + 2a} (e^{2\sigma^2} - 1)$	$e^{\sigma^2 - a}$
Вейбулла	$(0, \infty)$	$\alpha c x^{c-1} e^{-cx^\alpha}$	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{1}{c\alpha}}$	$\frac{\Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\frac{2}{c\alpha}}$	(при $\alpha > 1$ ) $\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{\alpha-1}{c\alpha}}$
Гамма	$(0, \infty)$	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	— ( $\alpha \leq 1$ ) $\frac{\alpha-1}{\beta}$ ( $\alpha > 1$ )

Продолжение таблицы 1.4.1

Наименование распределения	Область значений	Плотность распределения	Математическое ожидание	Дисперсия	Мода
Частные случаи Показательное распределение $\chi^2$	$(0, \infty)$	$\lambda e^{-\lambda x}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	—
	$(0, \infty)$	$\frac{\frac{k}{2} - 1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right) 2^{\frac{k}{2}}} e^{-\frac{x}{2}}$	$k$	$2k$	$k-2$
Бета	$(0, 1)$	$x^{a-1} (1-x)^{b-1}$	$\frac{a}{a+b}$	$\frac{ab}{(a+b)^2 (a+b+1)}$	$\frac{a-1}{a+b-2}$
Стюдента	$(-\infty, \infty)$	$\left[ 2^{\frac{n-1}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right) \sqrt{\pi n} \right]^{-1} \times$ $\times \left( 1 + \frac{x^2}{2} \right)^{-\frac{n+1}{2}}$	0	$\frac{1}{\frac{n-2}{2}}$	0
Фишера	$(0, \infty)$	$\frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2} x^2 - 1} \times$ $\times \left( 1 + \frac{n_1}{n_2} x \right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}}$	$\frac{n_0}{n_2-2}$	$\frac{2n_2^2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 (n_2 - 2)^2 (n_2 - 4)}$	$\frac{(n_2 - 2) n_2}{2n_1^2 + n_2}$

Таблица 1.4.2

## Дискретные распределения

Наименование распределения	Возможные значения	Вероятность	Математическое ожидание	Дисперсия
Биномиальное	$0, 1, 2, \dots, n$	$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$	$np$	$npq$
Гипергеометрическое	$0, 1, \dots, \min(M, n)$	$P_m = \frac{C_M^m C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$	$\frac{M}{n} \frac{N}{N}$	$\frac{M(N-M)}{N^2} \frac{n(N-n)}{N-1}$
Пуассона	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$	$\lambda$	$\lambda$
Геометрическое	$0, 1, 2, \dots$	$P_m = pq^{m-1}$	$\frac{1}{p}$	$\frac{q}{p^2}$
Отрицательное биномиальное	$r, r+1, \dots$	$P_m = C_{m-1}^{r-1} p^r q^{m-r}$	$\frac{r}{p}$	$\frac{qr}{p^2}$

распределений: при  $\varphi(z) = C$  — обычное нормальное распределение; при  $\varphi(z) = z$  — логарифмически нормальное и др.

Модель Эрланга. Представим себе, что промежуток времени между наступлениями двух последовательных событий распределен по показательному закону с плотностью  $\beta e^{-\beta x}$  при  $x > 0$ . Если нас интересует распределение длительности промежутка не между соседними событиями, а через  $k$  событий, то оно, как легко подсчитать, имеет плотность распределения  $Cx^k e^{-\beta x}$  при  $x > 0$ .

Чтобы проиллюстрировать это распределение реальной задачей, связанной с теорией надежности, поставим вопрос о распределении промежутка времени между последовательными заменами блоков при следующих условиях. Каждый блок состоит из основного элемента и  $k-1$  резервных; резервные блоки включаются по одному немедленно после выхода из рабочего состояния того, который работал перед этим моментом; в резерве элементы не стареют; длительность жизни каждого элемента имеет показательное распределение.

Модель Эрланга имеет характер непределенной закономерности; мы хотели этой моделью проиллюстрировать возможность появления в реальной обстановке  $\Gamma$ -распределений.

Вид распределений и их основные характеристики даны в таблицах 1.4.1 и 1.4.2.

### § 1.5. Общие сведения о теории случайных процессов

Вводные замечания. В применениях теории вероятностей постоянно приходится иметь дело со случайными величинами, которые являются функциями одного или нескольких параметров. Эти параметры могут изменяться непрерывно, но могут принимать и только дискретные значения.

Напряжение тока на аноде электронной лампы в каждый момент времени, даже при самом строгом поддержании величины температуры окружающей среды и других управляемых параметров, подвержено случайным колебаниям. Напряжение является случайной функцией времени. Если для нескольких ламп с одинаковыми исходными характеристиками нанести на график фактическое напряжение тока анода за определенный промежуток времени, то получится пучок реализаций, различно ведущих себя во времени и отражающих случайные особенности каждой из испытываемых ламп (рис. 1.5.1).

Если исследовать, скажем, зависимость скорости изнашивания поверхности поршневого пальца от длины пробега автомобиля, то вновь обнаружится тот же характерный случайный ход износа.

Рассмотрим в качестве третьего примера функцию, равную нулю, пока определенный элемент сложного устройства (конденсатор, втулка и т. д.) находится в работоспособном состоянии, и единице,

когда этот элемент испорчен. Момент скачка представляет собой случайную величину. Мы вновь имеем дело со случайной функцией, аргументом которой могут быть общая наработка элемента, длительность пробега и т. д.

Во всех приведенных примерах мы имели дело с непрерывно меняющимся параметром — временем, длительностью пробега, наработкой. Однако нередко возникает необходимость исследовать и

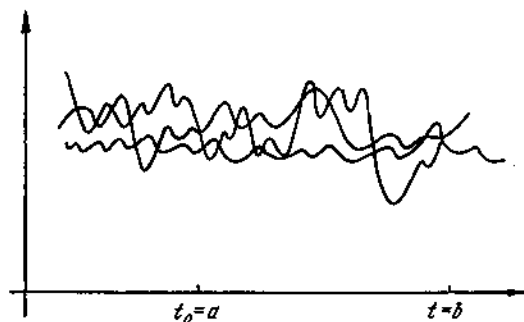


Рис. 1.5.1.

такие ситуации, когда изучается случайная функция только при дискретных значениях аргумента. Так, если в процессе испытаний замеры производятся только в определенный момент суток, то нам становится известной наша функция только в дискретные моменты времени. В дальнейшем мы встретимся с обоими указанными случаями.

Само собой разумеется, как теоретический, так и прикладной интерес представляет рассмотрение не только скалярных случайных функций, но и векторных случайных функций, когда от одного аргумента зависит несколько связанных между собой случайных величин. В теории надежности постоянно приходится иметь дело с несколькими характеристиками одного и того же изделия и исследовать изменение их взаимного влияния во времени.

Случайные функции одной независимой переменной принято называть *случайными*, или *вероятностными процессами*. Если случайная величина зависит от двух или более аргументов, то такие случайные функции принято называть *случайными полями*.

При наблюдении за случайным процессом  $\xi(t)$  мы каждый раз наблюдаем только определенную его реализацию. При различных наблюдениях одного и того же процесса получают различные его реализации. Для физических и инженерных задач обычно приходится выяснять, как велики вероятности наступления реализаций определенного характера (не превышающих заданного уровня, не

попадающих в течение заданного периода времени в определенную область и т. д.).

Рассмотрение первых задач теории случайных процессов относится к началу нашего века. В первую очередь здесь следует отметить работы А. А. Маркова, касающиеся процессов с дискретным временем, и Л. Башелье по диффузионным процессам. Оба эти исследователя строили математические модели очень важных в наше время процессов — марковских цепей и диффузионных процессов. Позднее Фоккер и Планк при построении теории диффузии получили дифференциальное уравнение, управляющее такими процессами. В основу этих результатов была положена простейшая математическая модель движения частицы. Исследования А. Н. Колмогорова, А. Я. Хинчина, Е. Е. Слуцкого, П. Леви и ряда других ученых заложили основы математической теории двух важнейших типов случайных процессов — марковских и стационарных. В настоящее время в теории надежности особую роль играют процессы марковского типа. Мы должны теперь дать этому классу процессов четкое определение и выяснить относящиеся сюда понятия.

В классической механике состояние системы может быть определено различными путями. Для примера, если системой является материальная точка, то под ее состоянием в момент  $t_0$  мы можем понимать координаты той точки пространства, которую она занимает в этот момент. Такое понимание состояния не очень удачно, поскольку для описания развития системы позднее момента  $t_0$  нам недостаточно знания того состояния, в котором она находится в момент  $t_0$ . Хорошо известно, что все влияние прошлого на движение точки по законам классической механики сосредоточено в ее скорости в данный момент. Таким образом, если под состоянием точки в момент  $t_0$  мы станем понимать координаты ее положения в пространстве и компоненты скорости, то так понимаемое состояние позволяет однозначно определять будущее развитие системы по ее состоянию в момент  $t_0$ . Этот простой пример позволит нам лучше оценить значение последующих определений.

В современной физике, технике, экономике приходится иметь дело с более сложным положением, когда знание состояния системы не только в данный момент времени, но даже за всю предыдущую историю ее развития не определяет однозначно ее будущее, а лишь меняет вероятность пребывания в том или ином множестве состояний.

Определение случайного процесса. Обозначим через  $x$  состояние системы в какой-нибудь момент времени  $t$ ; как мы говорили,  $x$  не обязательно представляет собой скалярную величину, а может быть вектором, функцией или чем-либо еще. Во многих случаях, однако, приходится рассматривать случай, когда  $x$  является числом или вектором. Пусть для определенности  $x$  — скалярная величина. Чтобы задать случайный процесс  $\xi(t)$ , обычно



идут по следующему пути. Для каждого натурального значения  $n$  и любых возможных значений  $t_1, t_2, \dots, t_n$  параметра  $t$  задают  $n$ -мерную функцию распределения вектора  $\xi(t_1), \xi(t_2), \dots, \xi(t_n)$

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = \\ = P\{\xi(t_1) < x_1, \xi(t_2) < x_2, \dots, \xi(t_n) < x_n\}.$$

При этом на функции  $F(x_1, \dots, x_n; t_1, \dots, t_n)$  накладывают два условия:

а) *условие симметрии*: для любой перестановки  $i_1, i_2, \dots, i_n$  чисел  $1, 2, \dots, n$  выполняется равенство

$$F(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}; t_{i_1}, t_{i_2}, \dots, t_{i_n}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n);$$

б) *условие согласованности*: при  $m < n$  и любых  $t_{m+1}, t_{m+2}, \dots, t_n$  имеет место равенство

$$F(x_1, x_2, \dots, x_m, +\infty, \dots, +\infty; t_1, t_2, \dots, t_m, t_{m+1}, \dots, t_n) = \\ = F(x_1, \dots, x_m; t_1, \dots, t_m).$$

Мы не станем здесь развивать общую теорию случайных процессов, а ограничимся лишь определением марковских случайных процессов. Обозначим через  $P\{s, x; t, \mathcal{G}\}$  вероятность того, что система, находясь в момент  $s$  в состоянии  $x$ , в момент  $t > s$  окажется в одном из состояний множества  $\mathcal{G}$ . Если дополнительное знание состояний системы в моменты  $\tau < s$  не изменяет этой вероятности при любых  $s, x, t, \mathcal{G}$ , то такой класс процессов естественно назвать *процессами без последействия*. В связи с тем, что важный частный класс процессов без последействия был введен в рассмотрение А. А. Марковым, процессы без последействия называются также *процессами Маркова*.

Марковость процесса в значительной степени зависит от того, какой смысл вкладывается в понятие состояния системы. Положение здесь совершенно аналогично тому, что мы уже видели на примере классической механики: если под состоянием движущейся точки понимать только ее положение в пространстве, то ее будущее состояние зависит и от прошлого; добавление к положению в пространстве скорости в данный момент делает наш процесс процессом без последействия. Таким образом, если угодно, марковскими являются все процессы, с которыми встречаются в классической механике.

При соответствующем понимании состояния системы любой случайный процесс может быть превращен в марковский: для этого достаточно в понятие состояния включить всю предысторию развития системы.

**Цепи Маркова.** Если аргумент  $t$  принимает только дискретные значения  $t_s, s = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$ , и процесс  $\xi(t)$  при

этом является марковским, то обычно его называют *цепью Маркова*. Часто приходится на практике сталкиваться с необходимостью изучения цепей Маркова, для которых множество состояний конечно или счетно. В этом случае цепи Маркова принято описывать посредством так называемых *переходных вероятностей*. Пусть в момент  $t_s$  система находится в состоянии  $\mathcal{E}_i$ ; вероятность  $p_{ij}(s) = P\{\mathcal{E}_i, t_s; \mathcal{E}_j, t_{s+1}\}$  носит название переходной вероятности. Если эта вероятность не зависит от момента  $t_s$ , то цепь Маркова называется *однородной*. Марковская цепь, для которой существуют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\mathcal{E}_i, t_s; \mathcal{E}_j, t_{s+1}\} = p_j,$$

называется *эргодической*. Свойство эргодичности можно трактовать таким образом: за длительный промежуток времени или, точнее, за большое число моментов  $t_r$ , когда система может изменять свои состояния, вероятность того, что система находится в заданном состоянии, почти перестает зависеть от исходного состояния. Одна из простейших и самых ранних эргодических теорем была доказана еще создателем теории цепей А. А. Марковым: *если марковская цепь однородна, имеет лишь конечное число состояний и при любых  $i$  и  $j$  вероятности  $p_{ij}$  положительны, то цепь эргодична*.

В приложениях, в том числе и в теории надежности, нередко приходится иметь дело со случаем, когда необходимо рассматривать случайный процесс  $\xi(t)$ , вообще говоря немарковский, для которого удается обнаружить такую последовательность моментов, что величины  $\xi(t_i)$  образуют последовательность случайных величин, связанных в цепь Маркова. Такие марковские цепи называются *вложенными цепями*.

Простейший поток. Большое значение имеют процессы, для которых состояние изменяется в случайные моменты времени. Для примера, пусть в случайные моменты времени наступает некоторое событие (телефонный вызов, поломка устройства, распад атома). Нас интересует число появлений этого события за промежуток времени от 0 до  $t$ . Обозначим это число через  $\xi(t)$ . Ясно, что  $\xi(t)$  в моменты, когда изменяется его величина, может только возрастать, и притом лишь на целочисленные значения.

Особую роль играют такого рода процессы, для которых выполнены следующие три условия: стационарность, отсутствие последовательности, ординарность. Процессы  $\xi(t)$ , удовлетворяющие трем перечисленным условиям, по предложению А. Я. Хинчина называются *простейшими потоками*. Они носят также наименование *однородных процессов Пуассона*.

В перечисленные условия вкладывается следующий смысл.

*Стационарность* означает, что для любой группы из конечного числа непересекающихся промежутков времени вероятность наступления определенного числа событий на протяжении каждого из них зависит от этих чисел и от длительности промежутков времени, но не изменяется от сдвига всех временных отрезков на одну и ту же величину. В частности, вероятность появления  $k$  событий в течение промежутка времени от  $T$  до  $T+t$  не зависит от  $T$  и является функцией только  $k$  и  $t$ .

*Отсутствие последействия* означает, что вероятность наступления  $k$  событий в течение промежутка времени  $(T, T+t)$  не зависит от того, сколько раз и как появлялись события ранее. Это предположение означает, что условная вероятность появления  $k$  событий за промежуток  $(T, T+t)$  при любом предположении о наступлении событий до момента  $T$  совпадает с безусловной вероятностью. Отсутствие последействия означает взаимную независимость появления того или иного числа событий в непересекающиеся промежутки времени.

*Ординарность* выражает собой требование практической невозможности появления двух или нескольких событий за малый промежуток времени  $h$ . Точнее, это означает следующее: обозначим через  $P_{>1}(h)$  вероятность появления более чем одного события за промежуток времени  $h$ . Тогда условие ординарности состоит в следующем:

$$P_{>1}(h) = o(h).$$

Доказано, что если события в простейшем потоке могут появиться с положительной вероятностью в отрезке времени длительности единица и вероятность появления бесконечного числа событий за этот промежуток времени равна нулю, то существует такая положительная постоянная  $\lambda$ , что имеют место формулы

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где через  $P_k(t)$  обозначена вероятность появления ровно  $k$  событий потока за время  $t$ .

Вероятность  $P_0(t)$  можно интерпретировать как *вероятность того, что длительность промежутка времени между двумя последовательными появлениями событий окажется большей  $t$* . Эта трактовка нам очень важна для будущего.

Требования, которым удовлетворяет простейший поток, с большой точностью выполняются в многочисленных естественнонаучных и технических процессах. Для примера, укажем на число спонтанно распавшихся атомов радиоактивного вещества, на число космических частиц, попавших на определенную площадку за промежу-

ток времени  $t$ . Если речь идет о сложной радиотехнической системе, состоящей из большого числа элементов, каждый из которых с малой вероятностью может отказаться в работе независимо от состояний других элементов, то число элементов, отказавших за рабочий промежуток времени длительности  $t$ , представляет собой случайный процесс. Во многих случаях этот процесс оказывается близким к пуассоновскому.

Простейший поток обладает рядом замечательных свойств. Мы укажем два из них.

Если известно, что в промежутке времени данной длительности наступили  $n$  событий потока, то оказывается, что при этом условии моменты появления всех этих событий независимы между собой и равномерно распределены в этом промежутке.

Пусть имеются два независимых между собой простейших потока  $\xi_1(t)$  и  $\xi_2(t)$  с интенсивностями  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Поток  $\xi(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t)$  является также простейшим потоком с интенсивностью  $\lambda_1 + \lambda_2$ .

Проверка условий стационарности, отсутствия последействия и ординарности для установления пуассоновости интересующего нас случайного процесса зачастую бывает очень сложна. В то же время у интересующего нас процесса могут быть некоторые особенности, которые значительно облегчат эту проверку. Среди ряда общих предложений, которые в настоящее время известны в этом направлении, для нас особое значение имеет предложение, формулировка и доказательство которого в первую очередь является заслугой А. Я. Хинчина. Мы сформулируем несколько более общий результат, полученный позднее Б. И. Григелионисом. Для его формулировки нам необходимо ввести некоторые понятия и обозначения.

Назовем случайный процесс  $\xi(t)$  *ступенчатым*, если приращения  $\xi(t) - \xi(s)$  при  $t > s$  могут принимать только неотрицательные целочисленные значения. Всякий однородный пуассоновский процесс является ступенчатым. Однако пуассоновскими процессами, стационарно ведущими себя во времени, класс ступенчатых процессов не исчерпывается. Мы отметим сейчас только два типа процессов такого типа, с которыми мы будем иметь дело позднее.

Процессы восстановления. Предположим, что промежутки между последовательными появлениями событий потока представляют собой независимые одинаково распределенные случайные величины  $z_1, z_2, \dots$  с функцией распределения  $F(x)$ . Процесс  $\xi(t)$ , равный числу появлений событий за промежуток времени от 0 до  $t$ , представляет собой *процесс восстановления*. В частности, если  $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ , где  $\lambda > 0$  — постоянная, то процесс восстановления является однородным пуассоновским процессом.

Если обозначить через  $N_t$  наибольшее целое число такое, что  $\sum_{i=1}^{N_t} z_i < t$ , то имеет место так называемое тождество Вальда

$$M \sum_{i=1}^{N_t+1} z_i = M z_1 (M N_t + 1).$$

Неоднородный пуассоновский процесс. Мы скажем, что процесс  $\xi(t)$  является *неоднородным пуассоновским процессом* с ведущей функцией  $\Lambda(t)$ , если при произвольных  $t > s$  и неотрицательных целых  $k$  имеют место равенства

$$P \{ \xi(t) - \xi(s) = k \} = \frac{[\Lambda(t) - \Lambda(s)]^k}{k!} e^{-[\Lambda(t) - \Lambda(s)]},$$

где  $\Lambda(t)$  — неубывающая непрерывная слева функция,  $\Lambda(t) = 0$  при  $t \leq 0$  и приращения  $\xi(t) - \xi(s)$  независимы для непересекающихся интервалов  $(s, t)$ .

При  $\Lambda(t) = \lambda t$  мы получаем в качестве частного случая однородный пуассоновский процесс (простейший поток).

Предельная теорема. Пусть  $\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}(t)$ , где  $\xi_{nk}(t)$  — независимые ступенчатые процессы. С такого типа процессами  $\xi_n(t)$  приходится на практике встречаться очень часто. Для примера, поток судов, прибывающих в данный порт, представляет собой сумму потоков судов, отправляющихся из портов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  в данный порт. Обозначим через  $\xi_n(t)$  поток поломок некоторой детали. Если в механизме имеется  $k_n$  деталей и они выходят из строя независимо одна от другой, то  $\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}(t)$  представляет собой поток поломок этого механизма. Для простоты мы считали, что замена поломанной детали на новую не требует времени и совершается мгновенно.

Введем обозначения:

$$p_{nr}(k; t, s) = P \{ \xi_{nr}(t) - \xi_{nr}(s) = k \}, \quad s < t, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\Lambda_n(t, s) = \sum_{k=1}^{k_n} p_{nr}(1; t, s),$$

$$B_n(t, s) = \sum_{r=1}^{k_n} [1 - p_{nr}(0; t, s) - p_{nr}(1; t, s)].$$

Мы скажем, что процессы  $\xi_{nr}(t)$  *бесконечно малы*, если при любом фиксированном  $t$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{1 \leq r \leq k_n} (1 - p_{nr}(0; t, 0)) = 0.$$

Про последовательность процессов  $\xi_n(t)$  говорят, что она при  $n \rightarrow \infty$  *сходится* к процессу  $\xi(t)$ , если любые конечномерные распределения процессов  $\xi_n(t)$  сходятся к соответствующим распределениям процесса  $\xi(t)$ .

Теорема Б. И. Григелиониса. *Для сходимости сумм независимых бесконечно малых ступенчатых процессов  $\xi_n(t) = \sum_{k=1}^{k_n} \xi_{nk}(t)$  к процессу Пуассона с ведущей функцией  $\Lambda(t)$  необходимо и достаточно, чтобы при любых фиксированных  $s$  и  $t$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n(t, s) = \Lambda(t) - \Lambda(s)$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} B_n(t, 0) = 0.$$

При  $\Lambda(t) = \lambda t$  мы получаем условия сходимости сумм независимых бесконечно малых ступенчатых процессов к однородному пуассоновскому процессу (простейшему потоку).

Если мы хотим уяснить качественный смысл только что сформулированной теоремы, то он очень прост. Условие бесконечной малости слагаемых процессов означает, что для каждого из них вероятность наступления хотя бы одного события (скачка) за промежуток времени длительности  $t$  мала, сумма вероятностей в точности одного скачка является конечной величиной  $\Lambda(t)$ ; сумма же вероятностей более чем одного скачка бесконечно мала.

Таким образом, если механизм состоит из большого числа деталей, каждая из которых может поломаться лишь с малой вероятностью и эти поломки для разных деталей независимы между собой, то суммарный поток поломок может считаться близким к пуассоновскому.

## § 1.6. Элементы математической статистики

О задачах статистики. До сих пор мы говорили об основных характеристиках случайных явлений как о чем-то данном заранее, что нам известно с самого начала. На самом деле с таким положением дел встречаются крайне редко, и все необходимые характеристики случайного события, случайной величины или случайного процесса нужно оценивать из специально поставленного эксперимента или же из систематически проводимых наблюдений за течением явления. Как оценить неизвестную вероятность случайного события на основании наблюдений? Как оценить неизвестную функцию распределения случайной величины по наблюдаемым из опыта ее значениям? Как оценить параметры нормального распределения  $\alpha$  и  $\sigma^2$ , если мы наблюдаем нормально распределенную

случайную величину, параметры которой неизвестны? Как определить характеристики случайного процесса, который мы наблюдаем?

Перечисленные задачи очень важны для практики, в частности для теории надежности, они составляют значительный объект исследования математической статистики. Однако к ним не сводятся все ее вопросы. Наряду с поставленными, на практике постоянно возникают вопросы другого рода: из тех или иных общих соображений выдвинуты некоторые общие гипотезы — случайное событие обладает в данных условиях определенной вероятностью; две случайные величины имеют одинаковые распределения; данный случайный процесс является пуассоновским с неизменной интенсивностью и т. д. Как проверить правильность выдвинутых гипотез? Отметим еще одну постановку задачи, в полную силу проявившуюся лишь в последние годы. Наблюдается некоторый случайный процесс, на который в случайный момент может подействовать некоторая причина, изменяющая его течение (например, его параметры). Требуется по наблюдениям за течением процесса уловить возможно точнее момент воздействия этой причины. С такой постановкой задачи встречаются при контроле наладки станка и во многих иных практически важных ситуациях.

Возникающие в статистике задачи можно грубо подразделить на несколько типов, важнейшие из которых таковы:

- а) оценка неизвестных параметров,
- б) проверка статистических гипотез,
- в) принятие решений.

Последняя из сформулированных задач относится к третьему типу; подавляющее большинство задач, указанных в первом абзаце, принадлежит к типу а), а задачи второго абзаца относятся к типу б).

Мы коснемся в настоящем параграфе только задач типов а) и б).

Исходным пунктом статистического исследования какой-либо случайной величины  $\xi$  является совокупность  $n$  наблюдений над ней, в которых она принимает значения  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Впоследствии мы будем предполагать испытания взаимно независимыми и проведенными в неизменных условиях. Эти предположения, конечно, идеализируют обстановку, поскольку со временем условия несколько изменяются. Для примера, если мы исследуем размеры одним и тем же измерительным инструментом, то в силу износа он не дает для всех измерений одной и той же точности. Однако этот износ настолько незначителен, что его можно не принимать в расчет.

Вариационный ряд, эмпирическая функция распределения, теорема Гливенко. Если последовательность результатов независимых наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  над случайной величиной  $\xi$  с функцией распределения  $F(x)$  расположить в порядке возрастания  $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$ , то получается так

называемый *вариационный ряд*. В некоторых случаях в результате наблюдений мы сразу получаем вариационный ряд. Для примера, пусть мы на испытательном стенде испытываем образцы на длительность их жизни при определенной нагрузке. Будем отмечать буквами  $t_1, t_2, \dots, t_n$  последовательные моменты гибели образцов. Образец, погибший в момент  $t_1$ , имел самую короткую жизнь; больше всех жил образец, погибший в момент  $t_n$ . Очевидно, что последовательность чисел  $t_1, t_2, \dots, t_n$  является вариационным рядом для наблюдений над случайной величиной — длительностью жизни образца.

Эмпирической функцией распределения  $F_n(x)$  назовем функцию, определенную равенствами

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq x_1^*, \\ \frac{k}{n} & \text{при } x_k < x \leq x_{k+1}^*, \\ 1 & \text{при } x > x_n^*. \end{cases}$$

Таким образом, эмпирическая функция при каждом значении  $x$  равна числу значений случайной величины, меньших  $x$ , деленному на общее число наблюдений.

В 1933 г. была доказана важная теорема математической статистики о соответствии между эмпирической и истинной функциями распределения случайной величины.

Теорема В. И. Гливенко. При  $n \rightarrow \infty$  имеет место соотношение

$$P \left\{ \limsup_x |F(x) - F_n(x)| = 0 \right\} = 1.$$

Точечные оценки параметров. Зачастую приходится иметь дело с такой ситуацией, когда нам необходимо на основании испытаний оценить значение одного или нескольких неизвестных параметров. С этой задачей сталкиваются как при нахождении функции распределения, когда известен ее аналитический вид, так и при оценке числовых характеристик случайной величины. Одним из наиболее распространенных подходов к оценке параметра является следующий подход. Пусть  $F(x, \theta)$  является функцией распределения случайной величины  $\xi$ ,  $\theta$  — неизвестный параметр ( $\theta$  может быть векторной величиной). Обозначим через  $x_1, x_2, \dots, x_n$  результаты независимых испытаний величины  $\xi$ . Точечной оценкой параметра  $\theta$  мы будем называть некоторую функцию  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , зависящую только от результатов испытаний и известных величин, но не от неизвестного параметра. Понятно, что оценка сама является некоторой случайной величиной и поэтому может изменяться от одной серии испытаний к другой.



В качестве оценки параметра  $\theta$  можно предложить большое число функций  $\varphi$ , поэтому, чтобы избежать полного произвола, необходимо наложить на них некоторые естественные условия. Обычно стремятся, чтобы оценки обладали свойствами несмещенности, состоятельности и эффективности.

Оценка  $\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  параметра  $\theta$  называется *несмещенной*, если для нее выполнено равенство

$$M\varphi = \theta,$$

т. е. математическое ожидание оценки совпадает с оцениваемым параметром.

Если нам нужно оценить математическое ожидание случайной величины  $\xi$  ( $a = M\xi$ ), то в качестве оценки можно выбрать функцию

$$\varphi = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Легко подсчитать, что эта оценка является несмещенной. Если функция распределения  $F(x)$  симметрична, т. е. если при любых  $x$  выполнено равенство  $F(x) = 1 - F(2a - x)$ , то величина  $a$  может быть оценена и функцией  $m$  — эмпирической медианой, т. е. величиной, левее и правее которой находится одинаковое число наблюдений. Легко доказать, что эта оценка также является несмещенной.

При оценке параметра  $\sigma^2 = D\xi$  посредством эмпирической дисперсии

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$$

получается смещение  $Ms^2 - \sigma^2 = \frac{1}{n} \sigma^2$ .

Если мы хотим получить несмещенную оценку  $\sigma^2$ , то следует брать функцию

$$s_1^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2.$$

Оценка  $\varphi = \varphi(x_1, x_2, \dots, x_n)$  параметра  $\theta$  называется *состоятельной*, если при увеличении числа наблюдений до бесконечности оценка сходится к оцениваемому параметру по вероятности, т. е. если при любом  $\varepsilon > 0$  имеет место соотношение

$$P\{|\varphi - \theta| > \varepsilon\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Легко проверить, что все приведенные нами выше примеры оценок параметров  $a$  и  $\sigma^2$  являются состоятельными. Для парамет-

ра  $\sigma^2$ , например, состоятельными являются как оценка  $s^2$ , так и оценка  $s_1^2$ .

Предположим, что для параметра  $\theta$  предложены две оценки:  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ . Мы скажем, что оценка  $\varphi_1$  эффективнее, чем оценка  $\varphi_2$ , если

$$M(\varphi_1 - \theta)^2 < M(\varphi_2 - \theta)^2.$$

При некоторых общих ограничениях, наложенных на аналитические свойства оценок  $\varphi$ , можно указать нижнюю грань для всех оценок рассматриваемого класса:

$$\inf_{\varphi} M(\varphi - \theta)^2.$$

Если оценка  $\hat{\varphi} = \hat{\varphi}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  такова, что

$$M(\hat{\varphi} - \theta)^2 = \inf_{\varphi} M(\varphi - \theta)^2,$$

то оценка  $\hat{\varphi}$  называется *эффективной*.

Оценка

$$\hat{\varphi} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

для параметра  $\alpha$  распределения

$$F(x, \alpha) = 1 - e^{-\frac{x}{\alpha}} \quad (x \geq 0)$$

эффективна.

Метод наибольшего правдоподобия. Очевидно, что одной из основных задач теории оценок параметров следует считать построение общих методов нахождения хороших оценок. Один из наиболее распространенных и сильных методов был предложен английским статистиком Р. Фишером в 1912 г. В частных случаях этот метод использовался еще Гауссом. Мы рассмотрим этот метод в предположении, что случайная величина  $\xi$  имеет плотность распределения  $f(x, \alpha)$ .

Функция

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \prod_{k=1}^n f(x_k, \alpha)$$

в только что указанном случае называется функцией правдоподобия. Если случайная величина дискретна и принимает значения  $x_1, x_2, \dots$  соответственно с вероятностями  $p_1(\alpha), p_2(\alpha), \dots, \sum_k p_k(\alpha) = 1$ , то функция правдоподобия берется в ином виде, а именно:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \alpha) = \prod_{i=1}^n p_{k_i}(\alpha),$$

где индексы у вероятностей показывают, что наблюдались значения  $z_{k_1}, z_{k_2}, \dots, z_{k_n}$ .

Метод максимума правдоподобия состоит в том, что в качестве оценок параметра  $\alpha$  принимается то значение  $\alpha$ , при котором функция  $L$  достигает своего максимума. Поскольку  $L$  и  $\ln L$  достигают экстремума при одном и том же значении  $\alpha$ , то эти критические значения  $\alpha$  определяются из уравнения правдоподобия

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = 0.$$

Каждое решение уравнения правдоподобия носит название *оценки максимального правдоподобия*.

Легко проверить, что для распределений биномиального  $p_k(\alpha) = C_n^k \alpha^k (1-\alpha)^{n-k}$  ( $0 \leq k \leq n$ ), Пуассона  $p_k(\alpha) = \frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}$ , нормального

$f(x; \alpha, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}$ , показательного  $f(x, \alpha) = \alpha e^{-\alpha x}$  ( $x > 0$ )

оценки максимального правдоподобия оказываются единственными и даются формулами

$$\hat{\alpha} = \frac{m}{n} \quad (m — \text{число появлений события}),$$

$$\hat{\alpha} = \bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n},$$

$$\hat{\alpha} = \bar{x}, \quad \hat{\sigma}^2 = s^2, \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{x}.$$

Значение метода наибольшего правдоподобия выясняется следующими двумя предложениями:

*Если для параметра  $\alpha$  существует эффективная оценка  $\hat{\alpha}$ , то уравнение правдоподобия имеет единственное решение  $\hat{\alpha}$ .*

*При некоторых общих условиях аналитического характера (см. [9]), наложенных на функции  $f(x; \alpha)$ , решение уравнения правдоподобия сходится при  $n \rightarrow \infty$  к истинному значению параметра  $\alpha$ . Это решение распределено асимптотически нормально и асимптотически эффективно.*

Введем еще понятие *достаточной оценки*, играющее важную роль в статистике. Функция правдоподобия является не чем иным, как совместной плотностью распределения вектора  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Предположим, что имеется такая оценка  $\hat{\theta}$  параметра  $\theta$ , что условное распределение вектора  $x_1, x_2, \dots, x_n$  при известном значении  $\hat{\theta}$  не зависит от параметра  $\theta$ . Такое свойство оценки означает, что она как бы содержит всю информацию о параметре  $\theta$ , которая содержится в результатах наблюдений. Оценки, обладающие этим свойством, называются *достаточными*.

Оценка  $\bar{\theta}$  является достаточной тогда и только тогда, когда функция правдоподобия представима в виде двух множителей, один из которых зависит лишь от  $\bar{\theta}$  и  $\theta$ , а второй — только от результатов наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Иногда это свойство достаточных оценок называют *критерием факторизации*.

*Если статистика  $\bar{\theta}$  является достаточной, то для любой функции  $f(x)$ , задающей взаимно однозначное отображение, статистика  $f(\bar{\theta})$  также является достаточной.*

Заметим, что каждая эффективная оценка является одновременно и достаточной.

Если для параметра  $\theta$  существует достаточная оценка  $\bar{\theta}$ , то каждое решение уравнения правдоподобия является функцией от  $\bar{\theta}$ .

Для параметров нормального распределения  $\mu$  и  $\sigma$  достаточными статистиками будут

$\bar{x}$  в случае, когда параметр  $\sigma$  известен, а параметр  $\mu$  неизвестен;  
 $\sum_{k=1}^n (\bar{x}_k - \mu)^2$  в случае, когда параметр  $\mu$  известен, а параметр  $\sigma$  неизвестен и

пара  $\bar{x}, \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ , когда оба параметра неизвестны.

**Метод моментов.** Самым первым общим методом точечной оценки неизвестных параметров следует считать так называемый *метод моментов*, который был предложен К. Пирсоном. Этот метод до сих пор широко используется в практической статистике, поскольку нередко он приводит к сравнительно несложной вычислительной процедуре, тогда как метод наибольшего правдоподобия упирается как раз в вычислительные трудности.

Идея этого метода состоит в том, что моменты распределения, зависящие от неизвестных нам параметров, приравниваются эмпирическим моментам. Взяв число моментов, равное числу неизвестных параметров, и составив соответствующие уравнения, мы получим необходимое число уравнений.

*Эмпирическим моментом  $k$ -го порядка при этом мы называем величину*

$$\hat{v}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k dF_n(x);$$

*центральный эмпирическим (или выборочным) моментом того же порядка — величину*

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^k.$$

Приведем для примера оценку параметров  $\alpha$  и  $\beta$  так называемого Г-распределения Пирсона

$$f(x; \alpha, \beta) = Cx^{\alpha-1} e^{-\beta x} \quad (x \geq 0).$$

Легко подсчитать, что

$$v_1 = \frac{\alpha}{\beta}, \quad v_2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}.$$

Отсюда уравнениями для определения  $\alpha$  и  $\beta$  будут

$$\frac{\alpha+1}{\beta} = \bar{x}, \quad \frac{(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^2} = \hat{v}_2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j^2,$$

откуда

$$\beta = \frac{\bar{x}}{s^2}, \quad \alpha = \frac{\bar{x}^2}{s^2} - 1 \quad (s^2 = \hat{v}_2 - \bar{x}^2).$$

Оценки, получаемые с помощью метода моментов, не являются наилучшими с точки зрения их эффективности. Однако очень часто они используются в качестве первых приближений, отправляясь от которых удается находить последующие приближения с большей эффективностью.

Можно доказать (см., например, [9], стр. 384), что совместное распределение двух центральных эмпирических моментов  $\hat{\mu}_i$  и  $\hat{\mu}_j$  асимптотически нормально (при условии существования у исходного распределения конечных моментов достаточно высоких порядков) с математическими ожиданиями  $\mu_i$  и  $\mu_j$  и матрицей ковариации, определяемой равенством

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\hat{\mu}_i - \mu_i)(\hat{\mu}_j - \mu_j) &= \\ &= \frac{\mu_{i+j} - i\mu_{i-1}\mu_{j+1} - j\mu_{i+1}\mu_{j-1} - \mu_i\mu_j + ij\mu_{i-1}\mu_j}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Нередко нужно получать хотя бы приближенные значения математического ожидания, дисперсии и других моментов для некоторой функции от выборочных моментов. Мы ограничимся простейшим примером функции от одного аргумента  $\hat{\mu}_i$ :  $f = f(\hat{\mu}_i)$ . Если эта функция непрерывна и имеет непрерывные первые производные, то

$$f(\hat{\mu}_i) = f(\mu_i) + (\hat{\mu}_i - \mu_i)f'(\mu_i) + \dots$$

и

$$\mathbf{M}f(\hat{\mu}_i) = f(\mu_i) + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{D}f(\hat{\mu}_i) = \mathbf{D}\hat{\mu}_i [f'(\mu_i)]^2 + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

В частности, если  $f = \sqrt{\hat{\mu}_2}$ , то

$$\mathbf{M}\sqrt{\hat{\mu}_2} = \sqrt{\mu_2} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \mathbf{D}\sqrt{\hat{\mu}_2} = \frac{\mu_4 - \mu_2^2}{4n\mu_2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Если случайная величина  $\xi_n$  нормально распределена и для нее  $M\xi_n = a$ ,  $D\xi_n = \sigma_n^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для достаточно гладкой функции  $f(x)$  можно написать равенство

$$f(\xi_n) = f(a) + f'(a)(\xi_n - a) + o(\xi_n - a).$$

Величина  $\xi_n$  асимптотически нормально распределена с математическим ожиданием  $f(a)$  и дисперсией  $[f'(a)]^2 \sigma_n^2$ .

**Метод квантилей.** Таким же чисто эмпирическим приемом, как и метод моментов, является *метод квантилей*. Он состоит в том, что квантиль теоретического распределения приравнивается к эмпирической квантили. Если же оценке подлежат несколько параметров, то соответствующие равенства пишутся для нескольких квантилей.

Мы отметим одно свойство эмпирических квантилей.

Рассмотрим одномерное распределение  $F(x)$  с плотностью вероятности  $f(x) = F'(x)$ . Пусть  $\xi = \xi_p$  обозначает квантиль порядка  $p$ , т. е. единственный корень уравнения  $F(\xi) = p$ , где  $0 < p < 1$ . Предположим, что в некоторой окрестности точки  $x = \xi_p$  функция  $f(x)$  непрерывна, имеет непрерывную производную и отлична от 0. Тогда выборочная квантиль порядка  $p$ , т. е. величина  $z_p$ , для которой  $F_n(z_p) = p$ , асимптотически нормальна с математическим ожиданием  $\xi_p$  и дисперсией  $\frac{pq}{nf^2(\xi_p)}$ .

В частности, медиана выборки асимптотически нормальна с математическим ожиданием, равным теоретической медиане, и дисперсией  $\frac{1}{4nf^2(\xi_p)}$ .

Для нормального распределения с параметрами  $a$  и  $\sigma$  медианой является параметр  $a$ . Выборочная медиана из нормального распределения асимптотически нормально распределена с математическим ожиданием  $a$  и дисперсией  $\frac{\pi\sigma^2}{2n}$ .

Отсюда мы выводим полезное следствие. Если параметр  $a$  нормального распределения оценивается посредством двух функций  $a_1 = \bar{x}$  и  $a_2 = m$ , то дисперсия первой оценки равна  $\frac{\sigma^2}{n}$ , а дисперсия второй асимптотически будет  $\frac{\pi\sigma^2}{2n}$ . Таким образом, асимптотически  $M(a_1 - a)^2 / M(a_2 - a)^2 = \frac{2}{\pi}$ , вторая оценка хуже первой примерно в 1,6 раза, если сравнивать их по величине дисперсии.

Предположим, что распределение  $F(x)$  имеет дифференцируемую плотность  $f(x)$ ,  $0 < p_1 < p_2 < \dots < p_k < 1$  числа  $x_i$  определены равенствами  $f(x_i) = p_i$  и  $f_i = f(x_i) \neq 0$  при  $i = 1, 2, \dots, k$ . Совместное

распределение эмпирических квантилей  $z_{p_1}, z_{p_2}, \dots, z_{p_k}$  асимптотически нормально со средними  $\xi_{p_1}, \xi_{p_2}, \dots, \xi_{p_k}$  и ковариационной матрицей

$$\left\| \frac{p_i(1-p_j)}{f_i f_j} \right\| = \begin{vmatrix} \frac{p_1(1-p_1)}{f_1^2} & \frac{p_1(1-p_2)}{f_1 f_2} & \dots & \frac{p_1(1-p_k)}{f_1 f_k} \\ \frac{p_1(1-p_2)}{f_1 f_2} & \frac{p_2(1-p_2)}{f_2^2} & \dots & \frac{p_2(1-p_k)}{f_2 f_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{p_1(1-p_k)}{f_1 f_k} & \frac{p_2(1-p_k)}{f_2 f_k} & \dots & \frac{p_k(1-p_k)}{f_k^2} \end{vmatrix}.$$

Метод доверительных интервалов. Точечные оценки, которыми мы до сих пор занимались, являются случайными величинами. Мы нигде не давали оценки вероятности уклонения полученной оценки параметра от его истинного значения, поскольку это требует дополнительных рассуждений. С других позиций к той же проблеме оценок предложил подходить Р. Фишер. А именно, вместо поиска функции  $\theta(x_1, x_2, \dots, x_n)$  от результатов испытаний, которые принимаются за приближенное значение неизвестного параметра, он предложил указывать две функции  $\theta_1$  и  $\theta_2$  от результатов испытаний (но не от оцениваемого параметра), для которых вероятность покрытия неизвестного параметра отрезком  $(\theta_1, \theta_2)$  равна заданной величине. Функции  $\theta_1$  и  $\theta_2$  называются *доверительными границами*, а  $(\theta_1, \theta_2)$  — *доверительным интервалом* для параметра  $\theta$ .

Если оценивается параметр  $a$  нормального распределения при известном значении параметра  $\sigma$ , то вероятность оценки

$$\bar{x} + \frac{z_1 \sigma}{\sqrt{n}} \leq a < \bar{x} + \frac{z_2 \sigma}{\sqrt{n}}$$

равна

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{z_1}^{z_2} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для распределения

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{a}} \quad (x > 0)$$

в качестве доверительных границ можно выбрать функции

$$\alpha_1 = \frac{\bar{x}}{z_2} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{\bar{x}}{z_1} \quad (z_1 < z_2).$$

Для этих границ имеет место равенство

$$P \left\{ \frac{\bar{x}}{z_2} \leq \alpha < \frac{\bar{x}}{z_1} \right\} = \int_{z_1}^{z_2} x^{n-1} e^{-x} dx = \omega.$$

Величина  $\beta = 1 - \omega$  называется *доверительным уровнем* предлагаемой оценки, она указывает вероятность выхода параметра за доверительные границы, а  $\omega$  — коэффициентом доверия.

Доверительные интервалы для неизвестной вероятности. Простейшая задача, с которой сталкиваются на практике, состоит в оценке неизвестной вероятности  $p$  события по наблюдаемой частоте  $h = \frac{m}{n}$  его появления. Наша задача состоит в том, чтобы найти такие функции  $\underline{p} = \underline{p}(h)$  и  $\bar{p} = \bar{p}(h)$ , чтобы вероятность попадания неизвестной вероятности  $p$  в интервал  $(\underline{p}, \bar{p})$  была бы не меньше, чем  $1 - 2\beta$ . Иными словами, мы хотим указать такое правило, которое при большом числе его применений может привести к ошибочным заключениям не более чем в  $2\beta$  части всех случаев.

Английские статистики Клоппер и Э. Пирсон указали такое правило [22], которое дает гарантию того, что вероятность выхода из доверительного интервала за каждую из границ не превосходит  $\beta$ . Предложенное ими правило состоит в следующем: пусть в  $n$  независимых испытаниях с постоянной вероятностью  $p$  наступления некоторого события  $A$  оно было наблюденно  $m$  раз. Тогда в качестве верхней границы доверительного интервала следует взять единственное решение уравнения

$$\sum_{k=0}^m C_n^k \bar{p}^k (1 - \bar{p})^{n-k} = \beta,$$

а в качестве нижней доверительной границы  $\underline{p}$  — единственное решение уравнения

$$\sum_{k=m}^n C_n^k \underline{p}^k (1 - \underline{p})^{n-k} = \beta.$$

В таблице 9 приложения даны величины  $\underline{p}$  и  $\bar{p}$  для достаточно широкого диапазона значений  $n$  и  $\beta = 0,025$ .

Рассмотрим числовой пример. Пусть  $n = 20$ ,  $m = 4$ . По таблице 9 приложения находим доверительные пределы для  $p$  при  $\beta = 0,025$ :  $\underline{p} = 0,057$ ,  $\bar{p} = 0,437$ .

О проверке статистических гипотез. Для того чтобы принять или отвергнуть ту или иную статистическую гипотезу, прибегают к наблюдениям. Пусть число наблюдений равно  $n$  и их результаты даны последовательностью чисел  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Мы нуждаемся в правиле,



которое позволяло бы по результатам наблюдений принять или отвергнуть исследуемую гипотезу. Идея образования таких правил состоит в том, что пространство выборок, т. е. множество всех возможных результатов наблюдений  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , разделяется на два непересекающихся подмножества  $R_{n1}$  и  $R_{n2}$ . Проверяемая гипотеза принимается, если результат наблюдений, т. е. если выборочная точка  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  попадает в область  $R_{n1}$ , и отвергается при попадании в множество  $R_{n2}$ . Область  $R_{n2}$  носит название *критической*. Очевидно, что выбор критической области  $R_{n2}$  однозначно определяет и область  $R_{n1}$ .

Если мы принимаем партию продукции, которая разделяется на годную и бракованную, то мы заинтересованы в том, чтобы в принимаемой партии количество бракованных изделий было очень малым. Обозначим через  $p_0$  величину, лежащую между 0 и 1 и такую, что считается возможным принимать партии, в которых доля бракованных изделий не превосходит  $p_0$ , и браковать их, если доля бракованных изделий превосходит  $p_0$ . При испытании каждого отдельного изделия станем приписывать результатам испытания число 0 или 1 в зависимости от того, оказалось изделие годным или бракованным. Выборочное пространство состоит из всех групп  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  по  $n$  чисел  $x_i$ , каждое из которых может принимать лишь значения 0 и 1. Критическая область, которая обычно используется в описанной задаче, определяется неравенством  $\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) > p_0$ .

Предположим, что мы принимаем некоторые изделия, относительно которых известно, что определяющий их качество параметр распределен нормально с известной дисперсией  $\sigma^2$ . Относительно другого параметра требуется, чтобы он был равен  $a$ . Гипотеза, предполагающая, что математическое ожидание определяющего параметра равно  $a$ , должна проверяться на основании выборки  $x_1, x_2, \dots, x_n$  из  $n$  предметов. Критическая область, которая обычно используется при решении этой задачи, строится по следующему правилу: гипотеза отвергается тогда и только тогда,

$$|\bar{x} - a| \geq c\sigma,$$

где  $c$  — соответствующим образом выбранная постоянная.

Приняв или отвергнув интересующую нас гипотезу  $H$ , мы можем совершить ошибки двух типов: отклонить гипотезу  $H$ , когда она правильна; принять гипотезу  $H$ , когда она ложна. Первый тип ошибок называется *ошибкой первого рода*; второй тип ошибок — *ошибкой второго рода*. Вероятности ошибок первого и второго рода однозначно определяются выбором критической области. Для любой критической области  $R_{n2}$  мы станем обозначать через  $\alpha$  вероятность ошибки первого рода, т. е. вероятность отклонить гипотезу  $H$  при

условии, что она правильна; через  $\beta$  станем обозначать вероятность ошибки второго рода, т. е. вероятность принять гипотезу  $H$ , если она ложна. Символически принятые обозначения мы можем записать в виде равенств

$$\alpha = P \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{n_2} | H \}$$

и

$$\beta = P \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R_{n_1} | \bar{H} \}.$$

Само собой разумеется, что наша задача состоит в том, чтобы найти самую выгодную критическую область, т. е. такую область  $R_{n_2}$ , для которой величины  $\alpha$  и  $\beta$  принимают наименьшие значения. Оказывается, что при заданном объеме выборки невозможно одновременно сделать и  $\alpha$  и  $\beta$  сколь угодно малыми. Задачу приходится ставить иначе: выбрав по тем или иным соображениям  $\alpha$ , найти ту область  $R_{n_2}$ , для которой  $\beta$  принимает наименьшее возможное значение.

Каждый раз, когда приходится проверять гипотезу  $H$ , имеют дело не с одной, а по меньшей мере с двумя гипотезами:  $H$  и не  $H$ . В зависимости от того, сколько возможностей имеется в самой гипотезе  $H$  и ей противоположной, рассматривают *простые* и *сложные* гипотезы. Так, если гипотеза  $H$  состоит в том, что параметр  $a$  нормального распределения равен  $a_0$ , а ей противоположная — в том, что он равен  $a_1$  (при известном параметре  $\sigma$ ), то мы проверяем простую гипотезу. Точно так же, если проверяется гипотеза  $H$ , состоящая в том, что исследуемое распределение  $F(x)$  равномерно в отрезке  $(0, 1)$ , а ей противоположная — в том, что оно нормально с параметрами  $(0, 5; 2)$  то мы имеем дело с простой гипотезой. Если же гипотеза  $H$  состоит в том, что распределение  $F(x)$  равномерно в  $(0, 1)$ , а ей противоположная — в том, что  $F(x)$  состоит из всех возможных распределений, за исключением названного равномерного, то мы имеем дело с гипотезой сложной. Точно так же, если гипотеза  $H$  состоит в том, что изучаемая нами случайная величина распределена по закону Пуассона с каким-нибудь параметром  $\lambda$ , то это — гипотеза сложная.

Относительно простых гипотез доказана важная теорема, называемая по имени ее авторов теоремой Неймана — Э. Пирсона.

*Теорема Неймана — Пирсона. Пусть проверяется простая гипотеза  $H$ , состоящая в том, что имеет место распределение  $P_0$  с плотностью вероятностей  $p_0(x)$  против конкурирующей гипотезы «имеет место распределение  $P_1$  с плотностью вероятностей  $p_1(x)$ ». Критическая область  $R_{n_2}$  с заданной ошибкой первого рода  $\alpha$  имеет наименьшую ошибку второго рода, если она определена по правилу:  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  принадлежит  $R_{n_2}$  тогда и только тогда, когда*

$$p_1(x) > c p_0(x).$$

Константа  $c$  определяется из того условия, что ошибка первого рода равна  $\alpha$ .

Верно и обратное: если имеется критическая область с заданной ошибкой первого рода  $\alpha$  и с минимальной ошибкой второго рода, то эта критическая область определяется по только что указанному правилу. Обратное предложение неверно только в том случае, когда имеется критическая область с ошибкой первого рода, меньшей  $\alpha$ , и  $\beta = 0$ .

Заметим, что ошибку первого рода называют также *уровнем значимости* критерия проверки гипотезы. Величину  $1 - \beta$ , т. е. вероятность отвергнуть гипотезу  $H$ , когда она ошибочна, называют *мощностью критерия*.

Мы не касаемся здесь некоторых тонкостей, связанных с тем, как добиться данного уровня значимости, — об этом можно прочесть в книге [7] (стр. 95) или в книге [5] (стр. 365).

Критерий согласия  $\chi^2$ . Для проверки статистических гипотез часто используется удобный для применений критерий согласия  $\chi^2$ . Предположим, что нам нужно проверить гипотезу  $H$ , состоящую в том, что наши наблюдения образуют выборку из  $n$  значений  $x_i$  случайной величины с данным распределением  $\mathbf{P}(S)$  (вероятность попадания значения случайной величины в множество  $S$  равна  $\mathbf{P}(S)$ ). Это обозначение удобно, в частности, мы можем вести рассуждения над распределениями любого числа измерений). Разобьем все пространство значений наблюдаемой величины на непересекающиеся области  $S_1, S_2, \dots, S_r$ . Обозначим через  $p_i$  вероятности попадания в области  $S_i$  ( $p_i = \mathbf{P}(S_i)$ ), а через  $v_i$  — числа попавших в них наблюдений. Рассмотрим

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^r \frac{(v_i - np_i)^2}{np_i} = \sum_{i=1}^r \frac{v_i^2}{np_i} - n.$$

Легко подсчитать, что

$$M\chi^2 = r - 1$$

и

$$D\chi^2 = 2(r - 1) + \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^r \frac{1}{p_i} - r^2 + 2 - 2r \right).$$

Величина  $r - 1$  называется числом степеней свободы. Доказано, что при  $n \rightarrow \infty$  плотность распределения величины  $\chi^2$  сходится к распределению

$$k_{r-1}(x) = \frac{1}{2^{\frac{r-1}{2}} \Gamma\left(\frac{r-1}{2}\right)} x^{\frac{r-3}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \quad (x > 0).$$

Пусть  $n$  достаточно велико. При применении критерия  $\chi^2$  на практике поступают следующим образом: пространство выборки разбивают на непересекающиеся области так, чтобы число наблюдений, попавших в каждую из этих областей, оказалось не меньше 10. Далее, вычисляется величина  $\chi^2$ . Пусть ее значение равно  $\chi_0^2$ . Для распределения  $k_{r-1}(x)$  вычислены таблицы вероятностей  $p = P\{\chi^2 < \chi_0^2\}$ . Если  $p$  близко к 1, то вероятность неравенства  $\chi^2 > \chi_0^2$  мала, и поэтому считают, что если на практике оно обнаружено, то гипотезу  $H$  следует отбросить.

Если распределение  $P(S)$  зависит от  $s$  неизвестных параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ , которые определяются по результатам наблюдений, то для одного класса оценок имеет место простое правило Р. Фишера: *распределение  $\chi^2$  в этом случае при  $n \rightarrow \infty$  сходится к распределению  $k_{r-s-1}(x)$* . Число степеней свободы уменьшается на число оцениваемых параметров. Параметры  $\alpha_i$  оцениваются из уравнений

$$\frac{\partial \chi^2}{\partial \alpha_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s)$$

и дают, следовательно, минимум  $\chi^2$ .

Подробности, касающиеся теории критерия  $\chi^2$ , и примеры их применений можно найти в книгах [8] и [9].

### § 1.7. Преобразование Лапласа

В теории надежности мы имеем дело почти исключительно с положительными случайными величинами. Для таких величин вместо преобразования Фурье, рассматриваемого обычно в курсах теории вероятностей, удобнее пользоваться преобразованием Лапласа.

Пусть функция  $f(t)$  определена при  $t \geq 0$ , кусочно непрерывна и растет не быстрее некоторой показательной функции, т. е. существуют  $C > 0$  и  $a > 0$ , для которых

$$|f(t)| < Ce^{at}$$

при всех  $t \geq 0$ .

*Преобразованием Лапласа* для этой функции называют интеграл

$$\bar{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt \quad (1.7.1)$$

Этот интеграл сходится при  $\operatorname{Re} z > a$ . Поэтому функция  $\bar{f}(z)$  определена в комплексной полуплоскости  $\operatorname{Re} z > a$  и является в этой полуплоскости аналитической функцией.

---

<sup>1)</sup> В этом параграфе ради удобства мы будем обозначать преобразование Лапласа той же буквой, что и саму функцию, но только с волной наверху. Это обозначение не является общепринятым.

По известному преобразованию Лапласа можно восстановить и саму функцию. Справедлива следующая формула обращения:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \tilde{f}(z) e^{zt} dz, \quad (1.7.2)$$

где интеграл берется по вертикальной прямой  $\operatorname{Re} z = c$ ,  $c > a$ .

Рассмотрим некоторые свойства преобразования Лапласа.

1°. Преобразование Лапласа является *линейной операцией*, т. е. преобразование для суммы равно сумме преобразований, и если функция умножается на число, то и ее преобразование Лапласа умножается на это число

$$\int_0^{\infty} \{c_1 f(t) + c_2 g(t)\} e^{-zt} dt = c_1 \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt + c_2 \int_0^{\infty} g(t) e^{-zt} dt.$$

2°. Рассмотрим преобразование Лапласа для производной и интеграла от функции  $f(t)$ :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f'(t) e^{-zt} dt &= \int_0^{\infty} e^{-zt} df(t) = f(t) e^{-zt} \Big|_0^{\infty} + z \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt = \\ &= z\tilde{f}(z) - f(0), \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \left( \int_0^t f(x) dx \right) e^{-zt} dt &= \\ &= -\frac{e^{-zt}}{z} \int_0^t f(x) dx \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{z} \int_0^{\infty} f(t) e^{-zt} dt = \frac{1}{z} \tilde{f}(z). \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Таким образом, при дифференцировании функции  $f(t)$  ее преобразование Лапласа умножается на аргумент  $z$ . Из произведения вычитается начальное значение функции  $f(0)$ . При интегрировании функции  $f(t)$  от нуля до  $t$  преобразование Лапласа делится на  $z$ . Применяя формулу (1.7.3) несколько раз, можно получить преобразование Лапласа для  $n$ -й производной

$$\int_0^{\infty} f^{(n)}(t) e^{-zt} dt = z^n \tilde{f}(z) - z^{n-1} f(0) - \dots - f^{(n-1)}(0).$$

Это свойство преобразования Лапласа часто используется при решении линейных дифференциальных уравнений, так как, переходя от неизвестных функций к их преобразованиям Лапласа, мы получаем для последних линейные алгебраические уравнения.

3°. Теорема запаздывания. Пусть

$$f_1(t) = \begin{cases} 0, & t < \tau, \\ f(t - \tau), & t \geq \tau; \end{cases}$$

тогда

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-zt} dt &= \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-zt} dt = \\ &= e^{-z\tau} \int_0^{\infty} f(x) e^{-zx} dx = e^{-z\tau} \tilde{f}(z). \end{aligned} \quad (1.7.5)$$

Мы получили, что при сдвиге графика функции  $f(t)$  вправо на величину  $\tau$  ее преобразование Лапласа умножается на  $e^{-z\tau}$ .

4°. Теорема смещения. Пусть функция  $f(t)$  умножается на  $e^{-\lambda t}$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} f(t) e^{-\lambda t} e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(\lambda+z)t} dt = \tilde{f}(\lambda + z), \quad (1.7.6)$$

т. е. при умножении функции  $e^{-\lambda t}$  на экспоненту аргумент ее преобразования Лапласа увеличивается на  $\lambda$ .

5°. Преобразование Лапласа для свертки. Интеграл

$$\int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau = f * g$$

называется *сверткой* функций  $f(t)$  и  $g(t)$ . Найдем преобразование Лапласа для свертки:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zt} dt \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau &= \\ &= \int_0^{\infty} g(\tau) e^{-z\tau} d\tau \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) e^{-z(t - \tau)} dt = \\ &= \int_0^{\infty} \tilde{f}(z) g(\tau) e^{-z\tau} d\tau = \tilde{f} \tilde{g}. \end{aligned} \quad (1.7.7)$$

Таким образом, если две функции свертываются, то их преобразования Лапласа перемножаются. Это свойство полезно использовать, например, при решении интегральных уравнений, содержащих

интегралы типа свертки. Рассмотрим в качестве примера уравнение

$$y'(t) = \lambda y(t) - \lambda \int_0^t f(t-\tau) y(\tau) d\tau,$$

где  $f(t)$  — заданная функция.

Умножим обе части уравнения на  $e^{-zt}$  и проинтегрируем по  $t$  от нуля до бесконечности. Получим

$$z\bar{y}(z) - y(0) = \lambda\bar{y}(z) - \lambda\bar{y}(z)\bar{f}(z),$$

откуда

$$\bar{y}(z) = \frac{y(0)}{z - \lambda + \lambda\bar{f}(z)}.$$

Так как  $\bar{f}(z) \rightarrow 0$  при  $\operatorname{Re} z \rightarrow \infty$ , то знаменатель не обращается в нуль в некоторой полуплоскости  $\operatorname{Re} z > a$  и, применяя формулу обращения, мы получим

$$y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{y(0)e^{zt}}{z - \lambda + \lambda\bar{f}(z)} dz, \quad c > a;$$

эта формула позволяет изучать асимптотическое поведение решения  $y(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

6°. Часто бывают полезны предельные соотношения для функции и ее преобразования Лапласа:

а)

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z\bar{f}(z) = f(0). \quad (1.7.8)$$

б) Если существует  $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty)$ , то

$$f(\infty) = \lim_{z \rightarrow 0} z\bar{f}(z). \quad (1.7.9)$$

Можно сказать, таким образом, что поведение функции  $f(t)$  в окрестности нуля определяется поведением преобразования Лапласа в бесконечности и, наоборот, поведение функции  $f(t)$  в бесконечности определяется поведением функции  $\bar{f}(z)$  в окрестности нуля.

7°. Очень часто, например при решении линейных дифференциальных уравнений, преобразование Лапласа для искомой функции оказывается рациональной функцией. В этом случае сама функция может быть выражена в конечном виде.

Найдем предварительно преобразование Лапласа для функции  $t^n e^{-\lambda t}$

$$\int_0^{\infty} t^n e^{-\lambda t} e^{-zt} dt = \frac{1}{(\lambda + z)^{n+1}} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{n!}{(z + \lambda)^{n+1}}. \quad (1.7.10)$$

Можно показать, что это равенство верно и для комплексных значений  $\lambda$ . Пусть теперь преобразование Лапласа для функции  $f(t)$  имеет вид

$$\tilde{f}(z) = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}.$$

$P(z)$  и  $Q(z)$  — многочлены, причем степень числителя меньше степени знаменателя, так как  $\tilde{f}(z)$  обязаны стремиться к нулю с ростом  $z$ . Как известно, всякая правильная рациональная дробь может быть разложена в сумму простейших дробей:

$$R(z) = \sum_{k=1}^m \frac{A_{k1}}{z-z_k} + \frac{A_{k2}}{(z-z_k)^2} + \dots + \frac{A_{ks_k}}{(z-z_k)^{s_k}}, \quad (1.7.11)$$

где  $z_k$  — корни знаменателя, а  $s_k$  — кратности этих корней. В частном случае, когда все корни просты,

$$R(z) = \sum_{k=1}^n \frac{A_k}{z-z_k}, \quad (1.7.12)$$

причем

$$A_k = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)}.$$

Подставив в формулу обращения (1.7.2) сумму (1.7.11) и используя (1.7.10), находим

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} R(z) dz = \\ &= \sum_{k=1}^m A_{k1} e^{z_k t} + A_{k2} t e^{z_k t} + \dots + A_{ks_k} \frac{t^{s_k-1}}{(s_k-1)!} e^{z_k t} = \\ &= \sum_{k=1}^m p_k(t) e^{z_k t}, \quad (1.7.13) \end{aligned}$$

где  $p_k(t)$  — многочлены степени, на единицу меньшей кратности корня  $z_k$ .

В частности, когда все корни простые,

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} e^{z_k t}. \quad (1.7.14)$$

Заметим еще, что если некоторые корни — комплексные,

$$z_k = \alpha_k + i\beta_k,$$



то по формуле Эйлера соответствующие слагаемые в сумме (1.7.13) выразятся через тригонометрические функции

$$e^{zkt} = e^{\alpha kt} (\cos \beta_k t + i \sin \beta_k t).$$

Пусть теперь  $\xi$  — положительная случайная величина с законом распределения

$$F(t) = \mathbf{P} \{ \xi < t \}$$

и плотностью  $f(t) = F'(t)$ .

Преобразованием Лапласа для этой величины называется преобразование Лапласа для плотности  $f(t)$

$$\varphi_{\xi}(z) = \tilde{f}(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} f(t) dt.$$

Заметим, что этот интеграл есть математическое ожидание  $e^{-z\xi}$ , т. е.  $\varphi_{\xi}(z) = \mathbf{M}e^{-z\xi}$ . Функция  $\varphi_{\xi}(z)$  обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} 1. \quad \varphi_{\xi}(0) &= \int_0^{\infty} f(t) dt = 1, \\ \varphi'_{\xi}(0) &= - \int_0^{\infty} t f(t) dt = -\mathbf{M}\xi, \\ \varphi''_{\xi}(0) &= \int_0^{\infty} t^2 f(t) dt = \mathbf{M}\xi^2; \end{aligned}$$

вообще

$$\varphi^{(n)}(0) = (-1)^n \mathbf{M}\xi^n; \quad (1.7.15)$$

значит, по известному преобразованию Лапласа мы можем найти все моменты случайной величины, в том числе среднее значение и дисперсию.

2. Если величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то преобразование Лапласа для их суммы  $\zeta = \xi + \eta$  выражается так:

$$\varphi_{\zeta}(z) = \mathbf{M}e^{-z\zeta} = \mathbf{M}e^{-z\xi} e^{-z\eta} = \mathbf{M}e^{-z\xi} \mathbf{M}e^{-z\eta} = \varphi_{\xi}(z) \varphi_{\eta}(z). \quad (1.7.16)$$

Следовательно, если независимые случайные величины складываются, то их преобразования Лапласа перемножаются. Заметим, что это свойство эквивалентно свойству (1.7.7).

8°. Преобразование Лапласа для линейной функции  $\eta = a\xi + b$  равно

$$\varphi_{\eta}(z) = \mathbf{M}e^{-(az+b)z} = e^{-bz} \mathbf{M}e^{-az\xi} = e^{-bz} \varphi_{\xi}(az).$$

Обычная схема применения преобразования Лапласа в теории вероятностей такова: искомые вероятности часто удовлетворяют некоторым линейным уравнениям (дифференциальным, интегральным или смешанным). Применяя к обеим частям уравнений преобразование Лапласа, мы получаем новые уравнения, из которых находятся преобразования Лапласа для наших вероятностей. Зная эти преобразования, мы можем в некоторых случаях найти явное выражение для вероятностей. Но даже если эти вероятности не выражаются через известные функции, мы можем, зная преобразования Лапласа, получить существенную информацию об искомых вероятностях. Можно найти моменты, исследовать асимптотическое поведение вероятностей, найти для них приближенные формулы и т. п.

Вычислим в заключение преобразование Лапласа для некоторых законов распределения, которые используются в теории надежности.

1°. *Экспоненциальный закон.* Плотность  $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ ,

$$\varphi_z(z) = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-zt} dt = \frac{\lambda}{\lambda + z}.$$

2°. *Нормальный закон*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2}}.$$

Пусть  $\sigma \ll T_0$ , тогда вероятность того, что случайная величина примет отрицательное значение, мала, и мы можем считать, что наша величина положительная

$$\varphi_z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(t-T_0)^2}{2\sigma^2} - zt} dt.$$

Так как в наших предположениях плотность  $f(t)$  очень мала для отрицательных значений  $t$ , то мы можем распространить интегрирование на всю бесконечную прямую. Сделаем, кроме того, замену  $\frac{t-T_0}{\sigma} = x$ . Получим

$$\begin{aligned} \varphi_z(z) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-T_0 z} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2} - x\sigma z} dz = \\ &= e^{-T_0 z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-\sigma z)^2}{2}} dx = \\ &= e^{-T_0 z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = e^{-T_0 z + \frac{\sigma^2 z^2}{2}}. \end{aligned}$$

## 3°. Гамма-распределение

$$f(t) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}.$$

Преобразование Лапласа равно

$$\Phi_z(z) = \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t - zt} dt = \frac{\beta^\alpha}{(z + \beta)^\alpha}.$$

---

## ГЛАВА 2

### ХАРАКТЕРИСТИКИ НАДЕЖНОСТИ

#### § 2.1. Основные понятия теории надежности

Систематическое изложение ряда задач теории надежности мы начинаем с определения основных понятий, таких как *надежность*, *отказ*, *долговечность* и т. п. Терминологические вопросы не являются ведущими в надежности. Однако чтобы избежать путаницы в использовании ряда терминов, надо дать им четкое определение. Еще совсем недавно эти терминологические вопросы волновали многих исследователей как в нашей стране ([1], [2]), так и за рубежом ([3]). В итоге работы специальной комиссии была издана брошюра [4], посвященная терминологии надежности в области радиоэлектроники. Определения основных понятий даны также в статье «Надежность» [5].

Как и в других областях науки, основные понятия теории надежности воспринимаются путем описания соотношений между ними. Под *изделием* мы будем понимать элемент, систему или ее часть и т. д. *Эксплуатация* изделия понимается как совокупность всех фаз его существования: транспортировка, хранение, подготовка к использованию по назначению, обслуживание и ремонт. Понятие о надежности изделия существенным образом связано с понятием о его качестве. *Качеством* изделия называется совокупность свойств, определяющих степень пригодности изделия для использования по назначению. Таким образом, понятие о качестве изделия существенным образом зависит от способа его использования. Например, если изделия радиоэлектроники используются в стационарных условиях при поддержании определенной температуры и влажности, то свойство влагостойкости не играет определяющей роли в понятии качества изделий. Совсем другое положение возникает в тех случаях, когда аппаратура используется в полевых условиях без герметизации. Здесь свойство влагостойкости является неотъемлемой частью других свойств, определяющих качество. Качество сложных изделий, особенно систем управления, как правило, определяется

весьма большим набором свойств. С течением времени свойства, составляющие качество изделия, видоизменяются и чаще всего в нежелательную сторону. В зависимости от их изменения меняется и само качество. Под *надежностью изделия* мы будем понимать способность изделия сохранять качество при определенных условиях эксплуатации. Другими словами, надежность — это *качество, развернутое во времени*. Надежность определяется качеством и условиями эксплуатации. Мы подчеркиваем, что понятие надежности связано с теми свойствами, которые либо были у изделия в момент его изготовления или проверки перед эксплуатацией, либо должны были быть. Например, не имеет смысла говорить о ненадежности радиоприемного устройства по отношению к определенному виду помех, если свойство помехозащищенности не было учтено при разработке этого устройства. Другое дело, если есть определенные участки схемы, которые выполняют функции, обеспечивающие помехозащищенность. Для таких систем в комплексе свойств, определяющих качество и надежность, нужно включить помехозащищенность.

Проблема повышения надежности изделий становится все более важной и актуальной в связи с комплексной механизацией и автоматизацией производственных процессов во многих областях промышленности, на транспорте, в технике связи и т. п. Важность этой проблемы определяется тем, что недостаточная надежность изделий вызывает большие затраты на их обслуживание, возникают частые простои оборудования, могут быть аварии, связанные с большим ущербом и даже человеческими жертвами. В некоторых случаях автоматические устройства оказываются менее рентабельными по сравнению с неавтоматическими в основном по причине их ненадежности. Недооценка факторов, связанных с надежностью, приводит к тому, что расходы в течение первых лет эксплуатации существенно превосходят начальную стоимость изделий. В настоящее время машины проникают во все сферы деятельности человека, в том числе и в сферу управления производством и других процессов управления. Задачи, которые решают машины, и особенно управляющие машины, становятся все сложнее. Возрастающая сложность решаемых задач приводит к тому, что сложнее становятся машины, предназначенные для решения этих задач. Налицо одно из основных противоречий в развитии современной техники: с одной стороны, все увеличивающаяся сложность систем приводит к снижению их надежности, с другой стороны, ставятся все более жесткие требования к надежной работе этих систем. Поиском путей разрешения этого противоречия и служит теория надежности. Возможны два принципиально различных пути. Первый путь состоит в повышении качества и надежности отдельных элементов, из которых составляется сложная система. Второй путь заключается

в разработке специальных методов конструирования сложных надежных систем из ненадежных элементов, а также в разработке методов обслуживания таких систем в процессе эксплуатации. В статье «Надежность» [5] дается следующее определение задач теории надежности: «Теория надежности—это новая научная дисциплина, изучающая общие закономерности, которых следует придерживаться при проектировании, испытаниях, изготовлении, приемке и эксплуатации изделий для получения максимальной эффективности от их использования».

Одним из основных понятий теории надежности является понятие об отказе и безотказности. Под *безотказностью* понимается способность изделия сохранять работоспособность (т. е. не иметь отказов) в течение определенного интервала времени в определенных условиях эксплуатации. *Отказ*—это частичная или полная утрата или видоизменение таких свойств изделий, которая существенным образом снижает или приводит к полной потере работоспособности. В отдельных случаях понятие отказа является четко определенным. Типичным примером изделий такого сорта могут служить электрические осветительные лампочки. Для их работы, как правило, характерны два состояния: либо нормальное свечение, либо потеря свечения. Однако применительно к изделиям радиоэлектроники понятие отказа является весьма относительным, так как оно существенным образом зависит от конкретных условий использования изделий. Как пример рассмотрим сопротивления, для которых основным параметром, определяющим качество, является величина сопротивления, выраженная в омах. Обычно под отказом сопротивления понимают уход величины сопротивления от номинального значения  $R_0$  за предельно допустимые границы  $R_0 \pm \Delta R_0$ . Таким образом, к моменту  $t$  будут считаться отказавшими те сопротивления, величины которых лежат вне  $(R_0 - \Delta R_0, R_0 + \Delta R_0)$ . Величина  $\Delta R_0$  никак не связывается, да и не может быть связана с конкретными условиями использования этих сопротивлений, так как в различных схемах величины допусков  $\Delta R_0$  будут существенным образом отличаться друг от друга. Если схема сконструирована оптимальным образом, то выход за пределы  $\Delta R_0$  может не привести к отказу. Наоборот, могут встретиться и такие случаи неустойчиво работающих схем, когда даже незначительные изменения величины сопротивления, меньшие  $\Delta R_0$ , приведут к отказам в работе схем. Несмотря на всю относительность, понятие отказа является полезной и содержательной характеристикой надежности, так как оно позволяет вводить различные численные характеристики надежности. По этим численным показателям можно сравнивать надежность различных типов изделий или изделий одного типа, но выпущенных в разное время и т. п.

По своему характеру в первом приближении отказы могут быть разделены на внезапные и постепенные. *Постепенные отказы* возникают при постепенном изменении параметров, определяющих качество изделия (в основном в результате старения или износа), когда эти параметры выходят за пределы установленных допусков. Одной из важных задач теории надежности является исследование возможности прогноза постепенных отказов. *Внезапные отказы* определяются резким изменением параметров, определяющих качество изделия. Целесообразно рассматривать и другие типы отказов. Для вычислительных машин, например, характерны *сбои*, т. е. *самоустраняющиеся отказы*. Более полную классификацию отказов можно найти в уже упоминавшейся ранее брошюре по терминологии [4].

Другим важнейшим понятием теории надежности является *долговечность*. Под долговечностью изделия понимают его способность к длительной эксплуатации при необходимом техническом обслуживании, в которое могут входить и различные виды ремонтов. В конце срока, определяющего долговечность, в изделии появляются такие процессы, связанные с износом или старением, устранение которых либо невозможно, либо экономически нецелесообразно. Долговечность характеризуется либо временем, либо числом циклов, либо объемом произведенной работы. Для некоторых изделий понятия долговечности и безотказности могут совпадать, но в общем случае это — самостоятельные характеристики надежности.

Для тех изделий, в которых работоспособность поддерживается с помощью специальных восстановительных воздействий, называемых *ремонтами*, важным показателем надежности является ремонтпригодность. *Ремонтпригодностью* изделия называется его приспособленность к предупреждению, обнаружению и устранению отказов. Она характеризуется затратами труда, времени и средств на ремонтные работы.

Итак, *понятие надежности более подробно раскрывается совокупностью трех понятий: безотказности, долговечности и ремонтпригодности.*

Характеристики качества и надежности изделий существенным образом связаны с экономическими показателями (себестоимостью) изделий. Повышение надежности изделий, как правило, сопровождается увеличением себестоимости изделий к моменту окончания их изготовления и приемки потребителем. В этом смысле более дорогие надежные изделия невыгодно отличаются от менее надежных, но зато более дешевых изделий. Однако заключение — какие изделия лучше, должно учитывать не только величину себестоимости изготовления. Экономическая эффективность использования, окупаемость у более надежных изделий может перекрыть повышение их себестоимости. Разработка методов учета факторов надежности

и себестоимости, по нашему мнению, является одной из актуальных и важных проблем экономической науки.

Более конкретно задачу теории надежности можно сформулировать следующим образом. *Теория надежности устанавливает и изучает количественные характеристики (критерии) надежности, исследует связь между показателями экономичности, эффективности и показателями надежности;*

— *разрабатывает методы проведения испытаний на надежность и методы обработки и оценки результатов этих испытаний;*

— *разрабатывает методы контроля надежности, методы оптимальных режимов профилактических (регламентных) работ при эксплуатации изделий, методы обоснования норм запасных частей (элементов, деталей).*

*В теории надежности разрабатываются методы установления режимов и выбора характеристик, обеспечивающих оптимальную надежность, методы выбора оптимальных конструкций и схем, обеспечивающих заданную надежность, оптимальные методы отыскания неисправностей в сложной аппаратуре и т. п.*

*При решении задач теория надежности использует результаты исследований физических и химических процессов, лежащих в основе явлений, связанных с потерей качества.*

В ряде разделов теории надежности широкое применение находят математические методы, такие как методы теории вероятностей и математической статистики, теории информации, теории массового обслуживания, линейного и нелинейного программирования, математической логики, методы статистического моделирования на электронных вычислительных машинах и др.

Теория надежности ввиду актуальности решаемых ею задач становится в настоящее время модной наукой. Количество статей, так или иначе связанных с проблемами обеспечения надежности, растет. По нашему мнению, наблюдается необоснованный разрыв экспериментальных и теоретических исследований. Есть работы чисто экспериментальные, без попыток обобщения и построения теории, описывающей явления, и есть много работ, которые можно рассматривать как математическое жонглирование индексами, принятием с точки зрения специалиста, хорошо знающего математику. В этой связи мы обращаем внимание читателя на статью «Бандвагон», опубликованную недавно на русском языке в сборнике работ К. Шеннона [6], посвященную аналогичному вопросу о «модности» теории информации.

Рассмотрим соотношение между понятиями надежности и эффективности. Среди части инженеров, занимающихся проектированием сложных систем, распространено мнение, что понятия теории надежности неприменимы для сложных систем. Утверждается, что понятие надежности сложной системы лишено смысла и надо говорить только об эффективности таких систем. При этом, однако, неявно критикуется понятие отказа сложной системы. Действительно, понятие качества сложной системы, созданной для



работы в меняющейся внешней обстановке, включает в себя совокупность многих десятков, а иногда и сотен свойств, определяющих качество. Многие из этих свойств играют существенную роль только при определенной внешней обстановке. Поэтому понятие отказа, связанное с полной или существенной потерей работоспособности системы, выглядит весьма искусственным. Более приемлемым является введение сводного показателя качества — *эффективности*, являющейся мерой производительности системы с учетом внешней обстановки и способа применения. Понятие эффективности, вообще говоря, является независимым от понятия надежности. Можно говорить об эффективности абсолютно надежных систем и сравнивать системы по количественным показателям эффективности. Однако если составные части системы не являются абсолютно надежными, то их качество существенным образом сказывается на эффективности. В таких случаях под надежностью системы следует понимать стабильность эффективности с учетом надежности частей, составляющих систему.

До сих пор мы говорили о понятиях надежности в самом общем плане. Однако если мы попытаемся ввести количественные показатели введенных выше понятий, то неизбежно приходим к необходимости введения вероятностной трактовки таких показателей. В большинстве статей под надежностью понимается вероятность безотказной работы в течение заданного промежутка времени. Наряду с этим встречаются и другие толкования этого термина. В этом нет ничего удивительного, так как разнообразие практических задач приводит к необходимости прибегать то к одной, то к другой характеристике надежности устройств в работе. Так, в одних случаях важно, чтобы средняя длительность безотказной работы была максимальна, в других нужно, чтобы максимальной была вероятность безотказной работы в течение заданного промежутка времени длины  $T$ ; может возникнуть необходимость в других количественных показателях. Более того, в ряде случаев может оказаться нужным достижение максимального уровня надежности сразу по нескольким показателям. Иногда эти требования могут оказаться противоречивыми. В таком случае, речь может идти об определении оптимального решения относительно предъявляемых требований. Здесь следует подчеркнуть, что оптимальность не может быть определена вне конкретной системы и ее назначения.

Так, для примера, очень важно добиться такого положения, чтобы сельскохозяйственные машины были приспособлены для восстановления их функций путем ремонтных работ и чтобы их долговечность была возможно большей. Однако с точки зрения интересов отдельных хозяйств и государства в целом особенное значение имеет надежность этих машин в смысле высокой вероятности безотказной работы в течение периода полевых работ.

Ущерб хозяйству будет велик, если тракторы и комбайны, имея большую долговечность, будут часто останавливаться в период посевных или уборочных работ и если на их ремонт потребуется время в самый ответственный период. Точно так же для самолета необходимо добиться максимальной вероятности безотказной работы на период всего рейса. Долговечность, т. е. общая длительность эксплуатации самолета (за вычетом времени, потраченного на ремонты) до полного его износа, являясь важной характеристикой его качества, отступает здесь на второй план.

Таким образом, количественных характеристик надежности много, в каждом конкретном случае решающую роль могут играть различные показатели надежности.

В настоящей части книги мы ограничиваемся только математическими моделями, связанными с использованием методов теории вероятностей и математической статистики. Общий подход к построению таких моделей может быть изложен следующим образом.

Из всех состояний, в которых может находиться система, мы выделяем множество  $\mathcal{C} = \{x\}$  таких состояний  $x$ , которые различаются между собой с точки зрения надежности. Множество  $\mathcal{C}$  назовем фазовым пространством системы. Например, если система состоит из  $n$  блоков различных типов, каждый из которых может находиться либо в рабочем, либо в неисправном состоянии, то фазовое пространство системы образует точки вида  $x = (e_1, \dots, e_n)$ , где  $e_i = 0$ , если  $i$ -й блок исправен, и  $e_i = 1$ , если  $i$ -й блок неисправен. Если неисправные блоки могут ремонтироваться, а время ремонта является случайной величиной с некоторой функцией распределения  $F_{\text{рем}}(x)$ , вообще говоря, отличной от показательного закона, то естественно считать, что состояния системы различаются, если различны времена, уже затраченные на ремонт неисправных блоков. При этом мы приходим к необходимости рассмотрения более сложного фазового пространства  $\mathcal{C}$ , состоящего из наборов точек  $x = (e_1, t_1, e_2, t_2, \dots, e_n, t_n)$ , где  $e_i = 0; 1$  в зависимости от того, исправен  $i$ -й блок или нет, а  $t_i = 0$  для  $e_i = 0$ . Для  $e_i = 1$   $t_i$  равно времени, уже затраченному на ремонт  $i$ -го блока. Могут встретиться случаи, когда значения  $x$  имеют физический смысл. Предположим, что наиболее важными показателями качества полупроводникового триода являются коэффициент усиления  $\beta$  и уровень шумов  $F$ . В этом случае фазовое пространство  $\mathcal{C}$  состоит из совокупности точек плоскости  $x = (x_1, x_2)$ , где  $x_1 = \beta$ ,  $x_2 = F$ . В множество  $\mathcal{C}$  включаются точки  $x$  первого квадрата плоскости  $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ . Можно было бы привести примеры систем и с более сложными фазовыми пространствами.

Итак, в качестве первого шага построения математической модели необходимо выбрать соответствующее фазовое пространство  $\mathcal{C} = \{x\}$ .

С течением времени в составных частях системы происходят различные изменения, например связанные со старением элементов, составляющих систему. Поэтому, если в момент  $t$  состояние системы описывалось точкой  $x_1$ , то в момент времени  $t_2 > t_1$  состоянию системы соответствует точка  $x_2$ . При этом может оказаться, что  $x_2 \neq x_1$ . Если обозначить через  $x(t) \in \mathfrak{E}$  состояние системы в момент времени  $t$ , то последовательность состояний  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , можно рассматривать как процесс, протекающий во времени. Так как изменение состояний носит случайный характер, то значения  $x(t)$  можно рассматривать как траекторию случайного процесса, протекающего в фазовом пространстве состояний системы  $\mathfrak{E}$ .

Вторым шагом построения математической модели является определение этого случайного процесса в зависимости от конкретных условий постановки задачи. Рассмотрим пример. Пусть система состоит из  $n$  одинаковых блоков, один из которых является основным, а остальные находятся в резерве. Каждый из блоков может быть либо исправным, либо отказавшим. Отказы наступают независимо друг от друга. Восстановление отказавших блоков не производится, а надежность каждого из блоков характеризуется вероятностью безотказной работы в течение времени  $t$ , равной  $p(t) = e^{-\lambda t}$ . При отказе основного блока он заменяется резервным. В качестве фазового пространства можем выбрать  $\mathfrak{E} = \{0, 1, \dots, n\}$ . Считаем, что  $x(t) = k$ , если в момент времени  $t$  исправны  $k$  блоков. Случаю «холодного» резерва, когда резервные блоки не отказывают, и «горячего» резерва, когда вероятность отказа блока, находящегося в резерве, также равна  $p(t) = e^{-\lambda t}$ , соответствуют различные случайные процессы  $x_{\text{хол}}(t)$  и  $x_{\text{гор}}(t)$ . При сделанных выше допущениях эти процессы являются однородными по времени марковскими процессами с конечным числом состояний. В первом случае матрица интенсивностей переходов равна  $A_1$ , во втором —  $A_2$

$$A_1 = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix};$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 1-n\lambda & n\lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1-(n-1)\lambda & (n-1)\lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1-\lambda & \lambda \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

К однородным по времени марковским процессам с конечным числом состояний приводит постановка задач на системы с резервирова-

нием, рассматриваемые в настоящей книге (см. главы 5 и 6). Существует, однако, большое количество задач, решение которых представляет непосредственный практический интерес и которые приводят к необходимости изучения марковских процессов более сложной природы. Важным частным случаем являются марковские процессы с дискретным вмешательством случая. Систематическое изложение методов решения задач теории надежности с использованием марковских процессов с дискретным вмешательством случая будет дано в задуманной нами книге. Из вышедших в свет работ мы отметим [8], [9], [10].

Небесполезно заметить, что многие задачи теории массового обслуживания приводят к моделям, тождественным моделям теории надежности. В связи с тем, что теория массового обслуживания начала развиваться значительно раньше, представляет практический интерес использование приемов и методов, а иногда и самих моделей для решения задач теории надежности. Иногда для использования результатов теории массового обслуживания в теории надежности достаточно слово «вызов» или «покупатель» заменить словом «отказ», а длительность «разговора» или «обслуживания» — временем «ремонта».

Когда определено фазовое пространство  $\mathcal{G} = \{x\}$  и в нем задан случайный процесс  $x(t)$ , описывающий эволюцию системы во времени, то следующим этапом является выбор различных числовых характеристик надежности системы. Как мы уже отмечали, такой выбор зависит от конкретных условий и назначения системы. Более того, иногда представляется целесообразным вычислить одновременно несколько числовых показателей надежности. В самом общем плане характеристики надежности можно рассматривать как математическое ожидание от некоторого функционала  $\Phi$ , определенного на траекториях процесса  $x(t)$ . Говорят, что функционал  $\Phi$  определен на процессе  $x(t)$ , если каждой траектории  $x(t)$  ставится в соответствие некоторое число  $\Phi[x(t)]$ . Показатель надежности  $\varphi$  определяется как математическое ожидание от этого функционала, т. е.

$$\varphi = M\Phi[x(t)]. \quad (2.1.1)$$

Такой подход фактически состоит в том, что каждой траектории процесса  $x(t)$  мы приписываем некоторый вес, а затем за показатель надежности принимаем среднее значение этого веса. Например, вероятность безотказной работы  $P(t)$  можно получить следующим образом. Вначале в фазовом пространстве  $\mathcal{G}$  определяется такое подмножество  $\mathcal{G}_{\text{отк}} \subset \mathcal{G}$  (рис. 2.1.1, а), что система считается неработоспособной, когда ее состояние  $x(t) \in \mathcal{G}_{\text{отк}}$ . Для полупроводникового триода в случае учета только параметров коэффициента усиления и уровня шумов при испытаниях на надежность

вид области  $\mathcal{E}_{\text{отк}}$  показан на рис. 2.1.1, б. Функционал  $\Phi_1$  определяем следующим образом. Мы полагаем  $\Phi_1[x(t)] = 0$ , если хотя бы при одном значении  $s \leq t$  траектория  $x(s)$  проходит через точки подмножества  $\mathcal{E}_{\text{отк}}$ ; в противном случае полагаем  $\Phi_1[x(t)] = 1$ . Очевидно, что  $\mathbf{M}\Phi_1[x(t)] = p(t)$ , т. е. равно вероятности безотказной работы в интервале  $[0, t]$ . Функционал  $\Phi_2[x(t)]$  равен

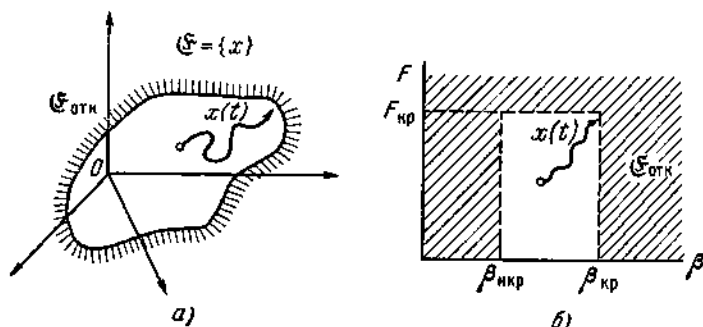


Рис. 2.1.1.

длительности интервала времени от начала работы системы до первого попадания траектории в множество  $\mathcal{E}_{\text{отк}}$ . Константа  $T = \mathbf{M}\Phi_2[x(t)]$  представляет собой важную числовую характеристику надежности системы — *среднее время безотказной работы системы*.

Возможны и другие подходы к определению оптимальной надежности системы с точки зрения ее эффективности. При этом мы приходим к необходимости сравнения показателей надежности различных систем с различными фазовыми пространствами состояний и отбора наилучшей из них. Типичными постановками задач такого рода являются задачи оптимального резервирования при одном или нескольких ограничениях [7].

Одна из возможных экономических трактовок задач теории надежности такова: пусть надежность системы характеризуется функционалом  $\Phi[x(t), T]$ , где  $T$  — назначенное время ее использования, а  $\omega\{\Phi[x(t), T]\}$  — ущерб за время  $T$ . Если устранение каждого отказа стоит  $c$ , а число отказов за время  $T$  равно  $N(T)$ , то общие расходы, связанные с эксплуатацией системы за время  $T$ , равны в среднем

$$\mathbf{M}\omega\{\Phi[x(t), T]\} + c\mathbf{M}N(T). \quad (2.1.2)$$

При проектировании и эксплуатации можно в некоторых случаях исходить из требования, чтобы сумма расходов в (2.1.2) принимала минимальное значение.

Возможны и другие постановки задач по определению оптимальной экономической эффективности. Не может быть сомнения, что обоснованное сочетание высокой надежности и экономической эффективности представляет большой хозяйственный интерес и относящиеся сюда вопросы заслуживают всесторонней разработки.

### § 2.2. Надежность элемента, работающего до первого отказа

Основные характеристики надежности. В этом параграфе мы будем рассматривать работу элемента до первого отказа и изучать различные характеристики надежности таких элементов.

Под словом «элемент» мы будем понимать не только неразложимую часть системы, но и любое устройство, надежность которого изучается независимо от надежности составляющих его частей.

Пусть в момент  $t=0$  элемент начинает работу, а в момент  $t=\tau$  происходит отказ. Будем говорить, что  $\tau$  — время жизни элемента<sup>1)</sup>. Предположим, что  $\tau$  — случайная величина с законом распределения

$$Q(t) = P\{\tau < t\}. \quad (2.2.1)$$

Функция  $Q(t)$  есть вероятность отказа элемента до момента  $t$ . Мы будем предполагать, что функция  $Q(t)$  непрерывна и существует непрерывная плотность вероятности отказа

$$q(t) = Q'(t).$$

Эти условия удобны для дальнейшего, кроме того, в теории надежности они естественны.

Так, например, разрыв функции  $Q(t)$  означает, что в какой-то наперед заданный момент элемент может отказать с конечной вероятностью, что вряд ли может быть на практике. Исключение составляет лишь начальный момент  $t=0$ , так как некоторые элементы отказывают в момент включения. К таким отказам приводят скрытые, но серьезные дефекты в элементе или небрежное хранение и транспортировка этого элемента. Однако, как правило, отказ в момент включения сразу же обнаруживается и элемент заменяется новым. Поэтому мы можем не принимать во внимание такие отказы, и тогда функция  $Q(t)$  будет непрерывна и при  $t=0$ .

<sup>1)</sup> Если элемент работает с перерывом и если во время простоев его параметры не меняются и он не может отказать, то все написанное ниже будет справедливо и для таких элементов, если под  $\tau$  понимать не календарное время, а чистое время работы.

Заметим еще, что само исходное предположение о том, что  $\tau$  — случайная величина, является серьезным допущением, которое на практике, по-видимому, не всегда справедливо. Рассматриваемый элемент всегда является представителем большой группы однотипных элементов. Эта группа должна быть в известном смысле однородна. Кроме того, условия эксплуатации должны быть однородны и по элементам и во времени. Так, например, одинаковые элементы, выполняющие различные функции, могут иметь различную надежность.

Итак, мы предположили, что время жизни элемента  $\tau$  есть случайная величина с законом распределения  $Q(t)$ . Эта функция полностью определяет надежность нашего элемента.

Наряду с ней и не менее часто употребляется и другая функция

$$P(t) = 1 - Q(t) = P\{\tau > t\}, \quad (2.2.2)$$

т. е. вероятность безотказной работы элемента за время  $t$ . Будем называть эту функцию так, как ее чаще всего называют, а именно, *функцией надежности*.

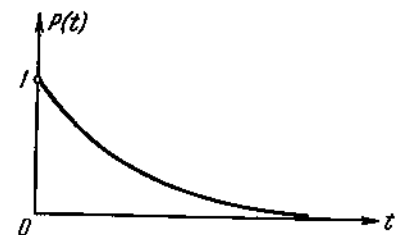


Рис. 2.2.1

Примерный вид функции надежности показан на рис. 2.2.1. Эта функция монотонно убывает;  $P(0) = 1$  и  $P(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Функцию  $P(t)$  можно приближенно найти из опыта. Предположим сначала, что нам нужно найти значение этой функции при  $t = t_0$ , т. е. вероятность безотказной работы в течение времени  $t_0$ . Мы ставим на испытания  $N$  одинаковых элементов и испытываем их при одинаковых условиях в течение времени  $t_0$ . Пусть к моменту окончания испытаний не отказало  $n$  элементов. Можно рассматривать наш эксперимент как серию из  $N$  независимых испытаний, при каждом из которых происходит одно из двух событий: или элемент отказывает, или он не отказывает. Но тогда отношение  $\frac{n}{N}$  есть частота появления первого события, и по теореме Бореля [11] с вероятностью единица

$$\frac{n}{N} \rightarrow P(t_0) \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Это означает практически, что при большом  $N$  с вероятностью, близкой к единице, имеет место приближенное равенство

$$\frac{n}{N} \approx P(t_0). \quad (2.2.3)$$

Если мы хотим найти функцию  $P(t)$  для всех значений  $t \leq t_0$ , то мы должны проводить испытания в течение времени  $t_0$  и отмечать моменты возникновения отказов. Зная эти моменты, легко определить функцию  $n(t)$ , которая равна числу элементов, не отказавших к моменту  $t$ . В начальный момент эта функция равна  $n(0) = N$ , а в момент каждого отказа она уменьшается на единицу. Отношение  $P_N(t) = \frac{n(t)}{N}$  называется *эмпирической функцией надежности* (рис. 2.2.2). С ростом  $N$  эта функция равномерно приближается к функции  $P(t)$ , и для больших  $N$  имеет место приближенное равенство

$$P_N(t) = \frac{n(t)}{N} \approx P(t). \quad (2.2.4)$$



Рис. 2.2.2.

Следует заметить, что если испытания проводились на каком-то участке времени, то за пределами этого участка мы ничего о функции сказать не можем. Иными словами, функцию  $P(t)$  в общем случае нельзя экстраполировать. Правда, очень часто из физических соображений или из предшествующего опыта мы знаем аналитический вид функции  $P(t)$ , она выражается некоторой формулой, содержащей один или несколько неизвестных параметров. Тогда, проводя испытания, мы можем определить эти параметры, а по ним и саму функцию на всем бесконечном участке времени.

Как это делается, будет сказано ниже. Заметим еще, что при одной и той же точности для оценки функции  $P(t)$  требуется гораздо больший объем испытаний, чем для оценки вероятности  $P(t_0)$ . По этой причине во многих случаях надежность характеризуют не функцией  $P(t)$ , а некоторыми числовыми величинами. Важнейшей из них является среднее время безотказной работы, которое определяется как математическое ожидание случайной величины  $\tau$ ,

$$T_0 = M\tau = \int_0^{\infty} tq(t) dt.$$

Полезно преобразовать этот интеграл к другому виду, взяв его по частям

$$T_0 = \int_0^{\infty} tq(t) dt = -tP(t) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} P(t) dt$$



или

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt. \quad (2.2.5)$$

(Мы предполагаем, что написанные интегралы сходятся, и в дальнейшем это оговаривать не станем.) Из последней формулы видно, что среднее время  $T_0$  геометрически выражается площадью, ограниченной осями координат и кривой  $P(t)$ .

Среднее время может быть найдено по результатам испытаний. Для этого нужно испытывать элементы до отказа последнего из них. Пусть  $\tau_1, \dots, \tau_N$  — времена жизни этих элементов. Рассмотрим эмпирическое среднее время

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \dots + \tau_N}{N}.$$

Согласно усиленному закону больших чисел [11], с вероятностью единица

$$\bar{\tau} \rightarrow T_0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Поэтому при большом  $N$  имеет место приближенное равенство

$$\bar{\tau} \approx T_0. \quad (2.2.6)$$

К сожалению, последние испытания часто практически неосуществимы, так как время испытаний ограничено и мы не можем ждать, пока откажут все элементы. Пусть, например, за время  $t$  при испытании  $N$  элементов произошло  $n$  отказов в моменты  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ . Единственное, что можно сделать в этом случае, это дать оценку снизу для среднего времени. Действительно,

$$\bar{\tau} = \frac{\tau_1 + \dots + \tau_n + \tau_{n+1} + \dots + \tau_N}{N} > \frac{\tau_1 + \dots + \tau_n + (N-n)t}{N}$$

и, значит, при большом  $N$

$$T_0 > \frac{\tau_1 + \dots + \tau_n + (N-n)t}{N}. \quad (2.2.7)$$

Естественно, что пользоваться этой оценкой имеет смысл только тогда, когда  $n$  близко к  $N$ .

Другой характеристикой надежности является дисперсия времени жизни

$$\begin{aligned} D\tau &= M(\tau - T_0)^2 = M\tau^2 - (M\tau)^2 = \int_0^{\infty} t^2 q(t) dt - T_0^2 = \\ &= 2 \int_0^{\infty} tP(t) dt - T_0^2. \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

Дисперсия может быть найдена из опыта. Если испытывается  $N$  элементов и  $\tau_1, \dots, \tau_N$  — времена их жизни, то при большом  $N$

$$D\tau \approx S^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (\tau_i - \bar{\tau})^2}{N-1}, \quad (2.2.9)$$

где  $\bar{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^N \tau_i}{N}$ .

Величина  $\sigma_q = \sqrt{D\tau}$  дает нам среднеквадратическое отклонение случайного времени  $\tau$  от своего среднего времени  $T_0$ . Использовать дисперсию как характеристику надежности целесообразно, по-видимому, тогда, когда  $\sigma < T_0$ , т. е. случайное время  $\tau$  имеет небольшой относительный разброс. В этом случае весьма яркое представление о надежности дает график плотности  $q(t)$ , который, как правило, имеет одну вершину (рис. 2.2.3). Функция  $q(t)$  также может быть

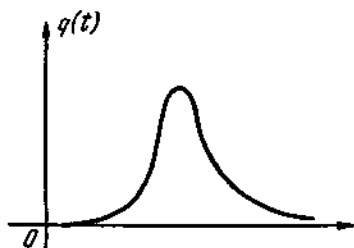


Рис. 2.2.3.

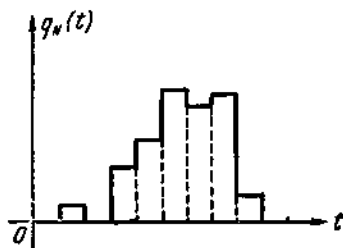


Рис. 2.2.4.

найдена из опыта. Для этого мы разбиваем весь участок времени (рис. 2.2.4) на интервалы длительности  $h$  и регистрируем число отказов, попавших на каждый интервал. Пусть поставлено на испытания  $N$  элементов и  $n_k$  число отказов, происшедших на интервале  $[(k-1)h, kh]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда эмпирическая функция плотности, или гистограмма (подробнее см. главу 3), выразится формулой

$$q_N(t) = \frac{n_k}{Nh}, \quad (2.2.10)$$

если  $(k-1)h \leq t < kh$ . При большом объеме испытаний и достаточно малом  $h$

$$q_N(t) \approx q(t).$$

Перейдем теперь к рассмотрению важнейшей и очень популярной характеристики надежности, которую чаще всего называют опасностью отказа.

— Рассмотрим сначала такую задачу. Пусть элемент проработал безотказно до момента  $t$ . Какова вероятность того, что он не откажет на участке  $(t, t_1)$ ? Обозначим эту вероятность через  $P(t, t_1)$ . Пусть  $A$  — событие, означающее безотказную работу элемента на  $(0, t)$ , а  $B$  — событие, означающее безотказную работу на  $(t, t_1)$ . Тогда наша вероятность есть условная вероятность

$$P(t, t_1) = P\{A|B\} = \frac{P\{AB\}}{P\{A\}}. \quad \checkmark$$

Но событие  $AB$  означает безотказную работу элемента на  $(0, t_1)$ . Поэтому

$$P(t, t_1) = \frac{P(t_1)}{P(t)}. \quad (2.2.11)$$

Вероятность отказа на  $(t, t_1)$  выразится, очевидно, так:

$$Q(t, t_1) = 1 - P(t, t_1) = \frac{P(t) - P(t_1)}{P(t)}. \quad (2.2.12)$$

Положим теперь  $t_1 = t + \Delta t$  и устремим  $\Delta t$  к нулю. Тогда

$$Q(t, t + \Delta t) = \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{P(t)} = -\frac{P'(t)}{P(t)} \Delta t + o(\Delta t).$$

Введем обозначение

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)}. \quad (2.2.13)$$

При малом  $\Delta t$

$$Q(t, t + \Delta t) \approx \lambda(t) \Delta t. \quad (2.2.14)$$

Из этой формулы видно, что величина  $\lambda(t)$  является локальной характеристикой надежности, определяющей надежность элемента в каждый данный момент времени. Говоря «по-инженерному»,  $\lambda(t)$  есть вероятность того, что элемент, проработавший безотказно до момента  $t$ , откажет в последующую единицу времени (если, конечно, эта единица мала). В терминах теории вероятностей  $\lambda(t)$  есть плотность условной вероятности отказа в момент  $t$ , при условии, что до этого момента элемент работал безотказно.

Функция  $\lambda(t)$ , определяемая из формулы (2.2.13), и называется опасностью отказа.

Уравнение (2.2.13) может быть легко разрешено относительно функции надежности  $P(t)$ . Сделав это, мы получим

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt}. \quad (2.2.15)$$

Из этой важной формулы следует, что вероятность безотказной работы на интервале  $(t_1, t_2)$  выражается так:

$$P(t_1, t_2) = e^{-\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t) dt}. \quad (2.2.16)$$

Функция  $\lambda(t)$  может быть определена по результатам испытаний. Мы, как и выше, испытываем  $N$  элементов и наблюдаем их отказы. Пусть  $n(t)$  — число элементов, не отказавших к моменту  $t$ .

Тогда при достаточно малом  $\Delta t$  и достаточно большом  $N$

$$\lambda(t) = -\frac{P'(t)}{P(t)} \approx \frac{P(t) - P(t + \Delta t)}{\Delta t P(t)} \approx \frac{\frac{n(t) - n(t + \Delta t)}{N}}{\Delta t \frac{n(t)}{N}} = \frac{\Delta n}{\Delta t n(t)},$$

где  $\Delta n$  — число отказов на участке  $(t, t + \Delta t)$ .

Итак, если  $\Delta t$  достаточно мало, а  $\Delta n$  при этом велико, то

$$\lambda(t) \approx \frac{\Delta n}{\Delta t n(t)}. \quad (2.2.17)$$

Значит, статистически опасность отказа равна числу отказов, происшедших за единицу времени, отнесенному к числу не отказавших к данному моменту элементов. Пользуясь этой статистической трактовкой, попытаемся показать на примере, что  $\lambda(t)$  действительно является локальной характеристической надежностью. Пусть испытывается 1000 одинаковых элементов и за первый час выходит из строя 50 элементов, через 30 часов работы остается в живых 60 элементов, а в последующий час выходит из строя 20 элементов. Спрашивается, когда элемент более надежен, вначале или после 30 часов работы? Ясно, что абсолютные цифры, 50 и 20, не могут служить для сравнения надежности. Ведь за первый час выходит из строя 50 элементов из тысячи, т. е. каждый двадцатый элемент, а после 30 часов работы за час выходит 20 элементов из 60, т. е. каждый третий. Таким образом, мы видим, что надежность элемента в каждый момент времени характеризуется отношением числа отказов за единицу времени к общему числу уцелевших к данному моменту элементов. Но это и есть опасность отказа. Практически при определении опасности отказа удобно поступать так же, как и при построении гистограммы  $q(t)$ . Мы разбиваем весь участок времени на интервалы длительности  $h$  и находим число отказов, попавших в каждый интервал. Пусть  $n_k$  — число отказов на интервале  $[(k-1)h, kh]$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Тогда эмпирическая опасность отказа

$$\lambda_N(t) = \frac{n_k}{(N - n_1 - \dots - n_{k-1})h} \quad \text{при} \quad (k-1)h \leq t < kh.$$

Мы получаем ступенчатую кривую, приближенно представляющую график опасности отказов (рис. 2.2.5).

Экспоненциальный закон. Многочисленные опытные данные показывают, что для многих элементов функция  $\lambda(t)$  имеет характерный вид кривой рис. 2.2.6. Из этого графика видно, что весь интервал времени можно разбить на три участка. На первом из них функция  $\lambda(t)$  имеет повышенные значения. Это связано с тем обстоятельством, что в большой партии элементов всегда имеются элементы со скрытыми дефектами, которые выходят из строя вскоре после начала работы. По этой причине первый период называют

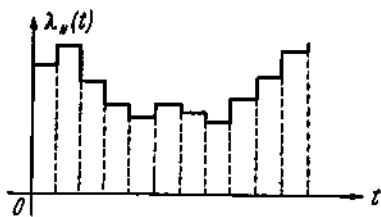


Рис. 2.2.5.

периодом *приработки*, или периодом «*выжигания*» дефектных элементов.

Второй период называется периодом *нормальной работы*. Он характеризуется постоянным (или приближенно постоянным) значением опасности отказа.

Последний период — *период старения*. Необратимые физико-химические явления приводят к ухудшению качества элемента, элемент «старее». В этот период опасность отказа возрастает.

Естественно, что эта картина изменения опасности отказа не является универсальной. Есть элементы, у которых отсутствует период приработки (например, хорошо поставленный контроль отсеивает все дефектные элементы), есть элементы, которые практически не стареют. Однако у большинства элементов имеется, как правило, длительный период, на котором опасность отказа  $\lambda(t)$  практически постоянна. Периодом приработки (если он имеется) можно пренебречь, считая, что работа элемента начинается с окончания этого периода. Действительно, и элемент и система, в состав которой он входит, подвергаются обычно предварительной тренировке, проходят проверочные испытания, и только после этого начинается их эксплуатация. С другой стороны, срок службы у многих элементов кончается раньше, чем наступает заметное старение этих элементов.

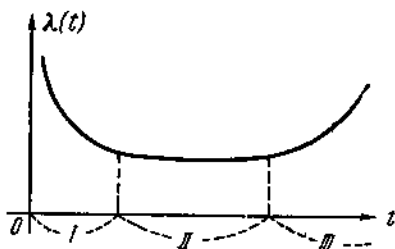


Рис. 2.2.6.

Вышеприведенные соображения показывают, что для широкого класса элементов мы можем принять, что

$$\lambda(t) = \lambda = \text{const.}$$

Остановимся на этом важном случае. Из формулы (2.2.15) следует, что для постоянной опасности отказов функция надежности имеет вид

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2.2.18)$$

Такой закон надежности называется *экспоненциальным*. Для него вероятность отказа за время  $t$  равна

$$Q(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$

а плотность вероятности отказов

$$q(t) = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Среднее время жизни элемента для этого случая

$$T_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}. \quad (2.2.19)$$

Таким образом, для экспоненциального закона опасность отказа обратна среднему времени. Поэтому функцию надежности можно записать и так:

$$P(t) = e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

Существенно отметить, что  $T_0$  может в действительности и не быть средним временем. Ведь опасность отказа, постоянная на рассматриваемом участке времени, может вне этого участка и не быть постоянной, так как, в конце концов, любой элемент начинает «стареть». Поэтому более правильно сказать, что  $T_0$  — это среднее время такого элемента, опасность отказа которого постоянна на всем бесконечном интервале времени, а на рассматриваемом участке времени совпадает с опасностью отказа нашего элемента.

Часто интересующее нас время  $t$  во много раз меньше среднего времени,

$$t \ll T_0, \quad \text{или} \quad \frac{t}{T_0} \ll 1.$$

Тогда можно пользоваться простыми приближенными формулами

$$P(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}, \quad Q(t) \approx \frac{t}{T_0}. \quad (2.2.20)$$

Ошибка в них не превосходит  $\frac{1}{2} \left( \frac{t}{T_0} \right)^2$ . Заметим еще, что эти приближенные формулы дают и оценку для наших вероятностей с нужной

стороны, ибо для любого  $t$  справедливы неравенства  $P(t) \geq 1 - \frac{t}{T_0}$  и  $Q(t) \leq \frac{t}{T_0}$ . Они следуют из выпуклости функции  $e^{-x}$  — касательная  $y_1 = 1 - x$  лежит ниже самого графика  $y_2 = e^{-x}$ , т. е.  $y_1 \leq y_2$ ,  $1 - x \leq e^{-x}$ .

Экспоненциальный закон очень популярен в теории надежности. Эта популярность объясняется тем, что экспоненциальный закон, физически очень естественный, прост и удобен для использования. Почти все задачи, возникающие в теории надежности для экспоненциальных законов распределения, оказываются на порядок проще, чем для произвольных законов. Почти все формулы в теории надежности в случае экспоненциального закона резко упрощаются.

Основная причина этого состоит в том, что экспоненциальный закон надежности обладает следующим важным свойством: для экспоненциального закона вероятность безотказной работы на данном интервале  $(t, t + \tau)$  не зависит от времени предшествующей работы  $t$ , а зависит только от длины интервала  $\tau$ . Иными словами, если нам известно, что в данный момент элемент исправен, то будущее его поведение не зависит от прошлого.

Действительно, вероятность безотказной работы на  $(t, t + \tau)$  по формуле (2.2.11) равна

$$P(t, t + \tau) = \frac{P(t + \tau)}{P(t)} = \frac{e^{-\lambda(t + \tau)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda \tau}.$$

Покажем, что это свойство является характеристическим, т. е. если оно выполняется для какого-то закона  $P(t)$ , то этот закон обязательно будет экспоненциальным.

Пусть отношение  $\frac{P(t + \tau)}{P(t)}$  не зависит от  $t$ . Тогда  $\frac{P(t + \tau)}{P(t)} = \varphi(\tau)$ , но  $P(0) = 1$  при  $t = 0$ , поэтому

$$P(t + \tau) = P(t) P(\tau) \quad (2.2.21)$$

для любых  $t \geq 0$  и  $\tau \geq 0$ .

Отсюда по индукции получим

$$P(t_1 + t_2 + \dots + t_n) = P(t_1) P(t_2) \dots P(t_n).$$

Пусть

$$P(1) = q, \quad 0 \leq q \leq 1.$$

Полагая  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{1}{n}$ , мы получим

$$P(1) = q = \left[ P\left(\frac{1}{n}\right) \right]^n, \quad \text{или} \quad P\left(\frac{1}{n}\right) = q^{\frac{1}{n}}.$$

Подставив теперь  $t_1 = t_2 = \dots = t_n = \frac{t}{m}$ , мы приходим к формуле

$$P\left(\frac{n}{m}\right) = q^{\frac{n}{m}}.$$

Пусть  $t \geq 0$  — любое число. Тогда при любом целом  $m > 0$  найдется единственное  $n > 0$  такое, что  $\frac{n-1}{m} \leq t \leq \frac{n}{m}$ . Так как функция  $P(t)$  монотонно не возрастает, то

$$P\left(\frac{n}{m}\right) \leq P(t) \leq P\left(\frac{n-1}{m}\right),$$

или

$$q^{\frac{n}{m}} \leq P(t) \leq q^{\frac{n-1}{m}}.$$

При  $m \rightarrow \infty$  дроби  $\frac{n}{m}$  и  $\frac{n-1}{m} \rightarrow t$  и, переходя к пределу, мы получим

$$P(t) = q^t.$$

Если  $q = 0$ , то  $P(t) = 0$  при любом  $t > 0$ , т. е. элемент отказывает в момент включения в работу; если же  $q = 1$ , то  $P(t) \equiv 1$ , т. е. элемент абсолютно надежен. Отбросив эти несущественные крайние случаи, мы можем записать постоянную  $q$  в форме

$$q = e^{-\lambda}, \quad \text{где } \lambda > 0,$$

и тогда окончательно

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

В некоторых случаях, зная природу отказов и характер работы элемента, мы можем непосредственно показать, что рассмотренное выше свойство для него имеет место, откуда уже будет следовать экспоненциальный закон надежности.

Приведем два примера.

1. Пусть отказ в космическом корабле может возникнуть только из-за попадания в него достаточно крупного метеорита. Если предположить, что метеориты распределены равномерно в пространстве и во времени, то ясно, что вероятность попадания метеорита в корабль на данном участке времени не зависит от того, попадали или нет метеориты в корабль в прошлом. Следовательно, закон надежности в этом случае экспоненциальный.

2. Пусть элемент, входящий в состав некоторой системы, может отказаться только по одной причине — из-за отрыва пайки. Предположим также, что во время работы система вибрирует и возникающие при этом индукционные силы являются единственной причиной



возможного отрыва пайки. Пусть  $F_0$  — наименьшая сила, при которой наступает отрыв.

Изменение во времени сил инерции, действующих на пайку, представляет собой быстро меняющийся стационарный случайный процесс. Зависимость между соседними амплитудами этого процесса очень быстро исчезает с увеличением расстояния. Поэтому вероятность того, что на данном участке  $(t, t + \tau)$  амплитуда процесса  $F$  будет меньше критического значения  $F_0$ , практически не зависит от того, как вел себя этот процесс до момента  $t$ . Значит, и в этом примере закон надежности экспоненциальный.

Другие законы надежности. В последнее время все чаще раздается критика в адрес экспоненциального закона. Следует согласиться с тем, что часто этот закон применяют некритически, что единственным оправданием для его использования служит то, что с этим законом проще решать задачу, что без него вообще задача «не решается». По-видимому, применимость экспоненциального закона зависит в основном от характера отказов элемента. Внезапные отказы, носящие случайный характер, обычно довольно хорошо описываются экспоненциальным законом; наоборот, отказы, возникающие в результате износа, в результате необратимых физико-химических изменений физических параметров элемента уже не подчиняются экспоненциальному закону. Эти отказы, носящие название постепенных, во многих случаях довольно хорошо описываются нормальным законом.

Рассмотрим одну общую модель, которая приводит к нормальному закону надежности.

Пусть надежность элемента определяется одним физическим параметром  $\alpha$ . Предположим, что начальное значение параметра  $\alpha_0$  есть нормальная случайная величина с небольшой дисперсией — это производственный разброс, то, что было заложено в элементе при его изготовлении. Предположим также, что во время работы параметр меняется детерминированным образом,  $\alpha = f(t, \alpha_0)$ , и пусть для простоты функция  $f(t, \alpha_0)$  монотонна по  $t$ . По условию отказ наступает тогда, когда значение параметра превысит некоторый критический уровень  $\alpha_1$ . Значит, момент отказа  $t = \tau$  определяется из уравнения

$$f(\tau, \alpha_0) \equiv \alpha_1,$$

или

$$\tau = \varphi(\alpha_0, \alpha_1);$$

$\varphi$  — обратная к  $f$  по первому аргументу функция. Так как  $\alpha_0$  имеет малую дисперсию, то, раскладывая функцию  $\varphi$  по формуле Тейлора в точке  $a = M\alpha_0$  и пренебрегая членами второго порядка, мы получим

$$\tau \approx \varphi(a, \alpha_1) + \varphi'_a(a, \alpha_1)(\alpha_0 - a).$$

Но если  $\alpha_0$  является нормальной величиной, то и момент  $\tau$  как линейная функция от  $\alpha_0$  также распределен по нормальному закону (рис. 2.2.7).

Для нормального закона надежности функция надежности имеет вид

$$P(t) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx},$$

а так как обычно  $\sigma \ll T_0$ , то можно записать это равенство и более просто:

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.2.22)$$

Здесь  $T_0$  — среднее время жизни, а  $\sigma^2 = Dt$ .

Можно показать, что опасность отказа  $\lambda(t)$  для нормального закона имеет следующий вид (рис. 2.2.8): она монотонно возрастает и после  $T_0$  начинает приближаться к асимптоте  $y = \frac{t-T_0}{\sigma}$ .

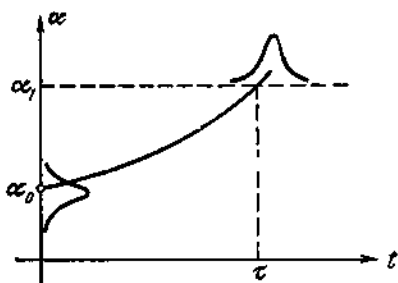


Рис. 2.2.7.

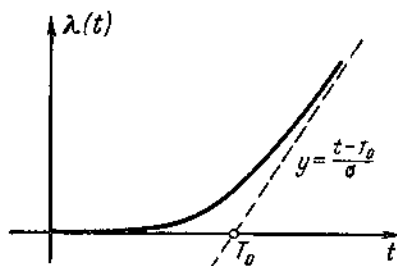


Рис. 2.2.8.

Впрочем, опасность отказа не является при больших значениях  $\alpha$  существенной характеристикой.

У реального элемента часто совмещаются оба типа отказов. В нем может произойти внезапный отказ, но параллельно идет «старение» элемента, которое приводит к постепенному отказу, если до этого не произошел внезапный. Такой элемент можно рассматривать состоящим как бы из двух частей, в одной из которых

может произойти только внезапный отказ, а в другой — только постепенный. Элемент работает до первого из этих отказов. Если  $P_1(t)$  — вероятность того, что за время  $t$  не произойдет внезапный отказ, а  $P_2(t)$  — вероятность того, что за это время не произойдет постепенного отказа, то, предполагая, что отказы возникают независимо друг от друга, мы получим, что функция надежности элемента  $P(t)$  равна

$$P(t) = P_1(t) P_2(t) = e^{-\lambda t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.2.23)$$

Вычислим для этого случая среднее время жизни элемента, предполагая, что  $\sigma \ll T_0$ , а  $T_0$  и  $\frac{1}{\lambda}$  — одного порядка. Имеем

$$T_{cp} = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t-T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Сделаем замену  $\frac{t-T_0}{\sigma} = z$  и проинтегрируем по частям. Получим

$$\begin{aligned} T_{cp} &= \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda T_0}}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{T_0}{\sigma}}^{\infty} e^{-\lambda \sigma z - \frac{z^2}{2}} dz \approx \\ &\approx \frac{1}{\lambda} - \frac{e^{-\lambda T_0}}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda \sigma z - \frac{z^2}{2}} dz = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda T_0 + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \right); \end{aligned}$$

окончательно

$$T_{cp} = \frac{1}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda T_0 + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}} \right). \quad (2.2.24)$$

Можно, конечно, найти и точное значение  $T_{cp}$ , используя таблицы нормального закона.

Рассмотрим кратко некоторые другие законы распределения, используемые в теории надежности.

**Закон Вейбулла.** Функция надежности для него имеет вид

$$P(t) = e^{-\lambda t^\alpha}. \quad (2.2.25)$$

Среднее время жизни элемента

$$T_0 = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t^\alpha} dt = -\frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}}}. \quad (2.2.26)$$

Дисперсия времени жизни

$$D\tau = \sigma^2 = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{\alpha} + 1\right) - \Gamma^2\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^{\frac{2}{\alpha}}}.$$

Опасность отказа

$$\lambda(t) = \alpha \lambda t^{\alpha-1}.$$

При  $\alpha > 1$  опасность отказа монотонно возрастает от нуля, при  $\alpha < 1$  опасность отказа монотонно убывает и не ограничена при  $t = 0$ . Экспоненциальный закон является частным случаем закона Вейбулла при  $\alpha = 1$  (рис. 2.2.9).

Если  $\lambda t^\alpha \ll 1$ , то можно пользоваться приближенной формулой

$$P(t) \approx 1 - \lambda t^\alpha. \quad (2.2.27)$$

По-видимому, основной причиной широкого использования закона Вейбулла в надежности является то, что он, обобщая экспоненциальный закон, содержит дополнительный параметр  $\alpha$ . Подбирая

нужным образом параметры  $\lambda$  и  $\alpha$ , мы можем получить лучшее соответствие опытным данным по сравнению с экспоненциальным законом, который зависит только от одного параметра  $\lambda$ . Так, у элемента, у которого часто встречаются скрытые дефекты, но который в течение долгого времени не «старееет», опасность отказа резко повышена вначале, а потом быстро падает. Функция надежности такого элемента должна хорошо приближаться законом Вейбулла при  $\alpha < 1$ . Наоборот, если у элемента почти не бывает скрытых дефектов, но зато он быстро «старееет», то опасность отказа монотонно растет, и функция надежности должна хорошо приближаться законом Вейбулла с параметром  $\alpha > 1$  (см. рис. 1.2.6).

Впрочем, в некоторых случаях закон Вейбулла возникает естественным образом. Рассмотрим один характерный пример. Устройство, надежность которого мы ищем, состоит из  $n$  последовательно соединенных дублированных элементов. В каждой паре работают оба элемента, а отказ пары наступает тогда, когда откажут оба элемента. Отказ всего устройства наступает при отказе хотя бы одной пары. Надежность каждого элемента подчинена экспоненциальному закону, опасность отказа у элементов  $k$ -й пары равна  $\lambda_k$ .

Тогда можно показать, что если величина  $\sqrt[n]{\sum_{k=1}^n \lambda_k^2} = \lambda$  фиксиро-

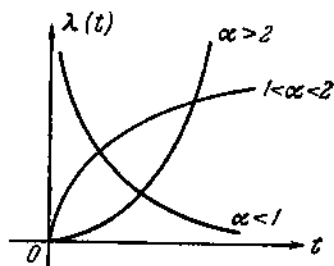


Рис. 2.2.9.

вана (этого всегда можно добиться выбором единицы времени), а

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \lambda_k^{\circ} = 0,$$

то функция надежности системы имеет предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(t) = e^{-\lambda^{\circ} t^{\alpha}}.$$

Мы получим распределение Вейбулла с показателем  $\alpha = 2$ .

Гамма-распределение. Функция надежности имеет вид

$$P(t) = \int_{\lambda t}^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-x} dx. \quad (2.2.28)$$

Плотность распределения отказов

$$q(t) = -P'(t) = \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Среднее время жизни

$$T_0 = \int_0^{\infty} \frac{\lambda^{\alpha} t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t} dt = \frac{\alpha}{\lambda},$$

дисперсия

$$D_0 = \sigma^2 = \frac{\alpha}{\lambda^2}.$$

При  $\alpha = \frac{n}{2}$  и  $\lambda = \frac{1}{2}$  мы получаем  $\chi^2$ -распределение, при  $\alpha = 1$  — экспоненциальный закон.

Гамма-распределением удобно приближать те законы надежности, у которых плотность  $q(t)$  имеет одновершинный несимметричный вид.

Логарифмически нормальное распределение. Для него функция надежности

$$P(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\ln t}{T_0}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (2.2.29)$$

а среднее время

$$T_{\text{ср}} = T_0 e^{\frac{\sigma^2}{2}}.$$

Степенное распределение. Функция надежности

$$P(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{T_0}\right)^{\alpha}}. \quad (2.2.30)$$

Среднее время конечно при  $\alpha > 1$

$$T_{\text{ср}} = \frac{T_0}{\alpha - 1}.$$

Эти два распределения дают в некоторых случаях неплохое приближение для закона надежности.

В заключение мы рассмотрим два общих подхода к изучению надежности элемента, которые позволят получить оценки надежности и сделать некоторые качественные выводы о надежности.

Стареющие элементы. Назовем элемент *стареющим*, если его опасность отказа монотонно не убывает, т. е. для любых  $0 < t_1 < t_2$

$$\lambda(t_1) \leq \lambda(t_2).$$

Это означает, что с течением времени надежность элемента может только уменьшаться.

Введем обозначение

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(t) dt.$$

Из наших предположений следует, что  $\Lambda(t)$  выпукла вниз. Функция надежности выразится так:

$$P(t) = e^{-\Lambda(t)}.$$

Рассмотрим среднее время жизни  $T_0$  и попытаемся оценить его сверху

$$T_0 = \int_0^{\infty} e^{-\Lambda(t)} dt = \int_0^{\infty} e^{-x} d\varphi(x),$$

где  $\varphi(x)$  — функция, обратная к  $\Lambda(t)$ . Взяв последний интеграл по частям, мы получим

$$T_0 = \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-x} dx.$$

Функция  $\varphi(x)$  выпукла вверх, поэтому ее график лежит ниже касательной. В частности, при любом  $x$

$$\varphi(x) \leq \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1).$$

Отсюда для среднего времени мы получаем оценку

$$T_0 < \varphi(1) \int_0^{\infty} e^{-x} dx + \varphi'(1) \int_0^{\infty} (x-1) e^{-x} dx = \varphi(1),$$

или

$$T_0 < \varphi(1),$$

что равносильно неравенству

$$\lambda(T_0) < 1.$$

Функция  $\lambda(t)$  выпукла вниз, и поэтому ее график на интервале  $(0, T_0)$  лежит ниже хорды, т. е.

$$\lambda(t) < \frac{\lambda(T_0)}{T_0} t < \frac{t}{T_0} \quad \text{для } t < T_0.$$

Из этого неравенства следует, что функция надежности

$$P(t) > e^{-\frac{t}{T_0}} \quad \text{для } t < T_0. \quad (2.2.31)$$

Отсюда можно сделать такой вывод: если мы для оценки надежности стареющего элемента пользуемся экспоненциальным законом, подставляя в него истинное среднее время, то мы тем самым занижаем функцию надежности для всех моментов  $t$ , не превосходящих среднего времени. Заметим, что оценка вероятности безотказной работы снизу более приемлема, чем оценка этой вероятности сверху, так как прогнозы надежности, сделанные по заниженным вероятностям, в действительности будут оправдываться с большей достоверностью. Как мы увидим ниже, для стареющих элементов можно написать целый ряд неравенств, подобных неравенству (2.2.31). Отметим еще, что для стареющих элементов

$$D\tau < (M\tau)^2 = T_0^2,$$

тогда как для экспоненциального закона дисперсия равна квадрату среднего времени.

*Надежность элементов неоднородной партии.* Вначале представим себе, что два завода изготовляют элементы одного типа, причем первый завод поставляет  $100p_1\%$  всей продукции, а второй завод —  $100p_2\%$  всей продукции ( $p_1 + p_2 = 1$ ). Предположим, что любой элемент имеет надежность, подчиненную экспоненциальному закону, причем опасность отказа равна  $\lambda_1$  для элементов, сделанных на первом заводе, и равна  $\lambda_2$  для элементов, сделанных на втором заводе. Допустим, наконец, что продукция обоих заводов хаотически перемешивается. Легко видеть, что надежность наугад взятого элемента выражается формулой

$$P(t) = p_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 e^{-\lambda_2 t}.$$

Если вместо двух заводов взять произвольное число  $n$ , оставив неизменными прочие условия, то получим функцию надежности

$$P(t) = \sum_{k=1}^n p_k e^{-\lambda_k t}.$$

Мы можем, наконец, предположить, что опасность отказа  $\lambda$  является случайной величиной, заданной на множестве элементов. Пусть  $F(\lambda)$  — закон распределения величины  $\lambda$ . Тогда, как и выше, функция надежности

$$P(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda). \quad (2.2.32)$$

Чтобы понять, когда такая модель реализуется, вернемся к примеру на стр. 99, в котором мы говорили о разрыве пайки. Опасность отказа  $\lambda$  в этом примере зависит от критической силы  $F_0$ ,  $\lambda = \lambda(F_0)$ . Но ясно, что эта сила определяется качеством пайки и меняется от элемента к элементу, являясь случайной величиной.

Докажем теперь, что элементы, функция надежности которых определяется формулой (2.2.32), обладают следующим свойством: *опасность отказа у таких элементов монотонно убывает*. Опасность отказа из (2.2.32) равна

$$\lambda(t) = \frac{\int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dF(\lambda)}{\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda)}.$$

Для монотонного убывания функции  $\lambda(t)$  достаточно, чтобы

$$\lambda'(t) = \frac{\left[ \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dF(\lambda) \right]^2 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda) \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} dF(\lambda)}{\left[ \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda) \right]^2} \leq 0.$$

Так как знаменатель положителен, то достаточно доказать, что числитель отрицателен. Для этого рассмотрим интеграл

$$0 \leq \int_0^{\infty} (z - \lambda)^2 e^{-\lambda t} dF(\lambda) = Az^2 - 2Bz + C,$$



где

$$A = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dF(\lambda), \quad B = \int_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda t} dF(\lambda),$$

$$C = \int_0^{\infty} \lambda^2 e^{-\lambda t} dF(\lambda).$$

Квадратный трехчлен неотрицателен при любом  $z$ , поэтому его дискриминант

$$B^2 - AC \leq 0,$$

но это и есть числитель нашей дроби. Утверждение доказано. Можно показать еще, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lambda(t) = \lambda_0,$$

где  $\lambda_0$  есть наименьшая точка роста функции  $F(\lambda)$ . (Точкой роста функции  $F(\lambda)$  называется такая точка  $\lambda$ , для которой  $F(\lambda + \varepsilon) - F(\lambda - \varepsilon) > 0$  при любом  $\varepsilon > 0$ .) Рассмотренная нами модель хорошо объясняет тот известный из практики факт, что многие элементы с течением времени становятся все более и более надежными. Действительно, если элемент проработал безотказно до момента  $t_0$ , то его функция надежности равна

$$P(t_0, t_0 + t) = \frac{P(t_0 + t)}{P(t_0)} = e^{-\int_{t_0}^{t_0+t} \lambda(x) dx}.$$

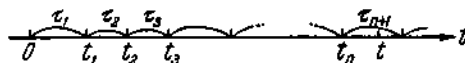
Но тогда из монотонного убывания  $\lambda(\tau)$  следует, что при любом  $t$  с ростом  $t_0$  эта функция возрастает, т. е. надежность элемента с течением времени растет.

### § 2.3. Надежность восстанавливаемого элемента

Определение процесса восстановления. В предыдущем параграфе мы изучали работу элемента до первого отказа. Теперь мы будем предполагать, что после отказа элемент восстанавливается. Это восстановление может носить различный характер: элемент может либо заменяться новым, идентичным ему элементом, либо подвергается такому ремонту, который полностью восстанавливает все его исходные свойства. Для нас несущественно, каким образом происходит восстановление, и в дальнейшем ради удобства мы будем считать, что в момент отказа элемент заменяется новым. Предположим также, что время восстановления пренебре-

жимо мало по сравнению с временем жизни элемента, и поэтому можно считать, что восстановление происходит мгновенно. Пусть элемент начинает свою работу в момент  $t=0$  и, проработав случайное время  $\tau_1$ , выходит из строя. В этот момент он заменяется новым элементом, который, проработав время  $\tau_2$ , выходит из строя и заменяется третьим элементом. Этот процесс продолжается неограниченно. Естественно предположить, что времена жизни элементов  $\tau_1, \tau_2, \dots$  независимы. Случайные времена  $\tau_1, \tau_2, \dots$  имеют один и тот же закон распределения, который мы обозначим через  $F(t)$ :

$$F(t) = P\{\tau_n < t\}.$$



Моменты отказов (рис. 2.3.1)

Рис. 2.3.1.

или восстановлений  $t_1 = \tau_1, t_2 = \tau_1 + \tau_2, \dots, t_n = \tau_1 + \dots + \tau_n, \dots$  образуют случайный поток, который мы будем называть *процессом восстановления* [12].

Предположим также, что среднее время жизни элемента и его дисперсия конечны:

$$T_0 = M\tau_n = \int_0^{\infty} [1 - F(t)] dt,$$

$$\sigma^2 = D\tau_n = 2 \int_0^{\infty} t [1 - F(t)] dt - T_0^2. \quad (2.3.1)$$

Пусть, наконец, существует непрерывная плотность распределения  $f(x) = F'(x)$ .

Основные характеристики процесса восстановления. При изучении процесса восстановления основную роль играет случайная величина  $v(t)$ , равная числу отказов, происшедших за время  $t$ .

Величина  $v(t)$  определяется из условия

$$t_{v(t)} < t \leq t_{v(t)+1}. \quad (2.3.2)$$

Величина  $v(t)$  может принимать только целые неотрицательные значения. Найдем распределение  $v(t)$ . Для этого заметим, что

$$P\{v(t) \geq n\} = P\{t_n < t\} = P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n < t\} = F_n(t), \quad (2.3.3)$$

где функции  $F_n(t)$  — законы распределения  $t_n$  — определяются так:

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-\tau) dF(\tau), \quad F_1(t) = F(t).$$

Из этого очевидного, но важного равенства (2.3.3) следует, что

$$P_n(t) = \mathbf{P}\{v(t) = n\} = F_n(t) - F_{n+1}(t). \quad (2.3.4)$$

В частности,

$$P_0(t) = 1 - F(t).$$

Эти формулы и дают искомое распределение  $v(t)$ . Фундаментальное значение при изучении процесса восстановления играет так называемая функция восстановления  $H(t)$ , которая равна среднему числу отказов, происшедших до момента  $t$ . Используя формулы (2.3.4), мы можем легко найти эту функцию:

$$\begin{aligned} H(t) = \mathbf{M}v(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n P_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n [F_n(t) - F_{n+1}(t)] = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n F_n(t) - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) F_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t), \end{aligned}$$

или

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t). \quad (2.3.5)$$

Можно показать, что функция  $H(t)$  всегда конечна. Функция  $H(t)$  удовлетворяет интегральному уравнению [12]

$$H(t) = F(t) + \int_0^t H(t-\tau) dF(\tau), \quad (2.3.6)$$

которое удобно использовать при изучении некоторых свойств  $H(t)$ . Важная роль функции  $F(t)$  объясняется тем, что через нее выражаются все основные характеристики нашего процесса. Так, дисперсия числа отказов  $v(t)$  равна

$$\mathbf{D}v(t) = 2 \int_0^t H(t-\tau) dH(\tau) + H(t) - H^2(t). \quad (2.3.7)$$

Среднее число отказов на участке  $(t_1, t_2)$ , очевидно, равно  $H(t_2) - H(t_1)$ .

Вместо функции  $H(t)$  часто рассматривают дифференциальную характеристику

$$h(t) = H'(t).$$

Функция  $h(t)$  называется плотностью восстановления<sup>1)</sup>. Она равна среднему числу отказов, происшедших в момент  $t$  за единицу вре-

<sup>1)</sup> В теории надежности функцию  $h(t)$  называют также интенсивностью отказов.

мени, начиная с момента  $t$  (если эта единица мала). Из (2.3.5) следует, что плотность восстановления выражается рядом

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t), \quad \text{где } f_n(t) = F'_n(t). \quad (2.3.8.)$$

Рассмотренные нами величины  $P_n(t)$ ,  $H(t)$  и  $h(t)$  можно использовать при решении некоторых задач теории надежности. Пусть, например, нам нужно найти наименьшее число запасных элементов  $n$ , которых с вероятностью, не меньшей  $1 - \alpha$  ( $\alpha$  — малое число), хватит на время  $t$ . Чтобы  $n$  запасных элементов хватило на время  $t$ , число отказов за это время не должно превосходить  $n$ . Отсюда для определения  $n$  мы получаем условие

$$P\{v(t) \leq n\} \geq 1 - \alpha \quad \text{или} \quad P\{v(t) > n\} < \alpha.$$

Из формулы (2.3.3) получаем

$$F_{n+1}(t) < \alpha. \quad (2.3.9)$$

Наименьшее  $n$ , при котором выполняется это неравенство, и дает нам искомое число запасных элементов. Надо заметить, что  $n$ -кратная свертка функции  $F(t)$   $F_n(t)$  лишь в редких случаях вычисляется в конечном виде. Перечислим эти случаи для тех распределений, которые встречаются в теории надежности.

1°. *Экспоненциальный закон*

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}.$$

В этом случае процесс восстановления будет образовывать пуассоновский поток и наши характеристики имеют простой вид

$$P_n(t) = P\{v(t) = n\} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad (2.3.10)$$

$$H(t) = \lambda t, \quad h(t) = \lambda.$$

Заметим, что среди всех процессов восстановления только пуассоновский процесс является стационарным процессом без последействия.

2°. *Нормальный закон*. Как и выше, мы предполагаем, что  $\sigma \ll T_0$ . Тогда

$$F_n(t) = \Phi\left(\frac{t - nT_0}{\sigma \sqrt{n}}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Функция восстановления

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi\left(\frac{t - nT_0}{\sigma \sqrt{n}}\right) \quad (2.3.11)$$

может быть легко вычислена с помощью таблиц. Плотность восстановления

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi n\sigma}} e^{-\frac{(t-nT_0)^2}{2\sigma^2 n}} \quad (2.3.12)$$

имеет характерный колеблющийся вид (рис. 2.3.2).

3°. *Гамма-распределение.*

Для него плотность

$$f(t, \alpha) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Легко показать, что

$$f_n(t, \alpha) = f(t, n\alpha) = \frac{\lambda^{n\alpha} t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda t}$$

и, значит, плотность восстановления выражается рядом

$$h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n\alpha} t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda t}. \quad (2.3.13)$$

Рис. 2.3.2.

При целом  $\alpha = m$  этот ряд суммируется

$$h(t) = \lambda \frac{1 + e^{\lambda t} (e^{-1}) + e^{2\lambda t} (e^2 - 1) + \dots + e^{(m-1)\lambda t} (e^{m-1} - 1)}{m},$$

где

$$e = \cos \frac{2\pi}{m} + i \sin \frac{2\pi}{m}.$$

Отсюда

$$H(t) = \frac{\lambda t + \frac{e}{e-1} e^{\lambda t} (e-1) + \dots + \frac{e^{m-1}}{e^{m-1}-1} e^{\lambda t} (e^{m-1}-1)}{m}.$$

Для других законов распределения, которые используются в теории надежности, функции  $F_n(t)$  не выражаются в конечном виде, и это, конечно, сильно затрудняет расчеты.

Полезно иметь наряду с точными формулами простые оценки для функции восстановления  $H(t)$ . Приведем некоторые из них. Из неравенства

$$\max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < \tau_1 + \dots + \tau_n = t_n$$

следует, что

$$F_n(t) = \mathbf{P}(t_n < t) \leq \mathbf{P}\left\{ \max_{1 \leq k \leq n} \tau_k < t \right\} = \mathbf{P}\{\tau_1 < t, \tau_2 < t, \dots, \tau_n < t\},$$

или

$$F_n(t) \leq F^n(t). \quad (2.3.14)$$

Отсюда

$$H(t) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(t) \leq \sum_{n=1}^{\infty} F^n(t) = \frac{F(t)}{1-F(t)}.$$

Принимая во внимание очевидное неравенство  $H(t) \geq F(t)$ , мы получаем желаемую оценку

$$F(t) \leq H(t) \leq \frac{F(t)}{1-F(t)}. \quad (2.3.15)$$

Из нее следует, что на начальном участке времени, где  $F(t) \ll 1$ , справедливо приближенное равенство

$$H(t) \approx F(t). \quad (2.3.16)$$

Далее, беря математическое ожидание от обеих частей неравенства

$$t \leq \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_{v(t)+1}$$

и используя тождество Вальда [12], мы получим

$$t \leq T_0 [H(t) + 1],$$

откуда

$$H(t) \geq \frac{t}{T_0} - 1.$$

С другой стороны, для стареющих элементов, у которых опасность отказа  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$  монотонно возрастает, можно получить оценку

$$H(t) \leq \frac{t}{T_0}.$$

Таким образом, функция восстановления стареющих элементов для любого момента  $t$  удовлетворяет неравенству

$$\frac{t}{T_0} - 1 \leq H(t) \leq \frac{t}{T_0}. \quad (2.3.17)$$

Асимптотическое поведение процесса восстановления. На практике основной интерес представляет изучение процесса восстановления для большого времени  $t$ , нас интересует поведение процесса на тех участках, которым предшествует большое число отказов. Поэтому, говоря математически, мы должны изучить асимптотическое поведение нашего процесса и его характеристик при  $t \rightarrow \infty$ .

Приведем теперь основные факты из теории восстановления, которая в основном и занимается изучением асимптотических свойств процесса восстановления [12].

1°. Для любого закона распределения  $F(t)$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{H(t)}{t} = \frac{1}{T_0}. \quad (2.3.18)$$

Интерпретация этого утверждения очень проста: для большого участка времени среднее число отказов, приходящихся на единицу времени, близко к величине, обратной среднему времени жизни элемента.

2°. Теорема Блекуэлла. Если случайное время  $\tau_i$  распределено непрерывно, то для любого  $\alpha$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [H(t + \alpha) - H(t)] = \frac{\alpha}{T_0}.$$

3°. Во многих вопросах очень удобно использовать теорему Смита, которую сам автор назвал узловой теоремой восстановления. Если время жизни элемента  $\tau_i$  распределено непрерывно, а  $Q(t)$  — монотонно невозрастающая, интегрируемая на  $(0, \infty)$  функция, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t Q(t - \tau) dH(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} Q(x) dx. \quad (2.3.19)$$

Это равенство удобно тем, что, беря различные функции  $Q(t)$ , мы можем получать различные предельные предложения для процесса восстановления.

4°. Если  $\tau_i$  имеют конечную дисперсию  $\sigma^2$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ H(t) - \frac{t}{T_0} \right] = \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}. \quad (2.3.20)$$

Отсюда следует, что для большого времени  $t$  верна приближенная формула

$$H(t) \approx \frac{t}{T_0} + \frac{\sigma^2}{2T_0^2} - \frac{1}{2}.$$

5°. Если непрерывная плотность распределения  $f(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \frac{1}{T_0}. \quad (2.3.21)$$

Это важное утверждение отражает тот факт, что с течением времени процесс восстановления становится стационарным и его локальные характеристики перестают зависеть от времени.

Исследуем теперь более подробно вопрос об асимптотическом поведении величины  $v(t)$  — числа отказов за время  $t$  — с ростом времени.

Вернемся к равенству (2.3.3)

$$P\{v(t) \geq n\} = P\{\tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n < t\}.$$

Так как величины  $\tau_i$  одинаково распределены и имеют конечную дисперсию  $\sigma^2$ , то дробь

$$\xi_n = \frac{\tau_1 + \dots + \tau_n - nT_0}{\sigma \sqrt{n}}$$

сходится при  $n \rightarrow \infty$  к нормальной случайной величине  $\xi$  с нулевым средним и дисперсией, равной единице. Пусть теперь  $t \rightarrow \infty$ , а

$$n = \frac{t}{T_0} + z_n \sqrt{t},$$

где  $z_n$  выбирается так, чтобы  $z_n \rightarrow z$  ( $z$  — произвольно выбранное число), а  $n$  было бы целым.

Перепишем равенство (2.3.3) в форме

$$P\left\{\frac{v(t) - \frac{t}{T_0}}{\sqrt{t}} \geq z_n\right\} = P\left\{\xi_n < -\frac{T_0 z_n \sqrt{t}}{\sigma \sqrt{\frac{t}{T_0} + z_n \sqrt{t}}}\right\}.$$

При  $t \rightarrow \infty$  мы получаем

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left\{\frac{v(t) - \frac{t}{T_0}}{\sqrt{t}} \geq z_n\right\} = P\left\{\xi < -\frac{T_0 z}{\sigma}\right\}. \quad (2.3.22)$$

Сделаем замену  $x = \frac{T_0 z}{\sigma}$ . Тогда

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\left\{\frac{v(t) - \frac{t}{T_0}}{\frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0}} \geq x\right\} = P\{\xi < -x\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt. \quad (2.3.23)$$

Отсюда следует, что случайная величина  $v(t)$  асимптотически нормальна со средним  $Mv(t) \sim \frac{t}{T_0}$  и дисперсией

$$Dv(t) \sim \frac{\sigma^2 t}{T_0^3}. \quad (2.3.24)$$



Доказанный факт позволяет просто и достаточно точно оценить возможное число отказов на большом интервале времени. Действительно, из равенства (2.3.23) мы получаем, что с вероятностью  $(1-\alpha)$  число отказов на большом интервале времени  $(0, t)$  будет заключено в пределах

$$\frac{t}{T_0} - u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}} < v(t) < \frac{t}{T_0} + u_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}}, \quad (2.3.25)$$

где  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  находится по таблицам для нормального закона из условия

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_{\frac{\alpha}{2}}}^{u_{\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 - \alpha.$$

*Рассчитан  
3 и 10*

Приведем пример. Пусть среднее время жизни элемента  $T_0 = 100$  час, дисперсия времени жизни  $\sigma^2 = 3600$  час<sup>2</sup>. Требуется с достоверностью 0,95 оценить число запасных элементов, необходимое для бесперебойной работы в течение времени  $t = 8000$  час. Учитывая, что в данном примере нам нужна лишь односторонняя оценка, мы при заданном  $\alpha = 0,05$  находим по таблицам  $u_{\alpha}$  из условия

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_{\alpha}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha;$$

$x_{\alpha} = 1,65$  (см. таблицу 3 приложения).

Тогда с вероятностью 0,95 выполняется неравенство

$$v(t) < \frac{t}{T_0} + x_{\alpha} \frac{\sigma \sqrt{t}}{T_0^{\frac{3}{2}}} = 80 + 1,65 \cdot 0,6 \sqrt{80} \approx 89;$$

отсюда следует, что для непрерывной работы в течение 8000 час нужно взять 89 запасных элементов.

Надежность элемента на заданном участке времени. Рассмотрим теперь другую интересную и не менее важную задачу: какова вероятность того, что элемент проработает безотказно на участке  $(t, t+\tau)$ . Эта задача возникает для таких устройств, которые постоянно находятся в рабочем состоянии, но выполняют свои функции лишь на отдельных участках времени.

Обозначим искомую вероятность  $p_t(\tau)$  и будем ее искать. Рассмотрим систему несовместных событий

$$A_0 = \{t + \tau < \tau_1\}, \quad A_n = \{t_n < t < t + \tau < t_n + \tau_{n+1}\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Событие  $A_n$  означает, что до момента  $t$  произошло ровно  $n$  отказов и на участке  $(t, t + \tau)$  отказов не было. Очевидно, что интересующее нас событие  $B$ , заключающееся в безотказной работе элемента на интервале  $(t, t + \tau)$ , есть сумма всех событий

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Отсюда в силу несовместности событий  $A_n$  мы получим

$$p_t(\tau) = \mathbf{P}\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\}.$$

Найдем теперь вероятность события  $A_n$ . По формуле полных вероятностей

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_n\} &= \mathbf{P}\{t_n < t < t + \tau < t_n + \tau_{n+1}\} = \\ &= \int_0^t \mathbf{P}\{x < t_n < x + dx\} \mathbf{P}\{\tau_{n+1} > t + \tau - x\} = \\ &= \int_0^t [1 - F(t + \tau - x)] f_n(x) dx. \end{aligned}$$

Отсюда

$$p_t(\tau) = 1 - F(t + \tau) + \int_0^t [1 - F(t + \tau - x)] h(x) dx. \quad (2.3.26)$$

Из этой формулы при  $\tau = \Delta t \rightarrow 0$  нетрудно получить, что

$$1 - p_t(\Delta t) = h(t) \Delta t + o(\Delta t). \quad (2.3.27)$$

Отсюда вытекает, что плотность восстановления  $h(t)$  равна вероятности отказа за единицу времени (если эта единица мала). Этот факт является, по-видимому, причиной того, что многие смешивают две различные характеристики — опасность отказа  $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)}$  и плотность восстановления  $h(t)$ . Эта путаница усугубляется еще и тем, что во многих работах обе величины,  $\lambda(t)$  и  $h(t)$ , имеют одно и то же название — интенсивность отказов. Между тем эти величины совершенно различны: плотность восстановления  $h(t)$  приближенно равна безусловной вероятности отказа

за единицу времени (которая достаточно мала), а  $\lambda(t)$  — условной вероятности отказа за единицу времени при условии, что до момента  $t$  отказов не было.

Формула (2.3.26) почти никогда не используется на практике, так как нас обычно интересуют далекие моменты времени, для которых процесс восстановления становится стационарным и вероятность  $p_t(\tau)$  перестает зависеть от времени  $t$ . Поэтому в равенстве (2.3.26) мы перейдем к пределу, устремив  $t \rightarrow \infty$ . Первое слагаемое в правой части  $1 - F(t + \tau)$  с ростом  $t$  стремится к нулю, а для нахождения предела интеграла

$$\int_0^t [1 - F(t + \tau - x)] h(x) dx$$

мы воспользуемся узловой теоремой восстановления, взяв в равенстве (2.3.19)

$$Q(x) = 1 - F(x + \tau).$$

Тогда мы получим

$$p(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} [1 - F(x + \tau)] dx,$$

или

$$p(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{\tau}^{\infty} [1 - F(t)] dt. \quad (2.3.28)$$

Интерпретировать полученный результат можно следующим образом. Время, протекшее от момента  $t$  до очередного отказа, мы

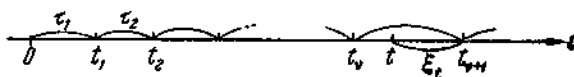


Рис. 2.3.3.

назовем остаточным временем жизни элемента и обозначим через  $\xi_t$  (рис. 2.3.3). Очевидно, что функция распределения для  $\xi_t$

$$P\{\xi_t > \tau\} = p_t(\tau).$$

С ростом  $t$  величина  $\xi_t$  сходится к некоторой стационарной величине  $\xi$ , функция распределения которой выражается формулой

$$P\{\xi > \tau\} = p(\tau) = \frac{1}{T_0} \int_{\tau}^{\infty} [1 - F(t)] dt.$$

Найдем некоторые характеристики этого закона. Среднее время

$$\begin{aligned} T_1 &= \int_0^{\infty} p(\tau) d\tau = \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} [1 - F(t)] dt = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} t [1 - F(t)] dt = \frac{1}{T_0} \int_0^{\infty} \frac{t^2}{2} f(t) dt = \frac{\sigma^2 + T_0^2}{2T_0}, \quad (2.3.29) \end{aligned}$$

или

$$T_1 = \frac{T_0}{2} + \frac{\sigma^2}{2T_0}.$$

Интересно заметить, что на первый взгляд среднее время  $T_1$  должно равняться  $\frac{T_0}{2}$ , так как момент  $t$  должен делить время жизни элемента  $\tau_{v+1}$  в среднем пополам. На самом деле, как видно из (2.3.29), среднее время больше. Это объясняется тем, что момент  $t$  с большей вероятностью попадет на больший интервал  $\tau_i$ , поэтому средняя длина того интервала  $\tau_i$ , на который попал момент  $t$ , будет больше, чем  $T_0$ .

Опасность отказа  $\lambda_1(t)$  для величины  $\xi$  выражается формулой

$$\lambda_1(t) = \frac{1 - F(t)}{\int_t^{\infty} [1 - F(t)] dt}. \quad (2.3.30)$$

Интересно заметить, что если элемент стареющий, т. е.  $\lambda(t)$  монотонно возрастает, то и  $\lambda_1(t)$  монотонно возрастает. Действительно, из (2.3.30) мы получаем

$$\frac{\lambda_1'(t)}{\lambda_1(t)} = \lambda_1(t) - \lambda(t).$$

С другой стороны,

$$1 - F(t) = \int_t^{\infty} f(x) dx = \int_t^{\infty} \lambda(x) [1 - F(x)] dx \geq \lambda(t) \int_t^{\infty} [1 - F(x)] dx,$$

откуда

$$\lambda_1(t) \geq \lambda(t),$$

и, следовательно,  $\lambda_1'(t) \geq 0$ , т. е.  $\lambda_1(t)$  монотонно возрастает.

Полезно иметь для функции  $p(t)$  простые оценки. Так как

$$p^*(t) = \frac{t(t)}{T_0} \geq 0,$$

то функция  $p(t)$  выпукла вниз и ее график лежит выше касательной.

Отсюда мы получаем оценку (рис. 2.3.4)

$$p(t) \geq 1 - \frac{t}{T_0}. \quad (2.3.30a)$$

Для стареющих элементов можно получить оценку и с другой

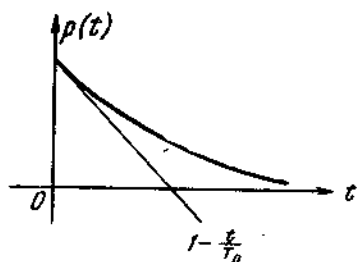


Рис. 2.3.4.

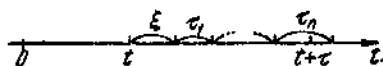


Рис. 2.3.5.

стороны. Как мы показали, из монотонного возрастания  $\lambda(t)$  следует монотонное возрастание  $\lambda_1(t)$ . Но тогда

$$\lambda_1(t) \geq \lambda_1(0) = \frac{1}{T_0},$$

откуда

$$\int_0^T \lambda_1(t) dt \geq \frac{T}{T_0},$$

а для функции надежности мы получим

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(t) dt} \leq e^{-\frac{t}{T_0}}.$$

Соединяя эту оценку с оценкой (2.3.30), мы получаем двустороннюю оценку (рис. 2.3.5)

$$1 - \frac{t}{T_0} \leq p(t) \leq e^{-\frac{t}{T_0}}. \quad (2.3.31)$$

Следовательно, для стареющих элементов справедливо приближенное равенство

$$p(t) \approx 1 - \frac{t}{T_0}, \quad (2.3.32)$$

которое имеет ошибку, не превосходящую

$$\frac{1}{2} \left( \frac{t}{T_0} \right)^2.$$

Вычислим теперь для стационарного случая вероятность появления на  $(t, t + \tau)$  ровно  $n$  отказов. Обозначим случайное число отказов на  $(t, t + \tau)$  через  $v_\tau$ . Тогда

$$P\{v_\tau \geq n\} = P\{\xi + \tau_1 + \dots + \tau_{n-1} < \tau\}$$

и, так как величины  $\xi$  и  $\tau_i$  независимы, то

$$P\{v_\tau \geq n\} = \frac{1}{T_0} \int_0^\tau [1 - F(\tau - x)] F_{n-1}(x) dx,$$

откуда

$$\begin{aligned} P\{v_\tau = n\} &= \frac{1}{T_0} \int_0^\tau [1 - F(\tau - x)] [F_{n-1}(x) - F_n(x)] dx = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^\tau [F_{n-1}(x) - 2F_n(x) + F_{n+1}(x)] dx. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

Заметим еще, что согласно теореме Блекуэлла среднее число отказов на  $(t, t + \tau)$  при большом  $t$  равно

$$Mv_\tau = \frac{\tau}{T_0}. \quad (2.3.34)$$

Из формулы (2.3.33) можно вычислить и дисперсию  $v_\tau$ . Она равна

$$Dv_\tau = \frac{2}{T_0} \int_0^\tau \left[ H(x) - \frac{x}{T_0} + \frac{1}{2} \right] dx. \quad (2.3.35)$$

Заметим еще, что при  $\tau \rightarrow \infty$  справедлива предельная теорема (2.3.23), т. е.  $v_\tau$  распределена асимптотически нормально со средним  $\frac{\tau}{T_0}$  и дисперсией  $\frac{\sigma^2 \tau}{T_0^2}$ .

Процесс восстановления с конечным временем восстановления. До сих пор мы предполагали, что восстановление отказавшего элемента происходит мгновенно. В действительности это восстановление требует часто времени, которым нельзя пренебречь, которое сравнимо со временем жизни элемента. Время восстановления складывается обычно из времени, которое нужно, чтобы найти неисправный элемент или обнаружить, что он неисправен, и времени, которое требуется, чтобы заменить отказавший элемент новым или произвести ремонт отказавшего элемента. Ниже мы будем рассматривать время восстановления в целом, не интересуясь, из каких частей оно складывается.

Итак, будем рассматривать следующий процесс (рис. 2.3.6). Элемент, проработав случайное время  $\tau_1$ , выходит из строя и

восстанавливается в течение случайного времени  $\tau_1'$ ; восстановленный элемент работает время  $\tau_2'$  и восстанавливается время  $\tau_2''$ ; и т. д. Моменты

$$t_n' = \tau_1' + \tau_1'' + \tau_2' + \tau_2'' + \dots + \tau_{n-1}' + \tau_{n-1}'' + \tau_n', \quad n = 1, 2, \dots,$$

будем называть *отказами элемента*, а моменты

$$t_n'' = \tau_1' + \tau_1'' + \tau_2' + \tau_2'' + \dots + \tau_n' + \tau_n'', \quad t_0'' = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

будем называть *восстановлениями*.

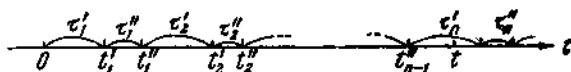


Рис. 2.3.6.

Мы будем предполагать, что все величины  $\tau_i'$  и  $\tau_j''$  независимы. Предположим также, что все периоды работы  $\tau_n$  распределены одинаково по закону

$$F(t) = P\{\tau_n' < t\}$$

со средним  $T_1 = M\tau_n'$  и дисперсией  $\sigma_1^2 = D\tau_n'$  и все периоды восстановления также распределены одинаково по закону

$$G(t) = P\{\tau_n'' < t\}$$

со средним  $T_2 = M\tau_n''$  и дисперсией  $\sigma_2^2 = D\tau_n''$ . Будем ради удобства предполагать, что эти законы имеют непрерывную плотность  $f(t) = F'(t)$  и  $g(t) = G'(t)$ . Кроме того, чтобы не отвлекаться на вырожденный случай, будем считать, что  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 \neq 0$ . Определенный таким образом процесс будем называть *процессом восстановления с конечным временем восстановления*.

Рассмотрим основные характеристики этого процесса.

*Коэффициент готовности.* Основной характеристикой надежности нашего элемента является так называемый *коэффициент готовности*  $k_G(t)$ , который равен вероятности того, что в момент  $t$  наш элемент находится в исправном состоянии.

Для определения коэффициента готовности рассмотрим события

$$A_n = \{t_n'' < t < t_{n+1}'\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Событие  $A_n$  означает, что до момента  $t$  произошло ровно  $n$  восстановлений и в момент  $t$  элемент исправен. Очевидно, что собы-

тие  $B$ , заключающееся в исправной работе элемента в момент  $t$ , равно сумме всех событий  $A_n$

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n.$$

Отсюда в силу несовместимости событий  $A_n$  мы получим

$$k_T(t) = \mathbf{P}\{B\} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{A_n\}. \quad (2.3.36)$$

Чтобы определить вероятности  $\mathbf{P}\{A_n\}$ , введем некоторые обозначения.

Пусть

$$t_{n1} = \tau'_1 + \tau'_2 + \dots + \tau'_n \quad \text{и} \quad t_{n2} = \tau''_1 + \tau''_2 + \dots + \tau''_n.$$

Заметим, что  $t_{n1} + t_{n2} = t_n$ . Законы распределения  $t_{n1}$ ,  $t_{n2}$  и  $t_n$  обозначим так:

$$\mathbf{P}\{t_{n1} < t\} = F_n(t), \quad \mathbf{P}\{t_{n2} < t\} = G_n(t)$$

и

$$\mathbf{P}\{t_n < t\} = \Phi_n(t),$$

а их плотности —  $f_n(t) = F'_n(t)$  и  $g_n(t) = G'_n(t)$ . Эти законы определяются через исходные законы  $F(t)$  и  $G(t)$  следующим образом:

$$F_n(t) = \int_0^t F_{n-1}(t-x) dF(x), \quad F_1(t) = F(t),$$

$$G_n(t) = \int_0^t G_{n-1}(t-x) dG(x), \quad G_1(t) = G(t)$$

и

$$\Phi_n(t) = \int_0^t F_n(t-x) dG_n(x).$$

Вернемся теперь к вычислению вероятностей  $\mathbf{P}\{A_n\}$ .

По формуле полных вероятностей

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{A_n\} &= \mathbf{P}\{t_n < t < t_n + \tau'_{n+1}\} = \\ &= \int_0^t \mathbf{P}\{x < t_n < x + dx\} \mathbf{P}\{\tau'_{n+1} > t - x\} = \\ &= \int_0^t [1 - F(t-x)] \varphi_n(x) dx. \end{aligned}$$



Подставляя найденные вероятности в формулу (2.3.36), получим

$$k_r(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - F(t-x)] h_2(x) dx, \quad (2.3.37)$$

где 
$$h_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x).$$

Моменты восстановлений  $t_n''$  образуют процесс восстановления. Функция  $h_2(t)$  является, очевидно, плотностью восстановления для этого процесса. Среднее расстояние между соседними точками этого процесса равно

$$M(\tau_n' + \tau_n'') = T_1 + T_2.$$

Формула (2.3.37) почти никогда не используется, так как на практике под коэффициентом готовности понимают обычно то стационарное значение, к которому стремится функция  $k_r(t)$  с ростом времени. В равенстве (2.3.37) устремим  $t$  к бесконечности. Воспользуемся опять узловой теоремой восстановления, взяв в равенстве (2.3.19)

$$Q(x) = 1 - F(x).$$

Тогда

$$k_r = \lim_{t \rightarrow \infty} k_r(t) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_0^{\infty} [1 - F(x)] dx,$$

откуда окончательно

$$k_r = \frac{T_1}{T_1 + T_2}. \quad (2.3.38)$$

Можно привести еще один эвристический вывод коэффициента готовности.

Возьмем большой участок времени, на котором умещается ровно  $n$  периодов работы и  $n$  периодов восстановления, и рассмотрим отношение

$$\frac{t_{n1}}{t_{n1} + t_{n2}} = \frac{\tau_1' + \dots + \tau_n'}{\tau_1' + \dots + \tau_1'' + \tau_1'' + \dots + \tau_n''},$$

равное доле времени, которое элемент пребывает в исправном состоянии. При  $n \rightarrow \infty$  дроби

$$\frac{\tau_1' + \dots + \tau_n'}{n} \quad \text{и} \quad \frac{\tau_1' + \dots + \tau_n''}{n}$$

согласно закону больших чисел с вероятностью единица сходятся по вероятности к соответствующим средним  $T_1$  и  $T_2$ . Поэтому наша дробь сходится по вероятности

$$\frac{\frac{\tau'_1 + \dots + \tau'_n}{n}}{\frac{\tau'_1 + \dots + \tau'_n}{n} + \frac{\tau''_n + \dots + \tau''_n}{n_n}} \rightarrow \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Отсюда видно, что коэффициент готовности есть *средняя доля времени, которое система пребывает в исправном состоянии.*

Для процесса восстановления с конечным временем восстановления мы можем рассмотреть две случайные величины

$v_1(t)$  — число отказов на  $(0, t)$ ,

$v_2(t)$  — число восстановлений на  $(0, t)$

и соответствующие средние

$Mv_1(t) = H_1(t)$  — среднее число отказов на  $(0, t)$

и

$Mv_2(t) = H_2(t)$  — среднее число восстановлений на  $(0, t)$ .

Так как нас в основном интересует поведение этих величин для больших значений  $t$ , а асимптотически  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  ведут себя одинаково, ибо они могут отличаться друг от друга самое большее на единицу, то мы рассмотрим только моменты восстановлений. Расстояния между соседними моментами суть случайные величины

$$\tau_n = \tau'_n + \tau''_n,$$

распределенные по закону

$$P\{\tau_n < t\} = \Phi(t) = \int_0^t F(t-x) dG(x).$$

Поэтому функция восстановления

$$H_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(t),$$

а плотность восстановления

$$h_2(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(t), \quad \varphi_n(t) = \Phi'_n(t).$$

С ростом времени  $h_2(t)$  приближается к пределу  $\frac{1}{T_1 + T_2}$ ; это — среднее число восстановлений за единицу времени. Величина  $v_2(t)$

при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически нормальна со средним  $\frac{t}{T_1 + T_2}$  и дисперсией  $\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t}{(T_1 + T_2)^2}$ , что дает возможность, как и выше, оценивать число восстановлений за время  $t$ . Заметим, что число отказов  $v_1(t)$  за время  $t$  имеет точно такую же асимптотику.

Совершенно аналогично ищется в нашем случае вероятность безотказной работы на  $(t, t + \tau)$ . Она равна

$$p_t(\tau) = 1 - F(t + \tau) + \int_0^t [1 - F(t + \tau - x)] h_2(x) dx.$$

Воспользовавшись, как и выше, узловой теоремой восстановления, мы получим, что

$$p(\tau) = \lim_{t \rightarrow \infty} p_t(\tau) = \frac{1}{T_1 + T_2} \int_0^\infty [1 - F(x)] dx. \quad (2.3.39)$$

Эту формулу можно записать также в виде

$$p(\tau) = k_c \frac{1}{T_1} \int_0^\infty [1 - F(x)] dx,$$

откуда следует, что вероятность безотказной работы в течение времени  $\tau$  равна произведению вероятности того, что в начальный момент мы застанем систему исправной, на вероятность исправной работы элемента в течение времени  $\tau$  для обычного процесса с мгновенным восстановлением (см. (2.3.28)).

Случай экспоненциальных законов. На практике часто рассматривают специальный случай процесса восстановления с конечным временем восстановления, когда длительность жизни и длительность восстановления элемента подчинены экспоненциальному закону

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}, \quad G(t) = 1 - e^{-\mu t}.$$

Все характеристики для этого случая можно было бы вывести из общих формул, но удобнее и поучительнее рассмотреть этот случай отдельно. Если обозначить через  $\pi(t)$  вероятность исправного состояния, а через  $r(t) = 1 - \pi(t)$  — вероятность неисправного состояния в момент  $t$ , то, сравнивая наш процесс в два бесконечно близких момента времени  $t$  и  $t + \Delta t$ , мы по формуле полных вероятностей получим

$$\pi(t + \Delta t) = [1 - (\lambda \Delta t + o(\Delta t))] \pi(t) + [\mu \Delta t + o(\Delta t)] r(t).$$

Переходя к пределу, мы получим дифференциальное уравнение

$$\pi'(t) = -\lambda\pi(t) + \mu r(t),$$

или

$$\pi'(t) + (\lambda + \mu)\pi(t) = \mu.$$

Решая это уравнение, мы найдем искомую вероятность, которая, как легко видеть, есть коэффициент готовности

$$k_r(t) = \pi(t) = \frac{\mu + \lambda e^{-(\lambda + \mu)t}}{\mu + \lambda}. \quad (2.3.40)$$

Стационарное значение этого коэффициента равно

$$k_r = \lim_{t \rightarrow \infty} k_r(t) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

Вероятность исправной работы на  $(t, t + \tau)$  при большом  $t$  выражается так:

$$p(\tau) = \frac{\mu}{\lambda + \mu} e^{-\lambda\tau}. \quad (2.3.41)$$

Из формулы (2.3.40) видно, с какой скоростью приближается коэффициент готовности к своему предельному значению  $\frac{\mu}{\lambda + \mu}$ . Скорость оказывается экспоненциальной

$$k_r(t) - k_r = \frac{\lambda}{\mu + \lambda} e^{-(\lambda + \mu)t} < e^{-(\lambda + \mu)t}.$$

В общем случае для произвольных законов  $F(t)$  и  $G(t)$  найти, с какой скоростью наш процесс устанавливается, очень трудно. Можно высказать только одно качественное соображение — при фиксированных средних временах процесс устанавливается тем медленнее, чем меньше суммарная дисперсия  $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ . Заметим еще, что если плотности  $f(t)$  и  $g(t)$  стремятся к нулю с экспоненциальной скоростью, т. е.

$$\begin{aligned} f(t) &< C_1 e^{-a_1 t}, \\ g(t) &< C_2 e^{-a_2 t}, \end{aligned}$$

то и наш процесс устанавливается с экспоненциальной скоростью

$$|k_r(t) - k_r| < C e^{-a t}.$$

Распределение суммарной наработки. Рассмотрим теперь такую задачу. Назовем *суммарной наработкой* за время  $t$  сумму всех периодов работы  $\tau_i$  до момента  $t$ , включая, может быть, и неполный период работы, примыкающий к моменту  $t$

(рис. 2.3.7). Обозначим суммарную наработку через  $h_t$ . Наша задача заключается в том, чтобы найти закон распределения случайной величины  $h_t$  и исследовать ее асимптотическое поведение при  $t \rightarrow \infty$ .

Введем в рассмотрение еще одну случайную величину  $\tau_s$ , равную тому случайному моменту, когда суммарная наработка достигнет величины  $s$ . На практике часто задают суммарную наработку изделия  $s$ , по достижении которой изделие заменяется

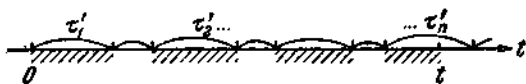


Рис. 2.3.7.

новым. Тогда  $\tau_s$  будет календарным временем жизни изделия, и для нас важно уметь заранее оценить это время. Легко заметить, что между величинами  $h_t$  и  $\tau_s$  существует простая связь

$$\mathbf{P}\{h_t < s\} = \mathbf{P}\{\tau_s > t\}. \quad (2.3.42)$$

Чтобы найти точный закон распределения  $h_t$  (а значит, и  $\tau_s$ ), рассмотрим отдельно два потока: поток, образованный последовательными, рабочими периодами, и поток, образованный периодами восстановления. Пусть  $v_1(t)$  — число отказов до момента  $t$  в первом потоке, а  $v_2(t)$  — число восстановлений до момента  $t$  во втором потоке. Докажем, что следующие два события эквивалентны, а значит, их вероятности равны

$$\{v_1(s) \geq v_2(t-s)\} = \{\tau_s > t\}.$$

Заметим прежде всего, что с вероятностью единица момент  $\tau_s$  попадет внутрь рабочего периода. Поэтому

$$v_1(s) = v_2(\tau_s - s),$$

так как число отказов, происшедших до момента  $\tau_s$ , равно числу восстановлений до этого момента. Тогда из события  $\tau_s > t$  следует, что  $v_1(s) = v_2(\tau_s - s) \geq v_2(t - s)$ . Наоборот, если произошло событие  $v_2(t - s) \geq v_1(s) = v_2(\tau_s - s)$ , то  $t \leq \tau_s$  в силу монотонности функции  $v_2(x)$ , что эквивалентно неравенству  $t < \tau_s$ .

Итак, вероятность

$$\Phi(s, t) = \mathbf{P}\{h_t < s\} = \mathbf{P}\{\tau_s > t\} = \mathbf{P}\{v_1(s) \geq v_2(t - s)\}. \quad (2.3.43)$$

Но последнюю вероятность можно легко вычислить, зная распределение  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$ . По формуле (2.3.4) мы легко получим, что

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= \mathbf{P}\{h_t < s\} = \mathbf{P}\{\tau_s > t\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [G_n(t-s) - G_{n+1}(t-s)] F_n(s), \quad (2.3.44) \end{aligned}$$

где, как обычно,

$$F_0(x) = G_0(x) \equiv 1.$$

Полученную формулу можно использовать, если время  $t$  невелико по сравнению со средним временем жизни и восстановления элемента, хотя и в этом случае выкладки велики. Заметим еще, что ряд (2.3.44) существенно не упрощается даже для экспоненциального закона, когда

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad G(x) = 1 - e^{-\mu x}.$$

Для этого случая мы получаем

$$\Phi(s, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[\mu(t-s)]^n}{n!} e^{-\mu(t-s)} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s}. \quad (2.3.45)$$

Если же время  $t$  велико, то для вычисления рядов (2.3.44) и (2.3.45) потребуется брать много членов ряда, что делает эти формулы практически малоприменимыми. По этой причине мы исследуем асимптотическое поведение вероятности  $\Phi(s, t)$  при  $s$  и  $t \rightarrow \infty$ . Как уже было доказано (см. стр. 115), число восстановлений  $\nu(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  распределено асимптотически нормально со средним  $\frac{t}{T_0}$  и дисперсией  $\frac{\sigma^2 t}{T_0^2}$ . Отсюда следует, что при  $s \rightarrow \infty$  величина  $\nu_1(s)$  асимптотически нормальна со средним  $\frac{s}{T_1}$  и дисперсией  $\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^2}$ , а величина  $\nu_2(t-s)$  при  $t-s \rightarrow \infty$  асимптотически нормальна со средним  $\frac{t-s}{T_2}$  и дисперсией  $\frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^2}$ .

Так как величины  $\nu_1(s)$  и  $\nu_2(t-s)$  независимы, то их разность  $\nu_2(t-s) - \nu_1(s)$  при  $s$  и  $(t-s) \rightarrow \infty$  также асимптотически нормальна со средним  $\frac{t-s}{T_2} - \frac{s}{T_1}$  и дисперсией  $\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^2}$ .

Преобразуем вероятность  $\Phi(s, t)$

$$\begin{aligned} \Phi(s, t) &= \mathbf{P} \{ \nu_1(s) \geq \nu_2(t-s) \} = \\ &= \mathbf{P} \left\{ \frac{\nu_2(t-s) - \nu_1(s) - \frac{t-s}{T_2} + \frac{s}{T_1}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^2}}} \leq \frac{\frac{s}{T_1} - \frac{t-s}{T_2}}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2 s}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2 (t-s)}{T_2^2}}} \right\}. \end{aligned}$$

Пусть  $t \rightarrow \infty$  и  $s = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t + z \sqrt{t}$ . Тогда  $s, (t-s) \rightarrow \infty$  и левая часть неравенства под знаком вероятности асимптотически

нормальна со средним нуль и дисперсией единица. Правая часть этого неравенства имеет конечный предел, равный

$$x = \frac{z(\sqrt{T_1 + T_2})^3}{T_1 T_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}.$$

Отсюда при  $t \rightarrow \infty$  и

$$s = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t + \frac{T_1 T_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}}{(\sqrt{T_1 + T_2})^3} x \sqrt{t}$$

( $x$  — фиксированная величина)

$$\lim \Phi(s, t) = \lim \mathbf{P} \{h_t < s\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

или

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{h_t - \frac{T_1}{T_1 + T_2} t}{\sqrt{t} T_1 T_2 \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2}}} (\sqrt{T_1 + T_2})^3 < x \right\} = \\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (2.3.46)$$

Иными словами, величина  $h_t$  асимптотически нормальна со средним  $\mathbf{M}h_t \sim \frac{T_1}{T_1 + T_2} t$  и дисперсией

$$\mathbf{D}h_t \sim \frac{T_1^2 T_2^2 \left( \frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2} \right)}{(T_1 + T_2)^3} t.$$

Совершенно аналогично показывается, что при  $s \rightarrow \infty$  величина  $\tau_s$  асимптотически нормальна со средним  $\mathbf{M}\tau_s \sim \frac{T_1 + T_2}{T_1} s$  и дисперсией  $\mathbf{D}\tau_s \sim \left( \frac{\sigma_1^2}{T_1^2} + \frac{\sigma_2^2}{T_2^2} \right) \frac{T_2^2 s}{T_1}$ .

Приведем один пример. Пусть  $T_1 = 5$  час,  $T_2 = 3$  час,  $\sigma_1 = 3$  час,  $\sigma_2 = 2$  час. Требуется оценить суммарную наработку  $h_t$  за время  $t = 800$  час. Из общих формул получаем, что

$$\mathbf{M}h_t \sim 500 \text{ час}, \quad \sqrt{\mathbf{D}h_t} \sim 13 \text{ час}.$$

Значит, например, с вероятностью 0,95 суммарная наработка будет заключена в пределах

$$474 < h_t < 526.$$

Найденное выше распределение суммарной наработки позволяет легко решить еще одну задачу.

Надежность устройства с переменным режимом работы. Придадим случайным величинам  $\tau_1, \tau_1, \tau_2, \tau_2, \dots$  другой физический смысл. Предположим, что рассматриваемый элемент может находиться в двух состояниях, которые периодически сменяют друг друга и  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  — времена пребывания элемента в первом состоянии, а  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  — времена пребывания элемента во втором состоянии. Пусть, находясь в первом состоянии, элемент может отказать за время  $\Delta t$  с вероятностью  $\lambda_1 \Delta t + o(\Delta t)$  независимо от прошлого поведения элемента, а находясь во втором состоянии, элемент за время  $\Delta t$  может отказать с вероятностью  $\lambda_2 \Delta t + o(\Delta t)$ . Требуется найти вероятность безотказной работы элемента на участке  $(0, t)$ .

Легко видеть, что эта вероятность равна

$$P = \mathbf{M} [e^{-\lambda_1 h_1 - \lambda_2 (t - h_1)}]. \quad (2.3.47)$$

Пусть теперь время  $t$  велико. Тогда  $h_1$  асимптотически нормальна. Обозначим через  $h_0$  ее среднее, а через  $\sigma_0^2$  — ее дисперсию. Из (2.3.47) получим<sup>1)</sup>

$$P \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\lambda_1 x - \lambda_2 (t-x) - \frac{(x-h_0)^2}{2\sigma_0^2}} dx.$$

После замены  $\frac{x-h_0}{\sigma_0} = z$  имеем

$$P \approx e^{-\lambda_1 h_0 - \lambda_2 (t-h_0)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{z^2}{2} + (\lambda_2 - \lambda_1) \sigma_0 z} dz.$$

Вычисляя последний интеграл, приходим к формуле

$$P \approx e^{-\lambda_1 h_0 - \lambda_2 (t-h_0) + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \sigma_0^2}{2}}.$$

<sup>1)</sup> Интеграл берется в полных пределах, а не от нуля до  $t$ , потому что на промежутках  $(-\infty, 0)$  и  $(t, \infty)$  он практически равен нулю.



Величины  $h_0$  и  $\sigma_0$  были найдены выше; в частности,  $h_0 = \frac{T_1}{T_1 + T_2} t$ , и мы приходим к окончательной формуле

$$P \approx e^{-\frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{T_1 + T_2} t + \frac{(\lambda_2 - \lambda_1)^2 \sigma_0^2}{2}} \quad (2.3.48)$$

Вероятность  $P$  часто считают по очень грубой формуле

$$P \approx e^{-\frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{T_1 + T_2} t} \quad (2.3.49)$$

Наша формула является более точной, а второе слагаемое в показателе определяет, какова погрешность этой грубой формулы. На практике периоды  $\tau_1, \tau_2, \dots$  часто рассматривают как периоды простоя элемента, и в этом случае  $\lambda_2 = 0$ , а формула (2.3.48) получает вид

$$P \approx e^{-\frac{\lambda_1 T_1}{T_1 + T_1} t + \frac{\lambda_1^2 \sigma_0^2}{2}} \quad (2.3.50)$$

Рассмотренная нами задача является частным случаем более общей задачи, которая ставится так: Устройство может находиться в  $n$  состояниях. Находясь в  $k$ -м состоянии, оно может отказать за время  $\Delta t$  с вероятностью

$$\lambda_k \Delta t + o(\Delta t).$$

Время пребывания в  $k$ -м состоянии есть случайная величина, распределенная по закону  $F_k(x)$ . Смена состояний образует марковскую цепь, т. е. вероятность перехода из  $k$ -го состояния в  $i$ -е состояние не зависит от прошлого и от длительности  $k$ -го состояния и равна  $p_{ki}$ .

Пусть  $\tau_k(t)$  — суммарное время пребывания устройства в состоянии  $k$  на участке  $(0, t)$ . Тогда вероятность безотказной работы устройства на  $(0, t)$  равна

$$P(t) = \text{Me}^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k(t)}.$$

Если время  $t$  очень велико, то нетрудно показать, что

$$P(t) \approx e^{-\left(\sum_{k=1}^n \lambda_k p_k\right) t}, \quad (2.3.51)$$

где  $p_k$  — финальные вероятности в нашей марковской цепи, или, говоря другими словами,  $p_k$  — вероятность того, что в наугад взятый момент времени устройство находится в состоянии  $k$ .

Если доказать, что сумма  $\tau(t) = \sum_{k=1}^n \lambda_k \tau_k(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  асимптотически нормальна, и вычислить ее дисперсию  $D\tau(t) = \sigma^2$ , то, как и выше, нетрудно показать, что

$$P(t) \approx e^{-\sum_{k=1}^n \lambda_k \rho_k t + \frac{\sigma^2}{2}}. \quad (2.3.52)$$

## § 2.4. Надежность системы

Надежность системы с независимыми элементами, работающей до первого отказа. Под *системой* мы будем понимать любое устройство, состоящее из частей, надежность которых задана. Эти части мы будем называть *элементами*. Структура системы и характер ее работы должны быть известны нам настолько, чтобы для любой группы элементов системы мы знали, вызывает ли отказ всех элементов этой группы отказ системы или нет. Мы предположим также, что *элементы отказывают независимо друг от друга*, т. е. отказ любой группы элементов не изменяет надежности других элементов.

Рассмотрим вначале работу системы до ее первого отказа. В этом случае надежность системы полностью определяется функцией надежности  $P(t)$ , которая равна вероятности безотказной работы системы в течение времени  $t$ . Пусть система состоит из  $n$  элементов, функцию надежности которых мы обозначим через  $p_1(t)$ ,  $p_2(t)$ , ...,  $p_n(t)$ .

Наша задача заключается в том, чтобы выразить функцию надежности системы  $P(t)$  через функции надежности элементов.

Разберем сначала самый простой и самый важный случай. Мы скажем, что  $n$  элементов в системе соединены *последовательно в смысле надежности*, если отказ любого элемента вызывает отказ всей системы.

Тогда для безотказной работы системы в течение времени  $t$  нужно, чтобы каждый элемент работал безотказно в течение этого времени. Так как элементы независимы в смысле надежности, то

$$P(t) = p_1(t) p_2(t) \dots p_n(t). \quad (2.4.1)$$

Итак, при последовательном соединении функции надежности перемножаются. Выразим функции надежности через опасности отказа

$$e^{-\int_0^t \lambda(s) ds} = e^{-\int_0^t \lambda_1(s) ds - \dots - \int_0^t \lambda_n(s) ds},$$

откуда

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \dots + \lambda_n(t), \quad (2.4.2)$$

т. е. при последовательном соединении опасности отказа складываются. В частности, для экспоненциального закона, когда  $\lambda_k(t) = \lambda_k = \text{const}$ ,

$$\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_k$$

и

$$P(t) = e^{-(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)t}, \quad (2.4.3)$$

значит, надежность системы также будет подчиняться экспоненциальному закону. Если обозначить в этом случае через  $T_0$  среднее время жизни системы, а через  $T_k$  — среднее время жизни  $k$ -го элемента, то

$$T_0 = \frac{1}{\frac{1}{T_1} + \dots + \frac{1}{T_n}}. \quad (2.4.4)$$

В сложной системе всегда имеются группы одинаковых элементов. Если эти одинаковые элементы находятся в примерно одинаковых условиях или различие условий не влияет существенно на их надежность, то надежности этих элементов равны. Пусть, например, в первой группе находится  $n_1$  элементов с функцией надежности  $p_1(t)$ , во второй группе —  $n_2$  элементов с функцией надежности  $p_2(t)$  и т. д. Тогда формулы (2.4.1) — (2.4.4) записываются так:

$$P(t) = [p_1(t)]^{n_1} [p_2(t)]^{n_2} \dots [p_s(t)]^{n_s},$$

$$\lambda(t) = n_1 \lambda_1(t) + \dots + n_s \lambda_s(t),$$

а в случае экспоненциальных законов — в виде

$$\lambda = n_1 \lambda_1 + \dots + n_s \lambda_s,$$

$$T_0 = \frac{1}{\frac{n_1}{T_1} + \dots + \frac{n_s}{T_s}}.$$

В частности, когда все элементы системы имеют одинаковую надежность  $p_k(t) = p(t)$ , то

$$P(t) = [p(t)]^n, \quad \lambda(t) = n \lambda_1(t),$$

а для экспоненциального закона

$$\lambda = n \lambda_1, \quad T_0 = \frac{T_1}{n}.$$

Введем теперь в рассмотрение вероятности отказа

$$Q(t) = 1 - P(t) \text{ и } q_k(t) = 1 - p_k(t).$$

Тогда для последовательного соединения

$$Q(t) = 1 - [1 - q_1(t)][1 - q_2(t)] \dots [1 - q_n(t)]. \quad (2.4.5)$$

Можно доказать по индукции неравенство

$$\begin{aligned} 1 - (q_1 + \dots + q_n) &< (1 - q_1) \dots (1 - q_n) < \\ &< 1 - (q_1 + \dots + q_n) + (q_1 q_2 + q_1 q_3 + \dots + q_{n-1} q_n) < \\ &< 1 - (q_1 + \dots + q_n) + \frac{1}{2} (q_1 + \dots + q_n)^2, \end{aligned}$$

откуда следует, что если

$$q_1(t) + q_2(t) + \dots + q_n(t) \ll 1,$$

то справедлива приближенная формула

$$Q(t) \approx q_1(t) + \dots + q_n(t), \quad (2.4.6)$$

погрешность которой не превосходит

$$\frac{1}{2} [q_1(t) + \dots + q_n(t)]^2.$$

Рассмотрим теперь второй простейший случай соединения элементов в системе. Мы скажем, что *элементы в системе соединены параллельно*, если отказ системы наступает только тогда, когда отказывают все входящие в систему элементы.

Примером системы с таким соединением элементов является устройство, состоящее из нескольких частей, выполняющих одну и ту же функцию. Эта функция будет нарушена только тогда, когда откажут все эти части. Так как элементы независимы в смысле надежности, то мы получаем

$$Q(t) = q_1(t) q_2(t) \dots q_n(t), \quad (2.4.7)$$

т. е. при параллельном соединении вероятности отказа перемножаются. В частности, когда все элементы равнонадежны, а этот случай здесь наиболее интересен, мы получаем

$$Q(t) = q^n(t). \quad (2.4.8)$$

Если надежность каждого элемента подчиняется экспоненциальному закону, то надежность системы уже не будет подчиняться этому закону. Например, для случая равных элементов

$$Q(t) = (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

В этом случае можно найти среднее время жизни системы

$$T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt.$$

Сделаем замену  $1 - e^{-\lambda t} = x$ ,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{1-x}, \quad dt = \frac{dx}{\lambda(1-x)},$$

откуда

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1-x^n}{1-x} dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1+x+\dots+x^{n-1}) dx = \\ = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right),$$

или

$$T_0 = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right). \quad (2.4.9)$$

При большом  $n$

$$T_0 \approx \frac{1}{\lambda} [\ln n + C], \quad \text{где } C = 0,577\dots$$

Рассмотрим теперь общий случай надежности системы с независимыми элементами [14]. Пусть система состоит из  $n$  элементов и  $p_k(t)$  — функции надежности, а  $q_k(t) = 1 - p_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, n$ . Если нам известна структура системы, то для каждого множества элементов системы (а таких множеств  $2^n - 1$ ) нам должно быть известно, вызывает отказ всех элементов этого множества отказ системы или нет. Назовем *группой отказа* множество элементов, отказ которого вызывает отказ системы, а отказ любой собственной части этого множества еще не вызывает отказа системы.

Пусть

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_m$$

— все группы отказа.

Пусть  $A_k$  — событие, заключающееся в том, что группа  $\Gamma_k$  не отказала за время  $t$ , т. е. не отказал хотя бы один ее элемент.

Тогда надежность системы

$$P(t) = \mathbf{P}\{A_1 \dots A_m\} = 1 - \mathbf{P}\{\bar{A}_1 U \dots U \bar{A}_m\} = \\ = 1 - \sum_k \mathbf{P}\{\bar{A}_k\} + \sum_{k < l} \mathbf{P}\{\bar{A}_k \bar{A}_l\} - \sum_{k < l < s} \mathbf{P}\{\bar{A}_k \bar{A}_l \bar{A}_s\} + \dots, \quad (2.4.10)$$

где  $\bar{A}_k$  — событие, противоположное событию  $A_k$ . Любая вероятность вида

$$\mathbf{P}\{\bar{A}_{i_1} \bar{A}_{i_2} \dots \bar{A}_{i_s}\} = q_{s_1}(t) q_{s_2}(t) \dots q_{s_s}(t),$$

где  $s_1, s_2, \dots, s_s$  — номера всех элементов, входящих в группы  $\Gamma_{i_1}, \Gamma_{i_2}, \dots, \Gamma_{i_s}$ . (Некоторые элементы могут входить сразу в несколько групп.) Таким образом, формула (2.4.10) дает возможность вычислить надежность системы в общем случае, но когда число  $m$  велико, то пользоваться ею неудобно, так как в правой части этой формулы содержится  $2^m$  слагаемых.

Для упрощения вычислений можно поступить так:

Назовем две группы отказа *связанными*, если их можно соединить цепочкой пересекающихся групп. Тогда все группы отказа разбиваются на классы связанных групп. Пусть группы  $\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_s$  образуют первый класс, группы  $\Gamma_{s+1}, \Gamma_{s+2}, \dots, \Gamma_{s_2}$  — второй класс и т. д. События  $A_k$  из разных классов независимы и надежность системы выражается так:

$$P(t) = P\{A_1 A_2 \dots A_n\} = P\{A_1 \dots A_{s_1}\} P\{A_{s_1+1} \dots A_{s_2}\} \dots \quad (2.4.11)$$

Каждый сомножитель в правой части равенства может быть подсчитан по формуле (2.4.10). Если классы связанных групп состоят из небольшого числа элементов, то вычисления существенно сокращаются. Следует заметить, что в большинстве случаев связи элементов в системе приводятся к комбинациям последовательного и параллельного соединений, и в этих случаях расчет надежности системы может быть произведен проще. Формула (2.4.10) показывает, что в самом общем случае функция надежности системы с независимыми элементами  $P(t)$  есть многочлен от функций надежности элементов  $p_k(t)$ , — в этом и заключается основной смысл доказанного выше предложения.

О надежности системы с зависимыми элементами. Везде выше мы предполагали, что элементы системы независимы в смысле надежности. Это очень сильное допущение, и в реальных системах оно часто не выполняется. Отказы одних элементов могут существенно влиять на надежность других элементов, изменяя параметры, определяющие надежность элементов. В случае параллельного соединения отказы одних элементов приводят к увеличению функциональной нагрузки на оставшиеся в живых элементы и их надежность падает. Рассмотрим такой характерный пример. Система состоит из  $n$  одинаковых элементов, соединенных параллельно. Предположим, что опасность отказа каждого элемента не зависит от времени, но зависит от числа неотказавших элементов. Если в данный момент работает  $k$  элементов, то опасность отказа каждого из них равна  $\lambda_k$ <sup>1)</sup>. Обозначим через  $P_k(t)$  вероятность того, что в момент  $t$  работает ровно  $k$  элементов. В этом случае мы скажем, что система находится в состоянии  $k$ . Из этого состояния за бесконечно малое время  $\Delta t$  она может с вероятностью

$$k\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$$

перейти в состояние  $(k-1)$  и с вероятностью  $1 - k\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$

<sup>1)</sup> Во избежание недоразумений заметим, что под опасностью отказа здесь понимается вероятность отказа за малую единицу времени, более точно, вероятность отказа на интервале  $(t, t + \Delta t)$  равна  $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$ .

остаться в состоянии  $k$ . Сравнивая состояние системы в два бесконечно близких момента  $t$  и  $t + \Delta t$ , по формуле полных вероятностей получим

$$p_k(t + \Delta t) = [(k + 1) \lambda_{k+1} \Delta t + o(\Delta t)] p_{k+1}(t) + [1 - (k \lambda_k \Delta t + o(\Delta t))] p_k(t) + o(\Delta t).$$

Разделив обе части равенства на  $\Delta t$  и переходя к пределу при  $\Delta t \rightarrow 0$ , мы получим

$$\begin{aligned} \dot{p}_k(t) &= (k + 1) \lambda_{k+1} p_{k+1}(t) - k \lambda_k p_k(t), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

При  $k = n$  аналогично получается

$$\dot{p}_n(t) = -n \lambda_n p_n(t).$$

Так как в начальный момент  $t = 0$  все элементы работают, то  $p_n(0) = 1$  и  $p_k(0) = 0$  при  $k < n$ . Для решения этой системы используем преобразование Лапласа. Пусть

$$Q_k(z) = \int_0^{\infty} p_k(t) e^{-zt} dt, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Умножив каждое уравнение на  $e^{-zt}$  и проинтегрировав по  $t$ , мы получим

$$\begin{aligned} -1 + z a_n(z) &= -n \lambda_n a_n(z), \\ z a_k(z) &= (k + 1) \lambda_{k+1} a_{k+1}(z) - k \lambda_k a_k(z), \\ k &= 0, 1, 2, \dots, (n-1). \end{aligned}$$

Решив эту алгебраическую систему, находим

$$\begin{aligned} a_n(z) &= \frac{1}{z + n \lambda_n}, \\ a_k(z) &= \frac{(k+1) \lambda_{k+1} a_{k+1}(z)}{z + k \lambda_k} = \frac{(k+1) \lambda_{k+1} \dots n \lambda_n}{(z + k \lambda_k) \dots (z + n \lambda_n)}. \end{aligned}$$

В частности,

$$a_0(z) = \frac{n! \lambda_1 \dots \lambda_n}{z(z + \lambda_1)(z + 2\lambda_2) \dots (z + n\lambda_n)},$$

откуда по формуле обращения

$$p_0(t) = \frac{n! \lambda_1 \dots \lambda_n}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \frac{e^{zt} dz}{z(z + \lambda_1) \dots (z + n\lambda_n)}. \quad (2.4.13)$$

Очевидно, что  $p_0(t)$  есть вероятность того, что к моменту  $t$  все элементы отказали, т. е. *произошел отказ системы*. Поэтому

$$p_0(t) = Q(t) = 1 - P(t).$$

Таким образом, вероятность отказа системы выражается интегралом (2.4.13). Этот интеграл может быть выражен в виде суммы

$$Q(t) = 1 - n! \lambda_1 \dots \lambda_n \sum_{k=1}^n \frac{e^{-k\lambda_k t}}{k\lambda_k \omega'(-k\lambda_k)}, \quad (2.4.14)$$

где

$$\omega(x) = (x + \lambda_1)(x + 2\lambda_2) \dots (x + n\lambda_n).$$

Чтобы найти среднее время жизни системы, рассмотрим интеграл

$$A(z) = \int_0^{\infty} P(t) e^{-zt} dt = \int_0^{\infty} [1 - p_0(t)] e^{-zt} dt = \frac{1}{z} - a_0(z).$$

Устремив  $z$  к нулю, мы получим

$$A(0) = T_0 = \int_0^{\infty} P(t) dt = \frac{1}{n\lambda_n} + \frac{1}{(n-1)\lambda_{n-1}} + \dots + \frac{1}{\lambda_1}. \quad (2.4.15)$$

Мы рассмотрели один из простейших примеров системы с зависимыми элементами. В общем случае задача об определении надежности таких систем не решена. И дело здесь не в формулах. Формулу для надежности системы с зависимыми элементами всегда можно написать, если известны условные вероятности отказа одних элементов при условии отказа других. Эти формулы очень громоздки и содержат интегралы типа сверток. Но основная трудность состоит не в вычислении по этим формулам, а в том, что нам неизвестны условные вероятности, а их опытное определение требует необозримого объема испытаний. По-видимому, к оценке надежности сложных систем, состоящих из большого числа элементов, надо подходить совсем по-другому. Можно, например, разбить систему на такие части, которые из физических соображений независимы, и каждую такую часть считать одним элементом. Если надежность этих частей определена из опыта, то надежность всей системы может быть уже просто рассчитана. Возможны и другие подходы к оценке надежности системы.

Нам кажется весьма перспективным следующий подход, который в настоящее время очень популярен. Пусть работа каждого  $k$ -го элемента характеризуется параметром  $\alpha_k$ , который меняется случайным образом во времени. Работу системы характеризует выходной



параметр  $u$ , который функционально связан с параметрами  $\alpha_k$ ,

$$u = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Мы считаем работу системы нормальной, если этот параметр находится в некоторых пределах

$$U_1 < u < U_2,$$

и говорим, что наступил отказ, если параметр  $U$  выходит за эти пределы. Неравенству

$$U_1 < f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) < U_2 \quad (2.4.16)$$

соответствует некоторая область в  $n$ -мерном пространстве

$$\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Если мы знаем из опыта или из физических соображений природу случайных процессов  $\alpha_k = \alpha_k(t)$  и если нам известны параметры этих процессов, то можно в принципе рассчитать вероятность того, что за указанное время  $t$  многомерный случайный процесс  $\bar{\alpha}(t)$  не выйдет за пределы области, определяемой неравенством (2.4.16). Практически приемлемое решение этой общей задачи найдено только для некоторых конкретных случаев. Так, если предположить, что параметр  $u = u(t)$  меняется монотонно, то в этом случае для безотказной работы системы в течение времени  $t$  достаточно, чтобы неравенство (2.4.16) выполнялось лишь в конечный момент времени  $t$ . Но тогда вероятность неравенства (2.4.16) можно найти, если известно одномерное распределение случайных функций  $\alpha_k(t)$  в момент  $t$ . Часто предполагают [15], что случайные функции  $\alpha_k(t)$  линейны

$$\alpha_k(t) = \xi_k t + \eta_k. \quad (2.4.17)$$

Распределение пары  $(\xi_k, \eta_k)$ , которое по условию не зависит от времени, может быть найдено следующим образом. Если на участке  $(0, T)$  нам даны реализации случайного процесса  $\alpha_k(t)$  —  $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_m(t)$ , то для каждой из этих реализаций мы ищем линейную функцию  $x_s t + y_s$ , приближающую функцию  $\varphi_s(t)$  наилучшим образом в среднем. Для этого мы находим минимум интеграла

$$Y(x_s, y_s) = \int_0^T [\varphi_s(t) - x_s t - y_s]^2 dt$$

по  $x_s$  и  $y_s$ . Таким образом, мы получаем пары чисел  $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$ , которые можно рассматривать как серию независимых наблюдений случайной величины  $(\xi_k, \eta_k)$ . Если число наблюдений  $m$

достаточно велико, то по ним можно с соответствующей точностью определить закон распределения пары  $(\xi_k, \eta_k)$ . Если предположить еще, что  $n$ -мерная область, определяемая неравенством (2.4.16), выпуклая, то для безотказной работы системы в течение времени  $t$  нужно, чтобы в конечный момент  $t$  выполнялось неравенство (2.4.16). Если распределение всех пар  $(\xi_k, \eta_k)$  нам известно, то можно найти и распределение выходного параметра  $u(t)$  в момент  $t$ . Тогда вероятность безотказной работы системы до момента  $t$  равна вероятности неравенства

$$U_1 < u(t) < U_2$$

в этот момент  $t$ .

Рассмотрим еще одну модель, где зависимость элементов в системе возникает из-за того, что на надежность этих элементов влияют меняющиеся внешние условия.

Пусть внешние условия, в которых находится система, задаются числовой или векторной величиной  $\alpha(t)$ , меняющейся с течением времени, и пусть опасность отказа каждого  $k$ -го элемента зависит только от величины  $\alpha(t)$ ,

$$\lambda_k = \lambda_k(\alpha).$$

Тогда и опасность отказа системы зависит только от  $\alpha(t)$ ,

$$\lambda(\alpha) = \sum_{k=1}^n \lambda_k(\alpha).$$

Вероятность безотказной работы системы выразится, очевидно, так:

$$P(t) = e^{-\int_0^t \lambda(\alpha(\tau)) d\tau} \quad (2.4.18)$$

Если внешние условия меняются случайно, то функция надежности равна

$$P(t) = \mathbf{M} e^{-\int_0^t \lambda(\alpha(\tau)) d\tau} \quad (2.4.19)$$

где усреднение производится по всем реализациям  $\alpha(t)$ . Если предположить, что процесс изменения внешних условий стационарный, а время  $t$  велико по сравнению с временем корреляции процесса, то

$$\int_0^t \lambda(\alpha(\tau)) d\tau \approx t \mathbf{M} \lambda(\alpha),$$

и тогда

$$P(t) \approx e^{-t \mathbf{M} \lambda(\alpha)} \quad (2.4.20)$$

т. е. в этом случае можно брать средние опасности отказа  $\lambda_k = \mathbb{M}\lambda_k(\alpha)$  и считать элементы независимыми.

Мы рассмотрели несколько подходов к оценке надежности системы с зависимыми элементами. Естественно, что они далеко не исчерпывают всех идей и подходов, которые возникают в этой трудной и важной проблеме. До сих пор мы предполагали, что все элементы в системе работают непрерывно, без простоев. На самом деле во многих реальных системах, таких, например, как вычислительные машины, работает только часть элементов, а остальные элементы или выключены, или включены, но не выполняют никаких функций. С течением времени работающая часть системы меняется, одни элементы переходят в нерабочее состояние, другие, наоборот, включаются в работу. Предположим, что опасность отказа каждого элемента постоянна, но зависит от состояния элемента — работает он или нет. Тогда опасность отказа всей системы постоянна на тех участках, где работает одна и та же группа элементов, и меняется скачком в те моменты, когда какие-то элементы переходят из рабочего состояния в нерабочее или наоборот. Группа работающих элементов определяет состояние системы. Пусть  $N$  — число всех возможных состояний системы. Каждому состоянию соответствует своя опасность отказа системы

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N.$$

Предположим также, что процесс смены состояний *стационарный* и *эргодический*. Это означает следующее: пусть  $\tau_k(t)$  — случайное время, которое система пребывает в состоянии  $k$  до момента  $t$ . Тогда с вероятностью единица

$$\frac{\tau_k(t)}{t} \rightarrow p_k \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

где  $p_k$  — вероятность того, что в наугад взятый момент система находится в состоянии  $k$ .

Если времена  $\tau_1(t) \dots \tau_N(t)$  известны, то условная вероятность безотказной работы системы равна

$$P(t) = e^{-\lambda_1 \tau_1(t) - \dots - \lambda_N \tau_N(t)}.$$

Поэтому для случайных времен  $\tau_k(t)$  функция надежности системы равна

$$P(t) = \mathbb{M} e^{-\lambda_1 \tau_1(t) - \dots - \lambda_N \tau_N(t)}.$$

Предположим теперь, что время  $t \rightarrow \infty$ , а произведения  $\lambda_k t$  остаются ограниченными. Тогда с вероятностью единица

$$P(t) = \mathbb{M} e^{-\sum_{k=1}^N \lambda_k t \frac{\tau_k(t)}{t}} \sim e^{-\sum_{k=1}^N \lambda_k p_k t}.$$

Это предельное соотношение означает, что в тех случаях, когда смена состояний происходит относительно быстро, так что до отказа система успевает много раз сменить свое состояние, справедлива приближенная формула

$$P(t) \approx e^{-\sum_{k=1}^N \lambda_k p_k t} \quad (2.4.21)$$

Сумму  $\sum_{k=1}^N \lambda_k p_k$  можно рассматривать как среднюю опасность отказа системы.

Надежность восстанавливаемой системы. До сих пор мы рассматривали работу системы до первого отказа. Теперь мы предположим, что каждый элемент системы после отказа восстанавливается.

Рассмотрим сначала тот случай, когда восстановление происходит мгновенно. Как и выше, мы будем считать, что исходные свойства элемента восстанавливаются полностью. Предположим также, что работа, отказы и восстановление одного элемента никак не влияют на надежность других элементов. Моменты отказов каждого элемента образуют процесс восстановления, причем в силу наших предположений эти процессы независимы. Обозначим через  $F_k(t)$  ( $k = 1, 2, \dots, n$ ) закон распределения времени жизни  $k$ -го элемента.

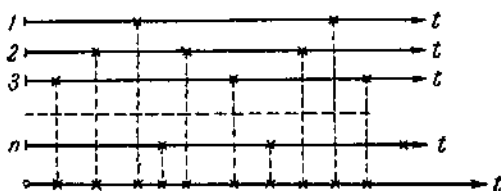


Рис. 2.4.1.

Мы предполагаем, как обычно, что эти законы имеют непрерывную плотность  $f_k(t)$  и существуют среднее время жизни элемента  $T_k$  и его дисперсия  $\sigma_k^2$ . Ниже мы будем рассматривать только тот случай, когда элементы в системе соединены (в смысле надежности) последовательно и отказ любого элемента вызывает отказ системы. Если моменты отказов всех элементов отложить на общей оси времени, то мы получим поток отказов системы. Этот поток есть сумма  $n$  процессов восстановления (рис. 2.4.1).

Наша задача заключается в том, чтобы изучить поток отказов системы и найти его основные характеристики. Пусть  $v_k(t)$  — случайное число отказов  $k$ -го элемента до момента  $t$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ ,

а  $v(t)$  — случайное число отказов системы до момента  $t$ . Очевидно, что

$$v(t) = v_1(t) + \dots + v_n(t). \quad (2.4.22)$$

Отсюда совсем просто находится среднее число отказов системы до момента  $t$ , которое мы обозначим через

$$\begin{aligned} H(t) &= \mathbb{M}v(t) = \mathbb{M}v_1(t) + \dots + \mathbb{M}v_n(t) = \\ &= H_1(t) + H_2(t) + \dots + H_n(t), \end{aligned} \quad (2.4.23)$$

где  $H_k(t)$  — функция восстановления для  $k$ -го элемента.

Производную

$$h(t) = H'(t)$$

назовем *интенсивностью отказов*. Она равна среднему числу отказов за единицу времени (если эта единица мала). Интенсивность отказов  $h(t)$ , являющаяся основной характеристикой потока отказов системы, может быть определена из опыта.

Для этого мы регистрируем моменты отказов системы и разбиваем все время наблюдений на интервалы длины  $h$  так, чтобы в каждый интервал попало достаточное число отказов (не менее десяти). Пусть  $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$  — число отказов, попавших соответственно на первый, второй, третий и т. д. интервалы. На каждом  $k$ -м интервале мы строим столбик высотой  $\frac{n_k}{h}$ . Полученная ступенчатая кривая и дает нам оценку функции  $h(t)$ . К сожалению, погрешность этой оценки трудно определить, так как в общем случае вероятностная природа потока отказов системы очень сложна.

Из равенства (2.4.22) можно найти и распределение числа отказов системы  $v(t)$ . Мы знаем из (2.3.4) распределение числа отказов для процесса восстановления

$$\mathbf{P}\{v_k(t) = s\} = F_{ks}(t) - F_{ks+1}(t) = P_{ks}(t).$$

(Здесь  $F_{ks}(t)$  —  $s$ -кратная свертка закона распределения  $F_h(t)$ .)

Чтобы найти распределение  $v(t)$ , введем производящие функции для числа отказов элемента

$$P_k(t, z) = \mathbb{M}z^{v_k(t)} = \sum_{s=0}^{\infty} P_{ks}(t) z^s.$$

Так как величины  $v_k(t)$  независимы, то производящая функция отказов системы

$$\begin{aligned} P(t, z) &= \sum_{s=0}^{\infty} p_s(t) z^s = \mathbb{M}z^{v(t)} = \\ &= \mathbb{M}z^{v_1(t)} \mathbb{M}z^{v_2(t)} \dots \mathbb{M}z^{v_n(t)} = P_1(t, z) P_2(t, z) \dots P_n(t, z), \end{aligned} \quad (2.4.24)$$

где  $p_s(t) = \mathbf{P}\{v(t) = s\}$ .

Зная производящую функцию  $P(t, z)$ , мы можем найти и иско-  
мые вероятности  $p_s(t)$ ,

$$p_s(t) = \sum_{s_1 + \dots + s_n = s} p_{1s_1}(t) p_{2s_2}(t) \dots p_{ns_n}(t). \quad (2.4.25)$$

На практике часто важно знать, проработает ли система безотказно на интервале  $(t, t + \tau)$ . Это событие наступит *тогда и только тогда*, когда каждый элемент не откажет на этом интервале. Обозначим через  $p_i(\tau)$  вероятность безотказной на  $(t, t + \tau)$  работы системы, а через  $p_i^{(k)}(\tau)$  вероятность безотказной работы  $k$ -го элемента на  $(t, t + \tau)$ . Так как элементы независимы, то

$$p_i(\tau) = p_i^{(1)}(\tau) \dots p_i^{(n)}(\tau), \quad (2.4.26)$$

где каждая вероятность  $p_i^{(k)}(\tau)$  определяется по формуле (2.3.26). Можно было бы найти и целый ряд других характеристик, например: вероятность появления на  $(t, t + \tau)$  ровно  $s$  отказов, распределение  $s$ -го отказа системы, распределение промежутка между соседними отказами системы и т. п. Мы не будем заниматься выводом всех этих формул, так как они подобно формулам (2.4.25) и (2.4.26) очень сложны и вряд ли представляют интерес для практики.

Вместо этого мы рассмотрим асимптотические свойства потока отказов системы, из которых и выведем простые и практически приемлемые приближенные формулы для различных характеристик потока отказов системы. Система, как правило, состоит из большого числа элементов, доходящего до тысяч и даже десятков тысяч. Вместе с тем каждый в отдельности взятый элемент имеет относительно большой срок службы, отказывает редко. Таким образом, поток отказов системы есть сумма большого числа редких потоков восстановления. Согласно нашим предположениям эти потоки независимы. Доля каждого элемента в общем потоке отказов системы очень мала, так как обычно в системе нет элемента, поток отказов которого был бы сравним по интенсивности с потоком отказов всей системы. В потоке отказов системы зависимы только те отказы, которые принадлежат одному элементу, но они с вероятностью, близкой к единице, разделены большим числом отказов других элементов. Отсюда следует, что появление отказов на одном участке времени не меняет (точнее, почти не меняет) вероятности появления какого-либо числа отказов на другом участке, не пересекающемся с первым. Из этих физических соображений следует, что при сделанных выше предположениях в потоке отказов системы должно отсутствовать последствие. Кроме того, мы предположили выше, что законы распределения  $F_k(t)$  имеют непрерывные плотности. Отсюда следует, что функция  $H(t)$  — среднее число отказов — непрерывна и, как нетрудно показать, поток отказов системы является

ординарным, т. е. вероятность одновременного появления двух отказов равна нулю. В теории массового обслуживания доказывается, что ординарный поток с непрерывной функцией  $H(t)$ , в котором отсутствует последствие, является простейшим нестационарным потоком. Это значит, что вероятность появления  $s$  отказов на любом участке  $(t_1, t_2)$  выражается формулой

$$P_s(t_1, t_2) = \frac{[H(t_2) - H(t_1)]^s}{s!} e^{-[H(t_2) - H(t_1)]}, \quad (2.4.27)$$

и для любой системы неперекрывающихся интервалов события, заключающиеся в появлении заданного числа отказов на каждом интервале, независимы. Итак, мы показали, что при достаточно общих условиях поток отказов системы будет, по крайней мере приближенно, простейшим нестационарным потоком. Проведенные выше рассуждения, хотя они являются достаточно убедительными, не дают все же строгого доказательства этого факта. Такое доказательство имеется [16], однако мы ограничимся сказанным выше и не будем его приводить. Из формулы (2.4.27) видно, что число отказов на каждом интервале распределено по закону Пуассона. По этой причине такой поток отказов называют часто *пуассоновским потоком с переменным параметром*. Этим переменным параметром является интенсивность отказов  $h(t)$ . Формулу (2.4.27) можно записать и так:

$$p_s(t_1, t_2) = \frac{\left[ \int_{t_1}^{t_2} h(t) dt \right]^s}{s!} e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(t) dt}.$$

Если на участке  $(t, t + \tau)$  функция  $h(t)$  приближенно линейна, то хорошее приближение для этих вероятностей дает равенство

$$p_s(t, t + \tau) \approx \frac{\left[ h \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \tau \right]^s}{s!} e^{-h \left( t + \frac{\tau}{2} \right) \tau}. \quad (2.4.28)$$

Если же функция  $h(t)$  на этом участке приближенно постоянна,  $h(t) \approx h$ , то

$$p_s(t, t + \tau) \approx \frac{(h\tau)^s}{s!} e^{-h\tau}. \quad (2.4.29)$$

Этой последней формулой чаще всего и пользуются.

В частности, вероятность безотказной работы на интервале  $(t, t + \tau)$

$$p_0(t, t + \tau) \approx e^{-[H(t + \tau) - H(t)]}. \quad (2.4.30)$$

Если, как и выше,  $h(t)$  приближенно постоянна на этом интервале, то

$$p_0(t, t + \tau) \approx e^{-h(t)\tau}. \quad (2.4.31)$$

Из формулы (2.4.30) следует, что среднее время до первого отказа после момента  $t$  равно

$$T_{\text{ср}} = \int_0^{\infty} e^{-[H(t+\tau) - H(t)]} d\tau = e^{H(t)} \int_t^{\infty} e^{-H(x)} dx. \quad (2.4.32)$$

Если же на участках между соседними отказами  $h(t)$  почти не меняется, то, как следует из (2.4.31), это среднее время выражается приближенной формулой

$$T_{\text{ср}} \approx \frac{1}{h(t)}. \quad (2.4.33)$$

Рассмотрим еще несколько характеристик нашего потока.

Пусть  $t_1, t_2, \dots, t_s$  — моменты последовательных отказов системы. Найдем закон распределения момента  $s$ -го отказа  $t_s$

$$\mathbf{P}\{t_s < t\} = \mathbf{P}\{v(t) \geq s\} = \sum_{k=s}^{\infty} \frac{[H(t)]^k}{k!} e^{-H(t)}; \quad (2.4.34)$$

отсюда среднее время до  $s$ -го отказа

$$\mathbf{M}t_s = \int_0^{\infty} \mathbf{P}\{t_s > t\} dt = \sum_{k=0}^{s-1} \int_0^{\infty} \frac{[H(t)]^k}{k!} e^{-H(t)} dt.$$

Нетрудно найти закон распределения времени между  $s$ -м и  $(s+1)$ -м отказами

$$\mathbf{P}\{t_{s+1} - t_s > t\} = \int_0^{\infty} \frac{[H(x)]^{s-1}}{(s-1)!} e^{-H(x+t)} h(x) dx, \quad (2.4.35)$$

а его среднее значение

$$\mathbf{M}(t_{s+1} - t_s) = \int_0^{\infty} \frac{[H(t)]^s}{s!} e^{-H(t)} dt. \quad (2.4.36)$$

Очень часто нас интересует надежность системы на начальном участке времени, на котором среднее число ожидаемых отказов системы ничтожно мало по сравнению с числом элементов в системе. Это значит, что

$$H(t) \ll n.$$



Если надежность всех элементов примерно одного порядка, то отсюда следует, что  $H_k(t) \ll 1$  и тем более  $F_k(t) \ll 1$ . Но при этих условиях было показано, что

$$H_k(t) \approx F_k(t).$$

Значит,

$$H(t) \approx \sum_{k=1}^n F_k(t), \quad (2.4.37)$$

причем относительная погрешность этого равенства не превосходит

$$\max_k \frac{F_k(t)}{1 - F_k(t)}.$$

Использование этого приближенного равенства сильно упрощает все расчеты.

С другой стороны, работа системы нередко продолжается столь долго, что почти все элементы системы успевают отказать по нескольку раз. При этих условиях процессы восстановления становятся стационарными и, значит, поток отказов системы также устанавливается. Так как плотности восстановления для каждого элемента стремятся к пределам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_k(t) = \frac{1}{T_k},$$

то интенсивность отказов системы имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = h_0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_k}. \quad (2.4.38)$$

При этом поток системы становится пуассоновским потоком с постоянным параметром, т. е. простейшим потоком. Для этого потока вероятность появления  $s$  отказов на участке времени длительности  $\tau$  не зависит от положения этого участка и выражается формулой

$$p_s(\tau) = \frac{(h_0 \tau)^s}{s!} e^{-h_0 \tau}. \quad (2.4.39)$$

В частности, вероятность безотказной работы системы в течение времени  $\tau$  равна  $p_0(\tau) = e^{-h_0 \tau}$  и, значит, среднее время безотказной работы равно

$$T_{\text{ср}} = \frac{1}{h_0}. \quad (2.4.40)$$

Заметим еще, что если надежность каждого элемента в системе подчиняется экспоненциальному закону

$$F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t},$$

то процесс восстановления для каждого элемента будет образовывать простейший поток  $n$ , значит, поток отказов системы как сумма простейших потоков также будет простейшим с интенсивностью

$$h = \sum_{k=1}^n \lambda_k. \quad (2.4.41)$$

Надежность системы с конечным временем восстановления. Перейдем теперь к изучению надежности системы в том случае, когда *восстановление каждого элемента требует некоторого времени*, которым уже нельзя пренебречь. Пусть  $F_k(t)$  — закон распределения жизни  $k$ -го элемента, а  $G_k(t)$  — закон распределения времени его восстановления. Мы, как всегда, предположим, что эти законы имеют непрерывные плотности  $f_k(t)$  и  $g_k(t)$  и существуют конечные средние  $T_{k1}$  и  $T_{k2}$  и дисперсии  $\sigma_{k1}^2$  и  $\sigma_{k2}^2$ .

Во время восстановления элемента система может вести себя по-разному. Мы рассмотрим только два случая.

1) Во время восстановления любого элемента система выключена, не работает. За это время во всех других элементах не происходит никаких существенных изменений, и поэтому с момента восстановления они начинают работать так, как если бы восстановление произошло мгновенно.

2) Во время восстановления одного элемента все другие элементы продолжают работать. Отказы и восстановления элемента не влияют на надежность других элементов. Время восстановления элемента не зависит от того, происходят в это время отказы других элементов или нет. Иными словами, каждый элемент отказывает и восстанавливается независимо от других.

Разберем сначала первый случай. Мы предположим, как и выше, что число элементов в системе велико, а интенсивность отказов каждого составляет бесконечно малую долю от общей интенсивности отказов системы. При этих условиях поведение системы легко описать. Участки работы системы чередуются с участками, где происходит восстановление.

Отдельно взятые участки работы  $\tau_1, \tau_2, \dots$  образуют пуассоновский поток с переменным параметром. Распределение  $\tau_s$  находится по формуле (2.4.32). Длина каждого участка восстановления  $\tau_s'$  практически не зависит от длин соседних участков работы и восстановления, так как отказы, принадлежащие одному элементу, разделены большими интервалами. Поэтому нетрудно найти и распределение интервалов восстановления  $\tau_s''$ . Вероятность того, что на бесконечно малом участке  $(t, t + \Delta t)$  произошел отказ  $k$ -го

элемента, равна

$$h_k(t) \Delta t + o(\Delta t),$$

а вероятность отказа системы на этом участке равна

$$h(t) \Delta t + o(\Delta t),$$

где

$$h(t) = \sum_{k=1}^n h_k(t).$$

Отсюда следует, что условная вероятность отказа  $k$ -го элемента на этом участке при условии, что на нем произошел отказ системы, равна

$$\frac{h_k(t) \Delta t + o(\Delta t)}{h(t) \Delta t + o(\Delta t)} = \frac{h_k(t)}{h(t)} + o(1).$$

Значит, вероятность того, что отказ системы, происшедший в момент  $t$ , принадлежит  $k$ -му элементу, равняется

$$\frac{h_k(t)}{h(t)}.$$

Поэтому распределение длительности периода восстановления, начавшегося в момент  $t$ , может быть найдено по формуле полных вероятностей

$$P\{\tau'' < \tau\} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k(t)}{h(t)} G_k(\tau). \quad (2.4.42)$$

Распределение начала  $s$ -го периода восстановления может быть найдено, если известно распределение предыдущих периодов работы и восстановления. Отсюда, применяя опять формулу полных вероятностей, мы можем найти безусловное распределение периода  $\tau_s''$ . Такой путь приведет к очень сложным формулам. Поэтому мы исследуем поток отказов и восстановлений системы несколько иным путем. При наших предположениях интенсивности отказов  $h_k(t)$  и  $h(t)$  меняются очень медленно. Мы предположим, что на рассматриваемом участке времени они постоянны,

$$h_k(t) \equiv h_k, \quad h(t) \equiv h.$$

Тогда периоды работы будут распределены по экспоненциальному закону

$$P\{\tau_t' < t\} = 1 - e^{-ht}, \quad (2.4.43)$$

а периоды восстановления будут иметь, как следует из (2.4.42), распределение

$$P \{ \tau_i < t \} = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{h} G_k(t) = G(t), \quad (2.4.44)$$

причем все эти периоды будут независимы. Таким образом, поток отказов и восстановлений системы образует уже рассмотренный выше процесс восстановления с конечным временем восстановления.

Поэтому для изучения надежности системы мы можем использовать найденные выше характеристики такого процесса.

Среднее время работы системы из (2.4.43) равно

$$T_1 = \int_0^{\infty} e^{-ht} dt = \frac{1}{h}, \quad (2.4.45)$$

а среднее время восстановления

$$T_2 = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dt = \sum_{k=1}^n \frac{h_k}{h} \cdot T_{k2}. \quad (2.4.46)$$

Следовательно, коэффициент готовности на данном участке выражается формулой

$$k_r = \frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n h_k T_{k2}}. \quad (2.4.47)$$

Вероятность безотказной работы в течение времени  $t$  равна

$$p(t) = k_r e^{-ht} = k_r e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (2.4.48)$$

Если система работает достаточно долго, то интенсивности  $h_k(t)$  и  $h(t)$  приближаются к своим пределам

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h_k(t) = \frac{1}{T_{k1}} \quad \text{и} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_{k1}}.$$

Для этого случая формулы (2.4.45)–(2.4.48) получают вид

$$T_1 = \frac{1}{n \sum_{k=1}^n \frac{1}{T_{k1}}}; \quad T_2 = T_1 \sum_{k=1}^n \frac{T_{k2}}{T_{k1}}; \quad k_r = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{T_{k2}}{T_{k1}}}; \quad (2.4.49)$$

$$p(t) = k_r e^{-\frac{t}{T_1}}.$$

Заметим, что если время работы и время восстановления каждого элемента подчиняются экспоненциальному закону, то формулы (2.4.49) являются точными на любом участке времени и при любом числе элементов.

Перейдем теперь к рассмотрению второго случая [17], когда каждый элемент работает и восстанавливается независимо от других. В этом случае поток отказов и восстановлений системы есть сумма  $n$  независимых процессов восстановления с конечным временем восстановления. Для такой системы очень просто находится коэффициент готовности  $k_r(t)$ , равный вероятности того, что в момент  $t$  система окажется исправной. Рассмотрим единичные случайные функции  $v_s(t)$  ( $s = 1, 2, \dots, n$ ), которые определяются так:

$$v_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если в момент } t \text{ } s\text{-й элемент исправен,} \\ 0, & \text{если в момент } t \text{ } s\text{-й элемент неисправен.} \end{cases}$$

Тогда функция

$$v(t) = v_1(t) v_2(t) \dots v_n(t)$$

равна единице, если в момент  $t$  система исправна, и равна нулю, если она неисправна. Функции  $v_s(t)$  по условию независимы, и поэтому

$$\begin{aligned} k_r(t) &= \mathbf{P}\{v(t) = 1\} = \mathbf{M}v(t) = \\ &= \mathbf{M}v_1(t) \mathbf{M}v_2(t) \dots \mathbf{M}v_n(t) = k_r^{(1)}(t) k_r^{(2)}(t) \dots k_r^{(n)}(t), \end{aligned} \quad (2.4.50)$$

где  $k_r^{(s)}(t)$  — коэффициент готовности  $s$ -го элемента, вычисляемый по формуле (2.3.37). С течением времени поток отказов и восстановлений системы становится стационарным и для этого случая

$$k_r = \frac{T_{11}}{T_{11} + T_{12}} \frac{T_{21}}{T_{21} + T_{22}} \dots \frac{T_{n1}}{T_{n1} + T_{n2}}. \quad (2.4.51)$$

Определяя другие характеристики надежности системы, мы ограничимся стационарным случаем, предполагая, что система работала достаточно долго. Пусть в момент  $t$  произошло восстановление системы. Найдем вероятность того, что система проработает безотказно в течение времени  $\tau$ . Для вывода этой вероятности рассмотрим следующие события:

$A(\Delta t, \tau)$  — на участке  $(t - \Delta t, t)$  произошло восстановление системы и на участке  $(t, t + \tau)$  система работала безотказно,

$A(\Delta t)$  — на участке  $(t - \Delta t, t)$  произошло восстановление системы.

Очевидно, что искомая вероятность равна

$$p(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \mathbf{P}\{A(\Delta t, \tau) | A(\Delta t)\} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{P}\{A(\Delta t, \tau)\}}{\mathbf{P}\{A(\Delta t)\}}.$$

Если пренебречь событиями, вероятность которых бесконечно мала по сравнению с  $\Delta t$ , то событие  $A(\Delta t, \tau)$  представляется суммой непересекающихся событий

$$A(\Delta t, \tau) = A_1(\Delta t, \tau) + A_2(\Delta t, \tau) + \dots + A_n(\Delta t, \tau),$$

где событие  $A_m(\Delta t, \tau)$  состоит в том, что  $m$ -й элемент восстанавливается на интервале  $(t - \Delta t, t)$  и на  $(t, t + \tau)$  работает безотказно, а остальные элементы работают безотказно на  $(t, t + \tau)$ . Вероятность этого события равна

$$P\{A_m(\Delta t, \tau)\} = \frac{1 - F_m(\tau)}{T_{m1} + T_{m2}} \prod_{s \neq m} \frac{\int_0^\infty [1 - F_s(x)] dx}{T_{s1} + T_{s2}} \Delta t + o(\Delta t).$$

Отсюда

$$P\{A(\Delta t, \tau)\} = \sum_{m=1}^n P\{A_m(\Delta t, \tau)\}.$$

Так как событие  $A(\Delta t) = A(\Delta t, 0)$ , то

$$P\{A(\Delta t)\} = \sum_{m=1}^n \frac{\Delta t}{T_{m1}} \prod_{s=1}^n \frac{T_{s1}}{T_{s1} + T_{s2}} + o(\Delta t).$$

Теперь мы можем найти искомую вероятность

$$p(\tau) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{A(\Delta t, \tau)\}}{P\{A(\Delta t)\}} = \frac{\sum_{m=1}^n \frac{1 - F_m(\tau)}{T_{m1}} \prod_{s \neq m} \frac{1}{T_{s1}} \int_0^\infty [1 - F_s(x)] dx}{\sum_{m=1}^n \frac{1}{T_{m1}}}.$$

Чтобы привести эту формулу к компактному виду, обозначим закон распределения остаточного времени жизни  $s$ -го элемента через

$$\Phi_s(\tau) = \frac{1}{T_{s1}} \int_0^\tau [1 - F_s(x)] dx,$$

и пусть  $\varphi_s(\tau) = \Phi_s'(\tau) = \frac{1 - F_s(\tau)}{T_{s1}}$  — его плотность. Введем еще одно обозначение

$$\frac{1}{T_0} = \sum_{m=1}^n \frac{1}{T_{m1}};$$

$T_0$  — это среднее время между соседними отказами системы при

мгновенном восстановлении. Тогда наша вероятность может быть записана так:

$$p(\tau) = T_0 \sum_{m=1}^n \Phi_m(\tau) \prod_{s \neq m} [1 - \Phi_s(\tau)] = T_0 \left\{ \prod_{s=1}^n [1 - \Phi_s(\tau)] \right\}' \quad (2.4.52)$$

Отсюда очень легко найти среднюю длительность рабочего периода системы

$$T_1 = \int_0^{\infty} p(\tau) d\tau = -T_0 \prod_{s=1}^n [1 - \Phi_s(\tau)] \Big|_0^{\infty} = T_0. \quad (2.4.53)$$

Итак,

$$T_1 = T_0 = \frac{1}{\sum_{m=1}^n \frac{1}{T_{m1}}}.$$

Мы видим, что среднее время работы системы оказывается таким же, как и при мгновенном восстановлении.

Пусть теперь  $T_2$  — среднее время восстановления системы. Тогда, с одной стороны, коэффициент готовности системы  $k_r$  равен

$$k_r = \frac{T_1}{T_1 + T_2}.$$

С другой стороны, этот коэффициент выражается формулами (2.4.51). Приравнявая эти выражения

$$\frac{T_1}{T_1 + T_2} = \frac{T_{11}}{T_{11} + T_{12}} \frac{T_{21}}{T_{21} + T_{22}} \dots \frac{T_{n1}}{T_{n1} + T_{n2}} = k_r,$$

мы получаем уравнение, из которого определяется среднее время  $T_2$ :

$$T_2 = T_1 \frac{1 - k_r}{k_r}. \quad (2.4.54)$$

Если предположить, как мы это делали выше, что число элементов велико, а доля каждого элемента в потоке отказов и восстановлений системы бесконечно мала, то можно найти для вероятности  $p(\tau)$  более простое приближенное выражение:

$$p(\tau) \approx e^{-\frac{\tau}{T_1}}. \quad (2.4.55)$$

Отсюда вероятность безотказной работы системы на  $(t, t + \tau)$  равна

$$k_r p(\tau) \approx k_r e^{-\frac{\tau}{T_1}}. \quad (2.4.56)$$

В заключение заметим, что в случае, когда время жизни элементов распределено по показательному закону  $F_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t}$ , а время восстановления распределено произвольно, можно не только определить средние времена работы и восстановления системы, но и найти точные законы их распределения. Не приводя подробного вывода, укажем лишь на его идею.

Для этого заметим, что периоды работы и восстановления системы для нашего случая независимы, причем период работы распределен по закону

$$1 - e^{-\lambda t},$$

где

$$\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k,$$

а период восстановления системы распределен по неизвестному закону, который мы обозначим  $\Phi(t)$ .

Коэффициент готовности системы

$$k_r(t) = k_r^{(1)}(t) \dots k_r^{(n)}(t)$$

и, таким образом, нам известен. С другой стороны, этот коэффициент  $k_r(t)$  может быть выражен через функцию  $\Phi(t)$ .

Пусть

$$\varphi(t) = \Phi'(t) \quad \text{и} \quad \psi(t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-x)} \varphi(x) dx.$$

Тогда по формуле (2.3.37)

$$k_r(t) = e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-x)} h(x) dx, \quad (2.4.57)$$

где  $h(x) = \sum_{k=1}^n \psi_k(x)$  — плотность моментов восстановлений системы.

Из уравнения (2.4.57) можно найти функцию  $h(t)$ , а по ней определить и искомый закон  $\Phi(t)$ . Преобразование Лапласа для закона  $\Phi(t)$  легко выражается через преобразование Лапласа от функции  $h(t)$ .



## ГЛАВА 3

### ОЦЕНКА ПОКАЗАТЕЛЕЙ НАДЕЖНОСТИ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ИСПЫТАНИЙ

#### § 3.1. Испытания на надежность

Организация и проведение испытаний изделий на надежность выходит далеко за пределы использования лишь математических методов.

Центральным моментом организации испытаний является выбор тех параметров, оценка значений которых должна считаться основной целью испытаний. Этот выбор определяется прежде всего физической значимостью предложенных характеристик, а также теми узкими местами, которые выявились в работе опытных изделий или же при эксплуатации изделий прежних выпусков. Несомненно, что этот этап работы ложится основной своей тяжестью на плечи физиков, химиков и инженеров. Роль математика выявляется позднее, когда возникнет необходимость оценки взаимной зависимости избранных параметров и обработки результатов испытаний.

Даже для относительно простых элементов — конденсаторов, сопротивлений, диодов и пр. — достаточно полная характеристика надежности редко может быть получена посредством измерения значения одного-единственного параметра. Как правило, требуется знание нескольких величин, чтобы можно было составить отчетливое представление об изделиях. Так, для примера, если речь идет о поршневом пальце, то важны не только его геометрические размеры (включая «конусность»), но и равномерность цементации. Точно так же сопротивление недостаточно характеризуется только величиной его сопротивления в омах. Для оценки надежности большую роль играет устойчивость сопротивления к тепловым и электрическим воздействиям, длительности хранения, влиянию влажности.

Вторым по важности моментом организации испытаний следует считать выбор внешних условий, включая сюда и рабочий режим проведения испытаний. Само собой разумеется, выбор условий

в значительной степени должен учитывать те особенности, в которых впоследствии придется работать изделиям. Эти условия (температура, влажность, напряжение, вибрации, удары, распределение нагрузок во времени и пр.) должны быть различны для партий изделий, предназначенных для работы в тропиках или же в Арктике, в зоне пустынь или же высокогорных районах.

Внешние условия могут оказывать исключительно сильное влияние на характер изменения измеряемых параметров. Об одной интересной иллюстрации этого положения авторы узнали от Л. Л. Кристаллинского. Если часть испытуемых изделий (например, металлокерамических сопротивлений) из одной и той же партии подвергать непрерывной нагрузке в течение времени  $t$ , а другую часть подвергать нагрузке также в течение суммарного времени  $t$ , но при этом чередовать периоды нагрузки с периодами «отдыха», то поведение параметров этих двух групп изделий будет существенно различным.

На рис. 3.1.1, *а* изображено примерное поведение коэффициента усиления  $\beta$  полупроводникового триода. Довольно резкое

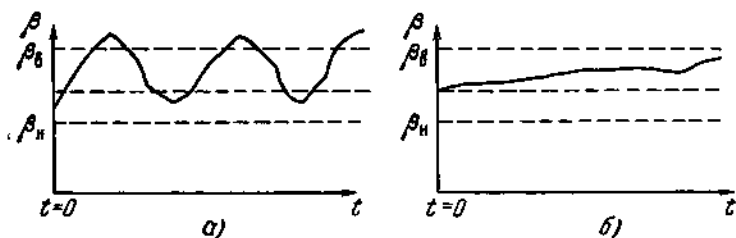


Рис. 3.1.1.

изменение ординат графиков во времени вызвано нестабильностью температуры. На рис. 3.1.1, *б* дано изменение того же параметра при условии, что стабильность температуры тщательно соблюдалась. Если  $\beta_n$  и  $\beta_v$  — нижняя и верхняя границы допустимого изменения параметров, то в первом случае параметр изделия превышал крайнее верхнее значение (был зафиксирован «отказ»), тогда как во втором случае отказы не наблюдались.

Заманчиво использовать данные не только специально организованных испытаний, но и сведения об отказах аппаратуры, работающей в реальных условиях. Однако непосредственно эти данные не могут быть использованы для анализа вопросов надежности. Предварительно они должны быть расклассифицированы по тем внешним условиям, в которых работала аппаратура.

Инженерные и физические соображения должны также лежать в основе назначения допустимых границ изменения параметров,

выход за пределы которых должен считаться отказом. В значительной мере эти границы определяются назначением элементов, так как в одной аппаратуре допустимы столь большие колебания его параметров, какие для другой аппаратуры должны неизбежно считаться «отказом». Понятие отказа было подробно освещено нами в § 2.1.

Момент наступления отказа заранее не может быть указан, он случаен. Собственно, вероятностный характер носят все параметры, определяющие надежность изделий, поскольку их значения меняются от одного изделия к другому и это изменение не упорядочено, случайно. Это обстоятельство приводит к необходимости оценивать на основании испытаний распределения интересных нас числовых характеристик надежности, а также существующие между ними связи. Мы приходим, таким образом, к постановке основных задач математической статистики: а) *оценке значений неизвестных параметров распределений*, а также б) *проверке различного рода статистических гипотез*.

Проведение испытаний может быть организовано многими путями. В зависимости от тех правил, в соответствии с которыми будут проводиться испытания, говорят о том или ином *плане их проведения*. План испытаний должен включать в себя ряд указаний, в частности количество изделий элементов или комплексов аппаратуры, которые необходимо поставить на испытания; когда производить проверку изделий (непрерывно или в заранее заданные моменты времени); заменять или не заменять отказавшие изделия; когда прекращать испытания или же добавлять новые изделия для продолжения испытаний.

Для удобства записи будем использовать следующие обозначения: обозначим буквой «Б» планы, в которых отказавшие элементы не заменяются новыми, буквой «В» — те, в которых каждый отказавший элемент заменяется новым, идентичным ему элементом. Предполагаем, что наблюдения за отказами производятся непрерывно, в результате чего отказы обнаруживаются в моменты их возникновения. Через  $r$  обозначим планы, в которых наблюдения ведутся до момента появления  $r$ -го отказа, через  $T$  — планы, при которых наблюдения ведутся в течение времени  $T$ .  $T$  обычно измеряется в часах. Иногда используются смешанные планы, когда наблюдения ведутся до момента  $t_r$  появления  $r$ -го отказа, если  $t_r < T$ , или до момента  $T$ , если  $t_r \geq T$ . Такие планы будем обозначать через  $(r, T)$ . Ради сокращения и уточнения записи введем обозначения для различных планов: станем указывать вначале число  $N$  испытываемых элементов, затем наличие или отсутствие замены отказавших элементов и, наконец, длительность испытания. План, при котором испытывается  $N$  элементов, каждый отказавший элемент не заменяется новым, а наблюдения ведутся до момента  $T$ ,

обозначается через  $[N, B, T]$ . Обозначение  $[N=100, B(r=15, T=1500)]$  соответствует плану, при котором испытывается 100 элементов, каждый отказавший элемент заменяется новым, а наблюдения ведутся либо до момента  $t_{15}$  появления 15-го отказа, либо в течение 1500 час, если  $t_{15} \geq 1500$ . Легко видеть, что в указанных условиях возможны лишь шесть различных планов:

$$\begin{aligned} [N, B, T]; & \quad [N, B, r]; & \quad [N, B, (r, T)]; \\ [N, B, T]; & \quad [N, B, r]; & \quad [N, B, (r, T)]. \end{aligned}$$

Обозначим через  $d(t)$  число отказов, возникших к моменту  $t$ . Функция  $d(t)$ , как это следует из определения, не может убывать и принимает последовательно значения  $0, 1, 2, \dots$ . Точки роста  $d(t)$  отвечают случайным моментам времени  $t_i$ . Реально наблюдаемую во время испытаний функцию  $d(t)$  называют *реализацией* процесса  $d(t)$  или *траекторией* процесса  $d(t)$ .

Обозначим через  $G$  ту область плоскости  $(t, d(t))$ , попадания в которую траектории процесса  $d(t)$  приводят к окончанию испытаний. Для планов  $[N, B, T]$  и  $[N, B, T]$  в качестве области  $G$  мы

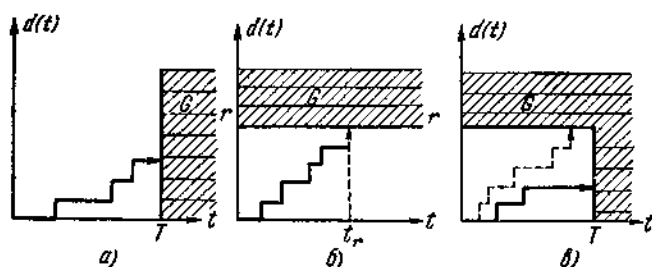


Рис. 3.1.2.

должны взять полуплоскость  $t > T$ . Испытания при этих планах прекращаются в момент  $T$ , как бы ни шла траектория  $d(t)$  (рис. 3.1.2, а).

В случае планов (рис. 3.1.2, б)  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, r]$  испытания прекращаются в момент  $t_r$  первого попадания траектории  $d(t)$  в множество  $G = \{(d, t): d \geq r\}$ . Наконец, для планов  $[N, B, (r, T)]$ ,  $[N, B, (r, T)]$  испытания прекращаются в момент первого попадания в множество  $G = \{(d, t): \text{или } d \geq r, \text{ или } t \geq T\}$  (рис. 3.1.2, в).

В ряде случаев испытания могут планироваться на основе полученных значений суммарной наработки. Если через  $N(t)$  обозначить число элементов, безотказно работающих до момента  $t$ ,  $N(t) = N - d(t)$ , то значение суммарной наработки  $S(t)$  в момент  $t$  определяется как сумма времен, в течение которых безотказно

работали испытываемые элементы. Таким образом, имеем

$$S(t) = \int_0^t N(s) ds = \sum_{i=1}^{d(t)} t_i + N(t)t, \quad (3.1.1)$$

где  $t_i$  — моменты отказов элементов. Так как для планов типа *B* значение  $S(t) = Nt$ , то нетривиальным дополнением к указанным выше шести планам являются следующие два плана типа *B*. Для первого плана, обозначаемого  $[N, B, HS_0]$ , момент остановки испытаний  $t^*$  определяется как момент, когда впервые  $S_n(t^*) = S_0$ ; если же окажется, что  $S(t_N) < S_0$ , то  $t^* = t_N$ . Для второго плана момент остановки  $t^*$  определяется как момент, когда впервые наступает одно из следующих событий: либо  $S(t^*) = S_0$  и  $d(t^*) < r$ , либо  $t^* = t_r$ , но  $S(t^*) < S_0$ . Здесь  $t_r$  — момент появления  $r$ -го отказа. Такой план будем обозначать  $[N, B, (r, HS_0)]$ . Полезно иметь в виду, что  $[N, B, HS_0] \equiv [N, B, (N, HS_0)]$ . Аналогичным образом имеем  $[N, B, (N, T)] \equiv [N, B, T]$ , однако  $[N, B, (N, T)] \not\equiv [N, B, T]$ .

Из рис. 3.1.2, *a*, *б*, *в* легко понять, что в принципе можно рассматривать планы типов *B*, *B*, у которых момент прекращения испытаний совпадает с моментом первого попадания в множество  $G$ , граница которого, вообще говоря, может быть произвольной формы (рис. 3.1.3, *a*). На рис. 3.1.3, *б* показан вальдовский

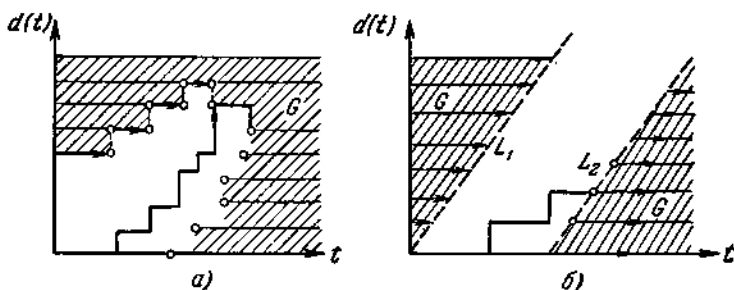


Рис. 3.1.3.

план типа последовательного анализа, о котором будет подробнее сказано в § 4.4 следующей главы. Для вальдовских планов границы множества  $G$  точек остановки испытаний задаются в виде двух параллельных прямых  $L_1$  и  $L_2$ , показанных пунктиром на рис. 3.1.3, *б*. Момент остановки  $t^*$  полагается равным первому моменту достижения траекторией  $d(t)$  одной из прямых:  $L_1$  или  $L_2$ .

Часть из описанных выше планов типов *B* и *B* рассматривалась ранее в литературе по надежности см., например, [1], [2], [3], [4]. В ряде случаев могут понадобиться планы, отличные от описанных выше. Так, при установочных испытаниях вновь разрабатываемых

изделий в определенные моменты часть из них может сниматься с испытаний. В результате этого число испытываемых изделий меняется не только за счет отказавших, но и в результате отбора части изделий для исследования; на планы такого типа дано указание в книге [7], стр. 355.

Если выбраны внешние условия проведения испытаний, согласована с заказчиком вероятностная характеристика и выбран план проведения испытаний, то по результатам испытаний, вся информация о которых содержится в отрезке траектории процесса  $d(t)$  до момента первого попадания в множество  $G$ , требуется дать методику оценки выбранной характеристики надежности или методику построения доверительного интервала. Этим мы и займемся в следующих параграфах настоящей главы.

В заключение параграфа сделаем несколько замечаний, которые носят скорее характер пожеланий и не содержат решения или даже указания путей решения поднимаемых вопросов.

В § 2.1 подчеркивалась относительность понятия отказа, вытекающая из произвольности понятия границ допуска. Позднее мы увидим, что определение вероятностных характеристик по моментам отказов даже со сравнительно умеренной степенью достоверности приводит к необходимости постановки на испытания огромного количества образцов. Количество испытываемых образцов можно резко сократить, если эти же вероятностные характеристики оценивать, учитывая весь ход изменения параметров во времени, а не единственный момент наступления отказа. Фиксируя лишь моменты отказов, мы, как правило, теряем большое количество ценной информации и эту потерю вынуждены восполнять тем, что проводим испытания на большем числе образцов. На пути решения этой задачи возникают немалые трудности. Во-первых, необходимо наличие специальной аппаратуры, с помощью которой можно было бы следить за изменением параметров испытываемых образцов. Во-вторых, необходимо построить теоретические модели, которые можно использовать для описания процессов изменения параметров во времени и на основе которых производились бы оценки требуемых вероятностных характеристик. Следует отметить, что часто изменения параметров, приводящих к отказу, не могут быть измерены непосредственно, но могут быть измерены другие величины, в которых содержится информация о возможном отказе. Например, известно, что отказ определяется значениями параметра  $\alpha_1(t)$ ; однако этих значений мы не знаем, но зато знаем значения параметра  $\alpha_2(t)$ . Известно, что  $\alpha_1(t)$  и  $\alpha_2(t)$  — взаимосвязанные между собой процессы (характер взаимосвязанности определяется в каждом конкретном случае по-своему). Требуется по значениям процесса  $\alpha_2(t)$  оценить требуемые вероятностные характеристики процесса  $\alpha_1(t)$ .

Помимо сокращения числа испытываемых образцов весьма актуальной является также и проблема уменьшения длительности испытаний. Дело в том, что в ряде случаев необходимы данные об отказах за длительный интервал непрерывной работы, порядка нескольких лет, а требуется эти данные получить по результатам испытаний за весьма небольшой промежуток времени. Возникает необходимость проведения ускоренных испытаний, когда испытываемые элементы (образцы аппаратуры) находятся в утяжеленных условиях работы (повышена температура окружающей среды, увеличена амплитуда или частота колебаний платформы с образцами, повышено напряжение и т. д.). Процессы «старения» при утяжеленных режимах работы протекают быстрее, отказы наступают раньше. Требуется построить модели подобия, которые позволяли бы по результатам ускоренных испытаний оценивать вероятностные характеристики, соответствующие нормальным условиям работы. Первоначально планировалось, что ускоренным испытаниям в нашей книге будет посвящен отдельный параграф. Однако внимательное изучение литературы и разговоры с инженерами привели нас к выводу, что это направление исследований находится на самом начальном этапе своего развития.

Мы считаем, что основные задачи развития метода ускоренных испытаний связаны с изучением физики процессов старения в зависимости от внешних условий и рабочего режима. Обычно используемый подход, основанный на установлении подобия для двух эмпирических функций распределения отказов — одной для нормальных внешних условий и второй, полученной в результате проведения ускоренных испытаний, — нам кажется недостаточным, так как при этом полностью игнорируются те физические процессы старения, которые происходят в испытываемых элементах. Исключение составляют лишь некоторые работы по ускоренным испытаниям конденсаторов. Интересные экспериментальные данные о результатах ускоренных испытаний конденсаторов приведены в работе [6].

### § 3.2. Общие методы оценки показателей надежности по результатам испытаний

Эмпирическая функция распределения и гистограмма результатов испытаний. В настоящем параграфе рассматриваются общие методы получения оценок параметров, определяющих надежность изделий. Эти методы могут быть использованы при обработке результатов наблюдений над изделиями, срок безотказной работы которых подчинен тому или иному распределению — показательному, Вейбулла, логарифмически нормальному и др. Однако чисто технические трудности заставляют нас ограничиться при этом только планами  $\{N, B, r\}$  и  $\{N, B, T\}$ .

Естественно, что последующие результаты применимы при обработке результатов испытаний не только элементов, но и сложных систем.

Напомним, что план  $[N, B, N]$  означает испытание  $N$  элементов до отказа последнего элемента; отказавшие элементы не заменяются новыми. План  $[N, B, N]$  можно использовать или в случае, когда элементы сравнительно ненадежны, или же при проведении ускоренных испытаний. Предположим, что испытываемые элементы занумерованы числами  $1, \dots, N$  и  $i$ -й элемент отказывает в момент  $x_i$ . Первый отказ наступает в момент  $t_1 = \min(x_1, \dots, x_N)$ ;  $t_1 = x_{i_1}$ , где  $i_1$  — номер элемента, оказавшегося первым;  $i_1$  — случайное число. Второй отказ наступает в момент  $t_2 = \min(x_1, \dots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \dots, x_N)$  и т. д. Наконец, в момент  $t_N = \max(x_1, \dots, x_N)$  отказывает последний элемент.

В статистике так упорядоченную последовательность чисел  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$  называют вариационным рядом для результатов наблюдений  $x_1, \dots, x_N$ .

При использовании  $[N, B, T]$  наблюдаются только те отказы, которые происходят до момента времени  $T$ . Если  $t_1 \leq t_2 \leq \dots$  — последовательные моменты отказов, то в результате испытаний мы наблюдаем случайное число  $d(T) = 0, 1, \dots, N$  отказов, происходящих в моменты  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{d(T)} \leq T$ . (Отказ с номером  $d(T) + 1$ , если он возможен, наступает после момента  $T$ .) Таким образом,  $d(T)$  означает номер последнего отказа, который происходит до момента  $T$  окончания испытаний. Если элементы достаточно надежно работают в интервале времени  $(0, T)$ , то нередко случается, что отказы не наблюдаются и  $d(T) = 0$ . Заметим теперь же, что отсутствие отказов во время испытаний, т. е. условие  $d(T) = 0$ , не дает нам права заключить, что надежность изделий равна 1. Впоследствии мы укажем правило оценки надежности в подобных случаях, основанное на понятии доверительного интервала.

Как уже указывалось выше (§ 2.2), наиболее полной характеристикой для надежности элементов является функция распределения  $F(t)$  для времени безотказной работы. О виде функции распределения можно судить по так называемой эмпирической функции распределения, определяемой посредством равенства  $F_N(x) = \frac{k}{N}$

для значений  $x$ ,  $t_k \leq x < t_{k+1}$ . Согласно теореме Гливенко (см. § 1.6) с вероятностью 1  $\sup_{-\infty \leq x \leq \infty} |F_N(x) - F(x)| \rightarrow 0$  при  $N \rightarrow \infty$ . На

рис. 3.2.1 показаны эмпирические функции распределения  $F_{10}(t)$  и  $F_{100}(t)$ , когда теоретическая функция распределения  $F(t) = 1 - e^{-t}$ . Если используется план  $[N, B, T]$ , то значения эмпирической функции  $F_N(t)$  могут быть определены только для  $t \leq T$ . Если же



используется план  $[N, B, r]$ , то значения эмпирической функции определяются только до уровня  $\frac{r}{N}$ .

Оценкой для плотности вероятностей  $p(t) = \frac{dF(t)}{dt}$  может служить так называемая *гистограмма*  $p_N(t)$ . В отличие от эмпирической

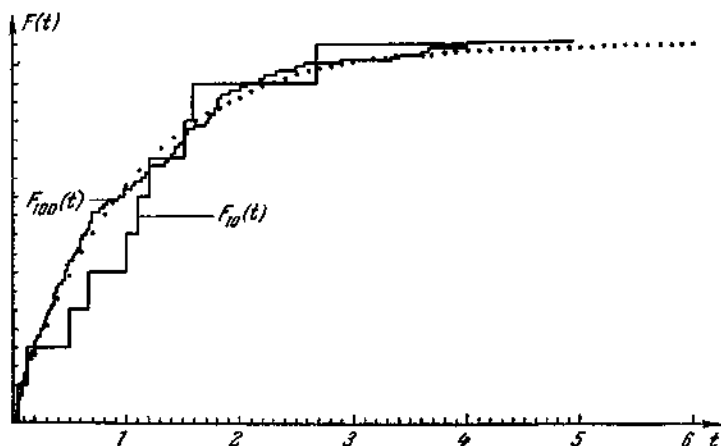


Рис. 3.2.1.

функции  $F_N(t)$  гистограмма  $p_N(t)$  может быть построена различными способами. Например, можно разбить область значений времени  $t$  на интервалы  $(S_k, S_{k+1})$ ,  $k=1, \dots, m, \dots$ , и на каждом из этих интервалов положить

$$p_N(t) = \frac{d_k}{N} \frac{1}{[S_{k+1} - S_k]} \quad S_k \leq t < S_{k+1},$$

где  $d_k$  — число отказов, которые наблюдались в интервале  $(S_k, S_{k+1})$ . На рис. 3.2.2, а приведен пример построения гистограммы для показательного закона  $F(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $N=50$ ,  $S_k - S_{k-1} \approx 0,9$ .

При втором способе выбирается число интервалов  $k+1$ , так что  $d = \left[ \frac{N}{k} \right] \geq 10$ , при этом  $k \geq 5$ , а остаток  $d'$  от деления  $N = kd + d'$  также близок к  $d$ . Первый интервал —  $[0, S_1]$ , где  $S_1$  совпадает с моментом  $d$ -го отказа, второй интервал —  $[S_1, S_2]$ , где  $S_2$  совпадает с моментом  $2d$ -го отказа и т. д., наконец,  $k$ -й интервал —  $[S_{k-1}, S_k]$ , где  $S_k = t_{kd}$ . Последний,  $(k+1)$ -й, интервал —  $[S_k, t_N]$ . На каждом из  $k$  интервалов группировки  $(S_i, S_{i+1})$ ,

$l=0, \dots, k-1$ , полагаем

$$p_N(t) = \frac{d}{N} \frac{1}{S_{l+1} - S_l},$$

$$p_N(t) = \frac{d'}{N} \frac{1}{t_N - S_k}$$

на интервале  $[S_k, t_N]$  и  $p_N(t) = 0$  для значений  $t > t_N$ . Гистограмма, построенная по этому способу для  $F(t) = 1 - e^{-t}$ ,  $N = 50$ ,  $k+1 = 5$ ,  $d = 10$ , показана на рис. 3.2.2, б. Функция опасности отказов  $\lambda(t)$  определялась по формуле  $\lambda(t) = \frac{P(t)}{R(t)}$ , где  $R(t) = 1 - F(t)$ . Если число испытываемых элементов  $N$  велико и интервалы между последовательными моментами отказов сравнительно невелики, то можно построить эмпирическую функцию опасности отказов. Ось времени разбиваем на несколько участков  $[S_{i-1}, S_i]$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $S_0 = 0$ . Оценкой для  $R(t) = 1 - F(t)$  является отношение  $\frac{N(t)}{N}$ , где  $N(t)$  — число элементов, исправно работающих к моменту времени  $t$ ;  $N(t)$  — случайная величина. За оценку для  $p(t)$  берем  $\frac{d_i}{N} \frac{1}{S_i - S_{i-1}}$ , где  $d_i$  — число элементов, отказавших на интервале  $S_{i-1} < t < S_i$ . Эмпирическую функцию опасности отказов  $\lambda_N(t)$  полагаем равной отношению

$$\lambda_N(t) = \frac{\frac{d_i}{N} \frac{1}{S_i - S_{i-1}}}{\frac{N(t)}{N}} = \frac{d_i}{(S_i - S_{i-1}) N(t)}.$$

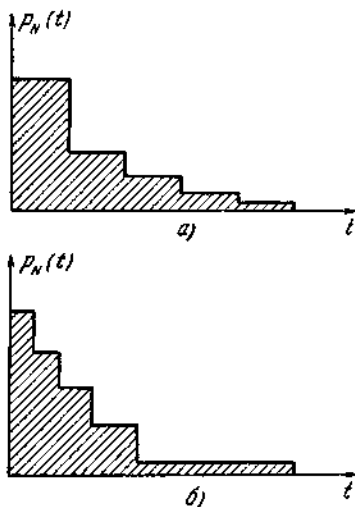


Рис. 3.2.2.

При этом интервалы  $[S_{i-1}, S_i]$  можно выбирать способом, аналогичным одному из описанных выше способов построения гистограммы.

Иногда не обязательно знать всю функцию распределения  $F(t)$ , ее плотность  $p(t)$  или функцию опасности отказов  $\lambda(t)$ , а достаточно знать лишь некоторые характеристики: моменты, квантили и др. Момент  $k$ -го порядка в случае плана  $[N, B, N]$  определяется по формуле

$$\bar{t}^k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^k,$$

центральный момент  $k$ -го порядка — по формуле

$$\overline{(t - \bar{t})^k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{t})^k.$$

Число  $t_p$  такое, что  $F(t_p) = p$ , называется *квантилью уровня  $p$* . Эмпирической квантилью  $\hat{t}_p$  уровня  $p$  называется одно из решений уравнения  $F_N(\hat{t}_p) = p$ . Мы всюду предполагаем, что  $F(t)$  является непрерывной.

Три типа статистической устойчивости. В случае плана  $[N, B, N]$  нам известна вся эмпирическая функция распределения  $F_N(t)$ , а в случае плана  $[N, B, T]$  — лишь часть ее определенная для значений  $t \leq T$ . Для оценки неизвестной функции распределения  $F(t)$  и различных числовых ее характеристик возможны три принципиально различных подхода, соответствующих различным реальным условиям, в которых решается задача.

В первом, наиболее простом случае заранее известен тип закона распределения  $F(t)$ . Например, в результате теоретических исследований и последующей экспериментальной проверки показано, что для определенного типа элементов и аппаратуры закон распределения времени безотказной работы является показательным, т. е.  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t \geq 0$ . Неизвестно лишь значение параметра  $\lambda$ , которое надо оценить по результатам проведенных испытаний.

Во втором случае нет теоретических соображений, из которых следовало бы, что тип закона распределения  $F(t)$  должен быть вполне определенным, например показательным, логарифмически нормальным или каким-то другим. Однако результаты испытаний показывают, что эмпирические функции распределения могут быть приближены плавно меняющимися функциями распределений.

Из предварительной обработки экспериментальных данных видно, что качественный характер поведения эмпирических функций распределения или гистограмм не меняется от партии к партии. На рис. 3.2.3 показан вид двух гистограмм, соответствующих двум различным партиям продукции. Анализируя вид гистограмм,

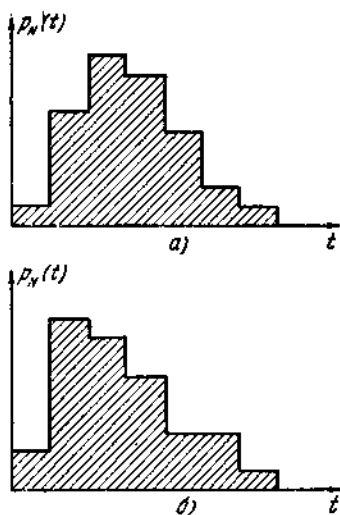


Рис. 3.2.3.

мы замечаем, что обе они имеют существенную асимметрию и обе односторонни. В таких случаях подбирают одно из возможных семейств функций распределения, для которого качественное поведение функций распределения, или плотностей, соответствует полученным экспериментальным данным. Наиболее часто используемые в практике надежности семейства были списаны в § 1.2. Если семейство распределений выбрано, то задача определения функции  $F(t)$  и ее характеристик сводится к оценке по результатам испытания неизвестных значений параметров или функций от них. Например, если мы пытаемся приближенно описать данные с помощью логарифмически нормального закона (см. § 1.2, пример 11), то неизвестными значениями параметров являются  $\mu$  и  $\sigma$ . При этом в самом начале работ полезно сравнить результаты, получаемые при использовании двух-трех типов семейств распределений. Если два семейства дают одинаково хорошие результаты, то для дальнейшего использования выбирается то из них, для которого можно предложить теоретические обоснования. В том же случае, когда теоретических предпосылок для выбора распределения нет, нужно предпочесть то, для которого трудоемкость числовых расчетов меньше.

Возможен, однако, и третий случай условий производства, когда качественный характер эмпирической функции  $F_N(t)$  меняется от партии к партии или же когда для приближений нужны семейства со многими неизвестными параметрами и соответственно требуются громоздкие вычисления необходимых характеристик. В этих случаях можно использовать некоторые методы непараметрической статистики (см. § 4.5), т. е. методы, не связанные с аналитическим видом функции распределения  $F(t)$ .

Для весьма надежных элементов реализация плана  $[N, B, N]$  или  $[N, B, N]$  приводит к необходимости проведения испытаний в течение многих тысяч часов. Именно по этой причине часто используются различные планы с фиксированной длительностью испытаний ( $[N, B, T]$ ,  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, (r, T)]$ ,  $[N, B, (r, T)]$  и др.). При этом по наблюдениям, полученным за ограниченный промежуток времени, нужно оценить различные показатели надежности, связанные с отказами, которые могут произойти после момента  $T$ , среднее время безотказной работы в течение времени  $T_3 > T$  и др. Использование результатов за ограниченное время наблюдения для получения оценок всевозможных характеристик надежности законно в первом случае, когда вид функции распределения  $F(t)$  нам известен до опыта и только неизвестны значения параметров, определяющих этот закон. Весь следующий параграф относится к этому случаю лишь с тем ограничением, что рассматривается функция распределения  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ . Во втором случае надо иметь достаточный статистический материал,

который хотя бы косвенно подтверждал правильность выводимых числовых оценок. Таким косвенным подтверждением могут служить результаты испытаний отдельных партий элементов, проводившихся в течение длительного времени, или сведения об отказах эксплуатируемого оборудования. Наконец, в третьем случае, когда нет устойчивости даже качественного поведения эмпирической функции распределения, получение оценок любых характеристик надежности, которые определяются по значениям  $F(t)$  для  $t > T$ , где  $T$ —время испытаний, не является законным. В этом случае прежде всего необходимо отладить технологический процесс.

В подтверждение этих соображений рассмотрим следующий пример. В нем мы намеренно «сгустили краски». Предположим, что проводятся испытания  $N=1000$  элементов. Каждый элемент состоит из двух частей, отказ каждой из которых приводит к отказу элемента (например, проводящий слой сопротивления и контакты). Отказы обеих частей происходят независимо друг от друга. Таким образом, если  $t_1$ —момент, когда произойдет отказ первой части (обрыв), а  $t_2$ —момент отказа второй части (уход параметра за пределы допуска), то считается, что отказ элемента произойдет в момент  $t = \min(t_1, t_2)$ . Предположим далее, что

$$P\{t_1 > T\} = e^{-\frac{t}{\theta}}, \quad P\{t_2 > t\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{t\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx,$$

где  $\theta = 2000$  час,  $\mu = 1000$  час,  $\sigma = 100$  час. Однако экспериментатору неизвестно, что закон распределения времени безотказной работы

$$F(t) = 1 - P\{\min(t_1, t_2) > t\} = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Вид функции  $F(t)$  показан на рис. 3.2.4. Было решено проводить испытания в течение  $T=500$  час. Вероятность отказа первого элемента равна

$$F(T) \approx 1 - e^{-\frac{T}{\theta}} = 1 - e^{-0,25}.$$

Таким образом, мы в среднем наблюдаем  $NF(T) \approx 100$  отказов, причем практически все наблюдаемые отказы будут только первого типа (обрыв), так как отказы второго типа (уход параметров) при сделанных выше предположениях начнут наступать после 800 час работы, но зато уже к 1200 час работы почти все элементы выйдут из строя вследствие отказов второго

типа. Отказов второго типа в течение  $T=500$  час мы не наблюдаем, поэтому ошибочно считаем, что закон  $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$ , и по результатам этих испытаний, пользуясь методами следующего параграфа, находим оценку для  $\theta$ , близкую к 2000. Итак, по

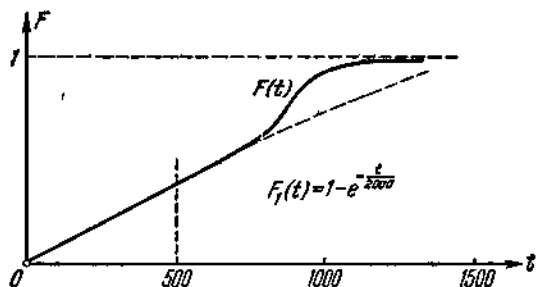


Рис. 3.2.4.

результатам испытаний, проводимых в течение  $T=500$  час, сделан ошибочный вывод относительно характера распределения.

Вывод из этого примера таков. Надо сначала проверить теоретически или экспериментально (а лучше обоими путями), что вид закона  $F(t)$  и при значениях  $t$ , больших времени  $T$  проведения испытаний, не меняется, а уже затем получать оценки для характеристик надежности.

Рассмотрим теперь некоторые общие методы получения оценок параметров распределения времени безотказной работы. В общем плане часть этих методов была изложена в § 1.6. При оценке параметров конкретного семейства распределений могут быть употреблены различные методы. В зависимости от используемого метода будут получаться отличающиеся друг от друга оценки неизвестных значений параметров. Необходимо провести сравнение различных методов и для дальнейшего выбрать метод, дающий наилучшие результаты. В тех случаях, когда вычисления приходится выполнять вручную, нужно оценивать метод и с точки зрения трудоемкости вычислений.

Графические методы. Первая и наиболее простая группа методов — *графические* методы оценки. Они применимы для некоторых семейств  $F(t, \alpha, \beta)$ , содержащих два неизвестных параметра  $\alpha, \beta$ . График функции распределения  $F(t, \alpha, \beta)$  можно представить в виде совокупности точек  $(t, p)$  на плоскости, где  $p = F(t, \alpha, \beta)$ . Основная идея графического метода состоит в том, что подбирается такая непрерывная замена координат  $t' = h(t)$ ,  $p' = \varphi(p)$ , что при этом график функции распределения  $(t', p')$ ,

где  $p' = \varphi(F(t, \alpha, \beta))$ , становится прямой линией  $p' = \psi(\alpha, \beta) t' + \chi(\alpha, \beta)$ . Если такую замену переменных удалось отыскать, то на плоскости  $(t', p')$  любая функция распределения этого семейства будет представима в виде прямой  $p' = \psi(\alpha, \beta) t' + \chi(\alpha, \beta)$  или, что то же, в виде прямой

$$\varphi(F(t, \alpha, \beta)) = \psi(\alpha, \beta) h(t) + \chi(\alpha, \beta). \quad (3.2.1)$$

Используем этот факт для оценки параметров  $\alpha, \beta$ . Предположим, что в результате испытаний получены  $N$  значений некоторой случайной величины (например, времени безотказной работы элемента или интервалов между отказами в аппаратуре). По этим значениям мы можем построить эмпирическую функцию распределения  $F_N(t)$ . Так как эмпирическая функция  $F_N(t)$  при больших  $N$  лежит вблизи от теоретической функции распределения  $F(t, \alpha, \beta)$ , то после замены переменных график  $(t', p'_N)$ , где  $t' = h(t)$ , а  $p'_N = \varphi[F_N(t)]$ , будет лежать в непосредственной близости от графика  $(t', p')$ , являющегося прямой вида (3.2.1). Оценив с помощью линейки тангенс наклона  $k$  и свободный член  $b$  и приравняв их теоретическим значениям, получаем уравнения

$$k = \psi(\alpha, \beta), \quad b = \chi(\alpha, \beta), \quad (3.2.2)$$

из которых находим оценки неизвестных значений параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

Уместно заметить, что графический метод применим для любого из планов  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, (r, T)]$ ,  $[N, B, (r, T)]$ . Например, в случае плана  $[N, B, (r, T)]$  по результатам испытаний можем построить только часть  $F_N(t)$  для значений  $t \leq \min(t_r, T)$  и  $F_N(t) \leq \frac{d(T)}{N}$ , где  $d(T) \leq r$  — число элементов, отказавших за время проведения испытаний. Если к полученному куску эмпирической функции распределения применить преобразования  $t' = h(t)$ ,  $p' = \varphi(F_N(t))$ , то на плоскости  $(t', p')$  получим кусок ломаной, близкой к одной из прямых вида (3.2.1). По этому куску оцениваем  $k$  и  $b$  и снова приходим к уравнениям (3.2.2).

Для примера, рассмотрим три семейства распределений. В случае нормального семейства распределений

$$F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right), \quad \text{где} \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

в качестве преобразования  $\varphi(p)$  рассмотрим функцию  $\Phi^{-1}(p)$ , обратную к функции  $p = \Phi(t)$ . При этом получаем

$$p' = \varphi(F(t, \mu, \sigma)) = \Phi^{-1}\left[\Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)\right] = \frac{t-\mu}{\sigma}. \quad (3.2.3)$$

Таким образом, (3.2.3) соответствует (3.2.2), когда

$$t' = h(t) = t, \quad \psi(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma}, \quad \chi(\mu, \sigma) = -\frac{\mu}{\sigma}.$$

Для удобства пользования выпускается специальная нормальная вероятностная бумага. По оси абсцисс отложены значения  $t$  случайной величины, а по оси ординат — значения функции  $\Phi^{-1}(p)$ . При этом ось  $t$  проводится через точку 0, соответствующую  $\Phi^{-1}(0,5)$ . Около каждого значения  $\Phi^{-1}(p)$  отмечается соответствующее ему значение  $p$  (рис. 3.2.5). Функция распределения

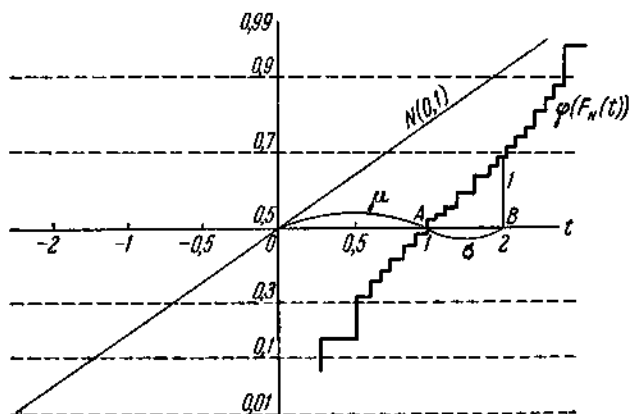


Рис. 3.2.5.

$\Phi(t)$  записывается в виде прямой  $y = x$ . Прямой  $y = \frac{x - \mu}{\sigma}$  соответствует функция распределения нормальной случайной величины со средним  $\mu$  и дисперсией  $\sigma^2$ . Таким образом, с помощью вероятностной бумаги можно легко проверять «на глаз» нормальность закона распределения, а заодно и оценивать его параметры. Если ломаная имеет заметную искривленность, то это говорит о том, что истинный закон распределения не является нормальным. Если же искривленности нет, то, проводя «на глаз» прямую, наиболее плотно прилегающую к ломаной, легко находим оценки для  $\mu$  и  $\sigma$ .  $\frac{\mu}{\sigma}$  равно абсциссе точки  $A$ , где  $A$  — точка пересечения прямой с осью  $t$ ;  $\sigma$  равно расстоянию от  $A$  до  $B$ , где  $B$  — точка на оси  $t$ , в которой величина перпендикуляра, опущенного из точки прямой на ось  $t$ , равна 1 (в единицах масштаба оси абсцисс).



В случае логарифмически нормального закона  $F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\ln \frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ , поэтому  $p' = \varphi(p) = \Phi^{-1}(p)$ ,  $h(t) = \ln t$ ,  $\psi(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma}$ ,  $\chi(\mu, \sigma) = \frac{\mu}{\sigma}$ .

Если задано семейство показательных распределений со сдвигом

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{t-\mu}{\theta}}, & t > \mu, \\ 0, & t \leq \mu, \end{cases}$$

$$\ln \frac{1}{1-F(t)} = \frac{t-\mu}{\theta}, \quad (3.2.4)$$

где  $t \geq \mu$ . Поэтому в качестве  $p' = \varphi(p)$  выбираем функцию  $\varphi(p) = \ln \frac{1}{1-p}$ . Сравнивая (3.2.4) с (3.2.1), видим, что  $t' = h(t) = t$ ,  $\psi(\mu, \theta) = \frac{1}{\theta}$ ,  $\chi(\mu, \theta) = -\frac{\mu}{\theta}$ .

Наконец, если нам задано семейство распределений Вейбулла

$$F(t, p, \theta) = 1 - e^{-\frac{t^p}{\theta}},$$

то

$$\lg \lg \frac{1}{1-F(t)} = p \lg t - \lg \theta + \lg \lg e. \quad (3.2.5)$$

Сравнивая (3.2.5) с (3.2.1), находим, что

$$p' = \varphi(p) = \lg \lg \frac{1}{1-p}, \quad t' = h(t) = \ln t,$$

$$\psi(p, \theta) = p, \quad \chi(p, \theta) = -\lg \theta + \lg \lg e.$$

Вид бумаги для закона Вейбулла показан на рис. 3.2.6. Таким образом, тангенс угла наклона равен  $p$ , а логарифм  $\theta$  равен величине отрезка  $OA$ , отсекаемого прямой на оси ординат.

Методы квантилей и моментов. Для получения оценок неизвестных значений параметров, определяющих вид закона распределения времени безотказной работы, могут быть использованы методы моментов и квантилей. Применительно к случаю выборки объема  $N$  эти методы были описаны в § 1.6. Здесь мы рассматриваем эти методы с точки зрения обработки результатов испытаний, полученных при использовании некоторых планов типа  $B$ . Для определенности мы ограничимся случаем двух неизвестных параметров  $\alpha, \beta$ .

Пусть закон распределения времени безотказной работы  $F(t, \alpha, \beta)$  имеет непрерывно дифференцируемую плотность, принимающую положительные значения для любых возможных значений

параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ . Если испытания проводились по плану  $[N, B, r]$ ,  $r \gg 1$ , то момент  $t_{i_i}$  появления  $i_i$ -го отказа можно рассматривать как эмпирическую квантиль, соответствующую уровню  $q_i = \frac{i_i}{N}$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Если  $i_i$  и  $N$  достаточно велики, то можно считать

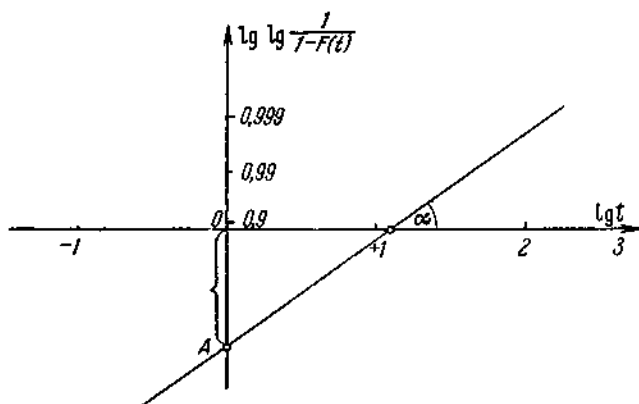


Рис. 3.2.6.

(см. § 1.6), что  $\delta t_{i_i} = t_{i_i} - t_{q_i}$  ( $i = 1, 2$ ) имеют нормальное распределение с нулевыми средними и матрицей дисперсий

$$\begin{vmatrix} \frac{q_1(1-q_1)}{Nf_1^2} & \frac{q_1(1-q_2)}{Nf_1f_2} \\ \frac{q_1(1-q_2)}{Nf_1f_2} & \frac{q_2(1-q_2)}{Nf_2^2} \end{vmatrix},$$

где

$$F(t_{q_i}, \alpha, \beta) = q_i, \quad f_i = \left. \frac{dF(t, \alpha, \beta)}{dt} \right|_{t=t_{q_i}}.$$

Если бы значения квантилей  $t_{q_1}$ ,  $t_{q_2}$  были нам известны точно, то значения параметров  $\alpha$ ,  $\beta$  можно было бы найти из уравнений

$$F(t_{q_1}, \alpha, \beta) = q_1, \quad F(t_{q_2}, \alpha, \beta) = q_2. \quad (3.2.6)$$

Нам известны лишь приближенные значения этих квантилей — моменты  $t_i$  и  $t_r$  появления  $i$ -го и  $r$ -го отказов. Заменяя в уравнениях (3.1.6) значения квантилей их оценками, получаем уравнения

$$F(t_i, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{i}{N}, \quad F(t_r, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{r}{N}, \quad (3.2.7)$$

решения которых  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$  являются состоятельными оценками для параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ , при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\frac{l}{N} = \text{const}$ ,  $\frac{r}{N} = \text{const}$ , что непосредственно следует из непрерывности функции  $F(t, \alpha, \beta)$ . Можно показать, что эти оценки при весьма общих предположениях типа гладкости функции  $F(t, \alpha, \beta)$  являются асимптотически несмещенными и асимптотически нормально распределенными. Поэтому наиболее существенными показателями качества таких оценок являются их дисперсии.

Проиллюстрируем метод квантилей на примере закона Вейбулла  $F(t, p, \theta) = 1 - e^{-\frac{t^p}{\theta}}$ ,  $t > 0$ . Испытания проводятся по плану  $[N, B, r]$ . Выбирается значение  $l$  (можно выбрать  $l \approx \frac{r}{2}$ ). В результате испытаний фиксируются значения  $t_l$  и  $t_r$  моментов  $l$ -го и  $r$ -го отказов. Уравнения (3.2.7) переписываются в виде

$$1 - e^{-\frac{t_l^p}{\theta}} = \frac{l}{N}, \quad 1 - e^{-\frac{t_r^p}{\theta}} = \frac{r}{N}.$$

Разрешая их относительно неизвестных значений параметров  $p, \theta$ , получаем оценки

$$\hat{p} = \frac{\ln \ln \frac{N}{N-r} - \ln \ln \frac{N}{N-l}}{\ln t_r - \ln t_l}; \quad \hat{\theta} = \frac{\ln \left( \frac{N}{N-l} \right)}{t_l^{\hat{p}}}.$$

Если предположить, что у  $F(t, \alpha, \beta)$  существуют вторые непрерывные частные производные по  $t$  и параметрам  $\alpha, \beta$ , то, используя обычный прием (см. § 1.6) разложения в ряд Тейлора, можно получить приближенное выражение для дисперсии оценок параметров  $\alpha, \beta$ .

Введем обозначения  $q_i = \frac{t_i}{N}$ ;  $F(t_{q_i}, \alpha, \beta) = q_i$ ;  $\delta t_i = t_i - t_{q_i}$ ,  $i = \overline{1, 2}$ ;  $\delta \alpha = \hat{\alpha} - \alpha$ ;  $\delta \beta = \hat{\beta} - \beta$ . Из уравнений (3.2.7) находим

$$F(t_{q_1}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = F(t_{q_1}, \alpha, \beta) + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial t} \delta t_1 + \\ + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \delta \beta + o(\delta t, \delta \alpha, \delta \beta) = q_1.$$

Заметив, что  $F(t_{q_1}, \alpha, \beta) = q_1$ , получаем с точностью до бесконечно малых высших порядков

$$\frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial t} \delta t_1 + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F(t_{q_1}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \delta \beta = 0. \quad (3.2.8)$$

Аналогично находим, что

$$\frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial t} \delta t_{i_2} + \frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} \delta \alpha + \frac{\partial F(t_{q_2}, \alpha, \beta)}{\partial \beta} \delta \beta = 0. \quad (3.2.8')$$

Разрешая эти линейные уравнения (3.2.8) и (3.2.8') относительно ошибок  $\delta \alpha$  и  $\delta \beta$ , получаем их в виде линейных комбинаций от  $\delta t_{i_1}$  и  $\delta t_{i_2}$ :

$$\delta \alpha = a_{\alpha t_1} \delta t_{i_1} + a_{\alpha t_2} \delta t_{i_2}, \quad \delta \beta = a_{\beta t_1} \delta t_{i_1} + a_{\beta t_2} \delta t_{i_2}.$$

Отсюда, используя матрицу вторых моментов для квантилей  $t_{i_1}$ ,  $t_{i_2}$ , можно найти дисперсии ошибок

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}(\hat{\alpha}) &\cong a_{\alpha t_1}^2 \mathbf{M}(\delta t_{i_1})^2 + 2a_{\alpha t_1} a_{\alpha t_2} \mathbf{M} \delta t_{i_1} \delta t_{i_2} + a_{\alpha t_2}^2 \mathbf{M}(\delta t_{i_2})^2, \\ \mathbf{D}(\hat{\beta}) &\cong a_{\beta t_1}^2 \mathbf{M}(\delta t_{i_1})^2 + 2a_{\beta t_1} a_{\beta t_2} \mathbf{M} \delta t_{i_1} \delta t_{i_2} + a_{\beta t_2}^2 \mathbf{M}(\delta t_{i_2})^2, \\ \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \sum a_{\alpha t_i} a_{\beta t_j} \mathbf{M} \delta t_i \delta t_j. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.9)$$

В частности, в случае закона Вейбулла получаем

$$\mathbf{D}(\hat{\rho}) \cong \frac{\theta^2}{N \left[ \ln \left( \frac{t_{q_2}}{t_{q_1}} \right) \right]^2} \left[ \frac{q_1 (1-q_1)}{t_{i_1}^{2\rho}} e^{\frac{t_{i_1}^\rho}{\theta}} - \right. \\ \left. - 2 \frac{q_1 (1-q_2)}{(t_{i_1} t_{i_2})^\rho} e^{\frac{t_{i_1}^\rho + t_{i_2}^\rho}{\theta}} + \frac{q_2 (1-q_2)}{t_{i_2}^{2\rho}} e^{\frac{t_{i_2}^\rho}{\theta}} \right].$$

Метод квантилей в несколько видоизмененной форме можно использовать и в случае планов  $[N, B, T]$ . В этом случае вместо уравнений (3.2.6) можем записать

$$F(T_1, \alpha, \beta) = q_1, \quad F(T_2, \alpha, \beta) = q_2, \quad (3.2.10)$$

где  $T_1 < T_2 \leq T$ . Однако значения  $F(t, \alpha, \beta)$  при  $t = T_1$  и  $t = T_2$  нам неизвестны. Нам известны лишь числа  $d(T_1)$  и  $d(T_2)$  отказов, происшедших к моментам  $T_1$  и  $T_2$ . При больших значениях  $N$  отношения  $\frac{d(T_1)}{N}$  и  $\frac{d(T_2)}{N}$  близки к теоретическим значениям  $q_1$  и  $q_2$ . Поэтому, заменяя в (3.2.10) значения  $q_1, q_2$  их оценками, получаем уравнения

$$F(T_1, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{d(T_1)}{N}, \quad F(T_2, \hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{d(T_2)}{N} \quad (3.2.11)$$

для нахождения оценок  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$ . Используя разложение функции  $F(t, \alpha, \beta)$  в ряд Тейлора по параметрам  $\alpha$  и  $\beta$ , можно найти приближенные выражения для дисперсий оценок.

В книге [7], посвященной непараметрическим методам в статистике, дано решение задачи о наиболее рациональном выборе уровней квантилей для случаев испытаний  $[N, B, N]$  и законов нормального и экспоненциального типов. Если объем выборки  $N$  велик, то можно для получения оценки параметров использовать не все данные, а только значения  $k$  определенным образом выбранных эмпирических квантилей,  $t_{(N_1)}, \dots, t_{(N_k)}$ , где  $N_k = [Np_k] + 1$ ,  $0 < p_1 < \dots < p_k < 1 \dots$ . При этом числа  $p_1, \dots, p_k$  подбираются таким образом, чтобы дисперсии ошибок неизвестных параметров были бы минимальными. Например, для случая закона экспоненциального типа  $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$  оценка ищется в виде линейной комбинации

$$\hat{\theta}^* = \sum_{i=1}^k b_i t_{(N_i)}, \quad (3.2.12)$$

где коэффициенты  $b_i$  и числа  $N_i$  подобраны таким образом, чтобы дисперсия оценки была наименьшей. Как известно, наилучшей оценкой для параметра  $\theta$  при использовании всех данных является

$$\hat{\theta} = \left(\frac{1}{N}\right) \sum_{i=1}^N t_i. \text{ Подсчет отношения дисперсий } \kappa_k = \frac{D[\hat{\theta}]}{D[\hat{\theta}^*]} \text{ этих оценок}$$

в зависимости от выбранного числа квантилей  $k$  показал, что

$$\kappa_1 = 0,65, \quad \kappa_2 = 0,82, \quad \kappa_3 = 0,89, \quad \kappa_{10} = 0,98.$$

В книге [7] приведены таблицы оптимальных значений  $p_i$  и  $b_i$ ; так,  $p_1 = 0,64$ ,  $b_1 = 0,52$ ,  $p_2 = 0,93$ ,  $b_2 = 0,18$  для  $k = 2$ .

Так же как и метод квантилей, метод моментов может быть использован только при обработке результатов испытаний, в которых наблюдаемое число отказов достаточно велико. Если испытания проводятся в соответствии с планом  $[N, B, T]$ , то условная плотность вероятности распределения момента отказа при условии, что такой отказ произошел за время испытаний  $T$ , равна  $\frac{f(t, \alpha, \beta)}{F(T, \alpha, \beta)}$ . Таким образом, для момента  $k$ -го порядка, относящегося к наблюдаемым отказам, имеем

$$\int_0^T t^k \left[ \frac{f(t, \alpha, \beta)}{F(T, \alpha, \beta)} \right] dt = \varphi_k(\alpha, \beta). \quad (3.2.13)$$

Если  $d(T)$  — число зарегистрированных за время  $T$  отказов, а моменты отказов  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{d(T)} \leq T$ , то эмпирические моменты

первого и второго порядков равны соответственно  $\frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i}{d(T)}$  и  $\frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i^2}{d(T)}$ .

Если  $d(T)$  достаточно велико, то в силу закона больших чисел значения эмпирических моментов близки к теоретическим. Приравнявая значения теоретических моментов в (3.2.13) значениям эмпирических моментов, получаем уравнения для нахождения оценок  $\hat{\alpha}$ ,  $\hat{\beta}$ :

$$\varphi_j(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \frac{\sum_{i=1}^{d(T)} t_i^j}{d(T)}, \quad j=1, 2. \quad (3.2.14)$$

Если испытания проводились в соответствии с планом типа  $[N, B, r]$ ,  $r \gg 1$ , то соответствующие уравнения для оценок можно получить, исходя из средних значений для членов вариационного ряда. Здесь имеем

$$\begin{aligned} \gamma_l(\alpha, \beta) &= Mt_l = \\ &= \frac{N!}{(l-1)!(N-l)!} \int_0^{\infty} t^l f(t, \alpha, \beta) F(t, \alpha, \beta)^{l-1} [1 - F(t, \alpha, \beta)]^{N-l} dt. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Выбирая два порядковых номера  $l < k \leq r$ , получаем уравнения для нахождения оценок

$$\gamma_l(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = t_{(l)}, \quad \gamma_k(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = t_{(k)}, \quad (3.2.16)$$

где  $\gamma_j(\alpha, \beta)$  определяется по формуле (3.2.15).

В заключение заметим, что можно также использовать и смешанные методы, когда одно из уравнений для нахождения оценок описывается в соответствии с методом квантилей, а другое — в соответствии с методом моментов. Сравнение эффективности различных методов можно проводить путем сравнения дисперсии полученных оценок. При этом могут быть применены асимптотические методы, аналогичные методу разложения в ряд Тейлора и последующего использования асимптотической нормальности отклонений. Этим методом были получены выражения (3.2.9) для дисперсий оценок в методе квантилей. Выражение для матрицы ковариаций моментов дано в § 1.6.

В качестве примера, иллюстрирующего метод моментов, рассмотрим оценку параметров  $\alpha, \beta$  в случае, когда плотность вероятности отказов принадлежит семейству гамма-распределений  $f(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t}$ , а испытания проводились в соответствии с планом  $[N, B, N]$ . Так как

$$\varphi_1(\alpha, \beta) = \frac{\alpha}{\beta}, \quad \varphi_2(\alpha, \beta) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}, \quad (3.2.17)$$

а оценками для  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются  $\bar{t} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i$ ,  $\bar{t}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i^2$ , то, заменяя в (3.2.17) моменты оценками, получаем уравнения

$$\bar{t} = \frac{\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}, \quad \bar{t}^2 = \frac{\hat{\alpha}(\hat{\alpha}+1)}{\hat{\beta}^2}.$$

Решения этих уравнений имеют вид

$$\hat{\beta} = H_1(\bar{t}, \bar{t}^2) = \frac{\bar{t}}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2}, \quad \hat{\alpha} = H_2(\bar{t}, \bar{t}^2) = \frac{(\bar{t})^2}{\bar{t}^2 - (\bar{t})^2}. \quad (3.2.18)$$

Введем обозначения  $\delta\bar{t} = \bar{t} - \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\delta\bar{t}^2 = \bar{t}^2 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$  и используем метод разложения в ряд Тейлора

$$\left. \begin{aligned} \hat{\beta} &\approx \beta + \left[ \frac{\partial H_1(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}} \right] \delta\bar{t} + \left[ \frac{\partial H_1(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}^2} \right] \delta\bar{t}^2, \\ \hat{\alpha} &\approx \alpha + \left[ \frac{\partial H_2(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}} \right] \delta\bar{t} + \left[ \frac{\partial H_2(\bar{t}, \bar{t}^2)}{\partial \bar{t}^2} \right] \delta\bar{t}^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.19)$$

Символы  $\left[ \frac{\partial H_i}{\partial \bar{t}} \right]$ ,  $\left[ \frac{\partial H_i}{\partial \bar{t}^2} \right]$  означают, что рассматриваются значения производных при  $\bar{t} = \frac{\alpha}{\beta}$ ,  $\bar{t}^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$ .

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\delta\bar{t})^2 &= \mathbf{D}[\bar{t}] \cong \frac{\alpha}{N\beta^2}, & \mathbf{M}(\delta\bar{t}^2)^2 &\cong \mathbf{D}[\bar{t}^2] = \frac{1}{N} \frac{2\alpha(\alpha+1)(2\alpha+3)}{\beta^4}, \\ & & \mathbf{M}(\delta\bar{t} \delta\bar{t}^2) &\cong \frac{1}{N} \frac{2\alpha(\alpha+1)}{\beta^3}. \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Из (3.2.19) и (3.2.20) находим выражения для дисперсий и ковариации оценок, полученных методом моментов:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{D}(\hat{\alpha}) &= \mathbf{M}(\hat{\alpha} - \alpha)^2 \approx \frac{2\alpha(\alpha+1)}{N}, \\ \text{cov}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) &= \mathbf{M}(\hat{\alpha} - \alpha)(\hat{\beta} - \beta) \approx \frac{2\beta(\alpha+1)}{N}, \\ \mathbf{D}(\hat{\beta}) &= \mathbf{M}(\hat{\beta} - \beta)^2 \approx \frac{(2\alpha+3)\beta^2}{N\alpha}. \end{aligned} \right.$$

Метод максимального правдоподобия. Для оценки параметров наиболее часто используется метод *максимального правдоподобия*. Описание этого метода было дано в § 1.6. Там же было сказано, что при ограничениях типа регулярности с помощью

метода максимального правдоподобия можно получать асимптотически эффективные оценки. Однако планы типа  $[N, B, N]$  очень редко могут быть использованы при испытаниях весьма надежных элементов, так как их проведение связано с большой длительностью испытаний. В этом случае можно использовать другие планы  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, (r, T)]$  и т. д. ( $r \ll N$ ). Встает вопрос о том, насколько хороши будут оценки, полученные в результате использования метода максимального правдоподобия для планов, отличных от плана  $[N, B, N]$ . К настоящему времени авторам неизвестны какие-либо существенные результаты, полученные в этом направлении. Однако основная идея получения оценок максимального правдоподобия остается той же. В случае плана  $[N, B, N]$  множество данных, полученных после проведения испытаний, имело однородную структуру. В результате каждого испытания получаем  $N$  чисел  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_N$ , соответствующих моментам отказов. В случае других планов структура множества полученных данных может изменяться от опыта к опыту. Например, может случиться, что при использовании плана  $[N, B, (r, T)]$  за время испытаний  $T$  не произошло ни одного отказа (события  $A_0$ ) или произошло  $d$  отказов (событие  $A_d$ ),  $d \leq r$ . В случае события  $A_0$  множество данных — пустое множество, данных нет; в случае события  $A_d$ ,  $d \leq r$ , множество данных является наборами  $d$  чисел  $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_d \leq T$ . Итак, в общем случае мы получаем данные, принадлежащие подмножествам определенного вида, на которых заданы семейства распределений, зависящие от неизвестных значений параметров. Для плана  $[N, B, (r, T)]$  это распределение вероятностей имеет вид: вероятность события  $A_0$  —  $p(A_0, \alpha, \beta) = [1 - F(T, \alpha, \beta)]^N$ , плотность вероятности того, что произошло событие  $A_d$ ,  $d < r$ , и отказы наблюдались в моменты  $t_1, \dots, t_d$ , равна

$$p(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta) = \\ = N(N-1) \dots (N-d+1) \prod_{i=1}^d p(t_i, \alpha, \beta) [1 - F(T, \alpha, \beta)]^{N-d},$$

плотность вероятности того, что произошло событие  $A_r$  и отказы наблюдались в моменты  $t_1, \dots, t_r$ , равна

$$p(A_r, t_1, \dots, t_r, \alpha, \beta) = N(N-1) \dots (N-r+1) \prod_{i=1}^r p(t_i, \alpha, \beta),$$

где  $p(t, \alpha, \beta) = \frac{dF(t, \alpha, \beta)}{dt}$ . Если результаты испытаний рассматривать как набор случайных чисел, то вероятность или плотность вероятностей исходов испытаний (в нашем примере  $p(A_0, \alpha, \beta)$ ,  $p(A_d, t, \dots, t_d, \alpha, \beta)$ ,  $d \leq r$ ) также являются случайными величинами. Как и в случае плана  $[N, B, N]$  эти случайные величины называются



функциями правдоподобия. Для оценки параметров  $\alpha, \beta$  мы подбираем такую пару чисел  $\hat{\alpha}, \hat{\beta}$ , что значение функции правдоподобия при фиксированных значениях исходов опыта обращается в максимум. Полученные таким образом оценки называются *оценками максимального правдоподобия*. Необходимым условием обращения функции двух переменных в максимум является равенство нулю ее частных производных по  $\alpha$  и  $\beta$ . Если функция не обращается в нуль, то для отыскания точки, где функция обращается в максимум, можно приравнять к нулю частные производные от логарифма этой функции. Для плана  $[N, B, (r, T)]$  и события  $A_d, d \leq r$ , уравнения максимального правдоподобия имеют вид

$$\frac{\partial L(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial L(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0, \quad (3.2.21)$$

где  $L(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta) = \ln p(A_d, t_1, \dots, t_d, \alpha, \beta)$ . Как правило, уравнения (3.2.21) являются трансцендентными и решение их вручную занимает много времени. Однако если испытания с использованием одного и того же плана проводятся систематически, то становится целесообразным использование для вычислений электронных машин. При этом предварительно следует убедиться в существовании решений (3.2.21). Если решение этих уравнений не единственно, то необходимо привлечь дополнительные соображения для выбора одного из них. Для показательного закона распределения  $F(t, \theta) = 1 - e^{-\frac{t}{\theta}}$  уравнение правдоподобия (в случае одного параметра будет одно уравнение), как правило, решается в явном виде. Этот случай будет подробно изучен в следующем параграфе.

В заключение параграфа заметим, что из явного выражения функции правдоподобия можно сразу выписывать совокупность достаточных статистик (см. § 1.6), содержащих в себе всю информацию об оцениваемых параметрах. Для этого нужно только воспользоваться критерием факторизации (см. § 1.6). Применительно к плану  $[N, B, (r, T)]$  из критерия факторизации получаем, что если функция правдоподобия представима в виде

$$p(A_d, t_1, \dots, t_d) = \varphi(S_1, \dots, S_k, \alpha, \beta) h(t_1, \dots, t_d), \quad (3.2.22)$$

где  $S_1, \dots, S_k$  — функции от  $t_1, \dots, t_d$ , а  $h(t_1, \dots, t_d)$  не зависит от  $\alpha, \beta$ , то статистики  $S_1, \dots, S_k$  являются достаточными для пары параметров  $\alpha, \beta$ . Например, если

$$p(t, \alpha, \beta) = \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t},$$

то

$$p(A_d, t_1, \dots, t_d) = N \dots (N-d+1) \frac{\beta^{d\alpha} (t_1 t_2 \dots t_d)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)^d} \times \\ \times e^{-\beta \sum_{i=1}^d t_i} \left[ \int_{t_i}^{\infty} \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\beta t} dt \right]^{N-d}, \quad (3.2.23)$$

поэтому, полагая  $h(t_1, \dots, t_d) \equiv 1$  и сравнивая (3.2.23) с (3.2.22), получаем, что статистики  $S_1 = d$ ;  $S_2 = \prod_{i=1}^d t_i$ ;  $S_3 = t_1 + \dots + t_d$  являются достаточными для параметров  $\alpha$ ,  $\beta$ . В случае  $d=r$  достаточными будут статистики  $S_2 = \prod_{i=1}^r t_i$ ,  $S_3 = t_1 + \dots + t_r$ . К сожалению, достаточные статистики, отличные от полного набора  $t_1, \dots, t_d$  существуют не всегда. В частности, они не существуют для семейства распределений Вейбулла (см. [8]).

### § 3.3. Оценка параметра экспоненциального закона

Оценке параметра  $\lambda$  экспоненциального закона  $F(t, \lambda) = 1 - e^{-\lambda t}$ ,  $t > 0$ , мы посвящаем специальный параграф по двум причинам. Во-первых, экспоненциальный закон находит серьезные применения в задачах теории надежности, к настоящему времени имеется большое число работ, посвященных этому вопросу. Во-вторых, для случая показательного закона многие задачи удается разрешить в явной форме, выписав ответ в виде простых формул. Таким образом, на примере показательного закона можно изложить основные идеи методов получения оценок, не затеняя их сложными расчетами. Уместно также будет заметить, что обычно в литературе по надежности [5], предполагают при оценке параметров закона Вейбулла  $F(t) = 1 - \exp(-\lambda t^p)$ , что значение параметра  $p$  нам известно. Однако при таком предположении закон Вейбулла заменой времени  $t' = t^p$  может быть сведен к показательному закону. Так называемый логарифмически показательный закон, для которого  $F(t) = 1 - (t+1)^{-\lambda}$ ,  $t > 0$ ,  $\lambda > 0$ , также заменой переменных  $t' = \ln t$  может быть сведен к показательному. Таким образом, приводимые ниже оценки с учетом замены времени могут быть использованы и в этих случаях.

В качестве основного параметра, для которого в настоящем параграфе строятся оценки, выбрано значение  $\lambda$ . Однако можно было бы строить оценки для параметра  $\theta = \lambda^{-1}$ , равного среднему значению времени безотказной работы. В ряде случаев может возникнуть необходимость получения оценок для вероятности

безотказной работы в течение заданного времени  $T_3$ ,  $R(T_3) = e^{-\lambda T_3}$ . В конце параграфа даны формулы для несмещенных оценок  $R(T_3)$ , соответствующие планам  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, r]$ .

Планы типа  $B$ . Вначале рассмотрим планы испытаний с восстановлением отказавших элементов  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$ ,  $[N, B(r, T)]$ . Для этих планов моменты наблюдаемых отказов образуют пуассоновский поток с интенсивностью (см. § 1.5)  $\Lambda = \lambda N$ . Действительно, так как времена безотказной работы каждого элемента взаимно независимы, то последовательность моментов  $\{t_{ik}\}$ ,  $k = 1, \dots, N$ ,  $i = 1, 2, \dots$ , замен элементов в  $k$ -й ячейке стенда образует процесс восстановления (см. § 2.2), у которого интервалы  $S_{i,k} = t_{i+1,k} - t_{i,k}$  являются взаимно независимыми показательно распределенными случайными величинами,  $P\{S_{i,k} > t\} = e^{-\lambda t}$ . Но такой процесс восстановления является пуассоновским потоком (см. § 1.5) с интенсивностью, равной  $\lambda$ . Моменты замен элементов (отказов) взаимно независимы, поэтому взаимно независимы пуассоновские потоки моментов замен, соответствующие  $N$  различным ячейкам стенда. Так как поток всех отказов, которые происходят при испытаниях, является суперпозицией  $N$  взаимно независимых пуассоновских потоков с интенсивностями  $\lambda$ , то он также будет пуассоновским потоком с интенсивностью  $\Lambda = \lambda N$ . Это утверждение является прямым следствием результатов главы 2.

П л а н  $[N, B, T]$ . В случае плана  $[N, B, T]$  мы наблюдаем пуассоновский поток отказов с интенсивностью  $\Lambda = \lambda N$  в течение времени  $T$ . Пусть  $d(T)$  — число наблюдаемых отказов, которые произошли в моменты  $t_1, \dots, t_{d(T)}$ . Плотность вероятности этого события можно получить следующим образом. Вероятность того, что первый отказ произойдет в интервале  $(t_1, t_1 + dt_1)$ , равна  $\Lambda e^{-\Lambda t_1} dt_1$ , условная вероятность того, что второй отказ произойдет в интервале  $(t_2, t_2 + dt_2)$  при условии, что первый отказ произошел в интервале  $(t_1, t_1 + dt_1)$ , равна  $\Lambda e^{-\Lambda(t_2 - t_1)} dt_2$  и т. д. Наконец, условная вероятность того, что  $d(T)$ -й отказ произошел в интервале  $(t_{d(T)}, t_{d(T)} + dt_{d(T)})$ , а в интервале  $(t_{d(T)} + dt_{d(T)}, T)$  других отказов не было при условии, что отказы произошли в интервалах  $(t_1, t_1 + dt_1), \dots, (t_{d(T)-1}, t_{d(T)-1} + dt_{d(T)-1})$ , равна  $\Lambda e^{-\Lambda(t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} dt_{d(T)} \times e^{-\Lambda(T - t_{d(T)})}$ . Вероятность события, что отказы произошли в интервалах  $(t_1, t_1 + dt_1), \dots, (t_{d(T)}, t_{d(T)} + dt_{d(T)})$ , равна произведению этих условных вероятностей,

$$\begin{aligned} \Lambda e^{-\Lambda t_1} \Lambda e^{-\Lambda(t_2 - t_1)} \dots \Lambda e^{-\Lambda(t_{d(T)} - t_{d(T)-1})} e^{-\Lambda(T - t_{d(T)})} dt_1 \dots dt_{d(T)} = \\ = \Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T} dt_1 \dots dt_{d(T)}. \end{aligned}$$

Таким образом, плотность вероятностей наступления отказов в моменты  $t_1, \dots, t_{d(T)}$  равна

$$P(A_d, t_1, \dots, t_{d(T)}) = \Lambda^{d(T)} e^{-\Lambda T}, \quad (3.3.1)$$

Вероятность того, что за время испытаний  $T$  не произойдет ни одного отказа, равна

$$P(A_0) = e^{-\Lambda T}. \quad (3.3.2)$$

Рассматривая (3.3.1) и (3.3.2) как функции правдоподобия, получаем уравнение максимального правдоподобия

$$\frac{\partial \ln p(A_d, t_1, \dots, t_{d(T)})}{\partial \Lambda} = \frac{\partial (d(T) \ln \Lambda - \Lambda T)}{\partial \Lambda} = \frac{d(T)}{\Lambda} - T, \quad (3.3.3)$$

решение которого имеет вид

$$\hat{\Lambda} = \frac{d(T)}{T}. \quad (3.3.4)$$

Так как  $\Lambda = \lambda N$ , то оценкой параметра  $\lambda$  является

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{NT}. \quad (3.3.5)$$

Так как  $P\{d(T) = d\} = \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}$ , то

$$M\hat{\lambda} = \sum_{d=0}^{\infty} \frac{d}{NT} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} = \lambda \sum_{d=1}^{\infty} \frac{[\lambda(N-1)]^{d-1}}{(d-1)!} e^{-\lambda NT} = \lambda, \quad (3.3.6)$$

т. е. оценка (3.3.5) является несмещенной.

$$\begin{aligned} D[\hat{\Lambda}] &= M(\hat{\Lambda})^2 - (M\hat{\Lambda})^2 = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\frac{d}{T}\right)^2 \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} - \Lambda^2 = \\ &= \left(\Lambda^2 + \frac{\Lambda}{T}\right) - \Lambda^2 = \frac{\Lambda}{T}, \quad (3.3.7) \end{aligned}$$

$$D[\hat{\lambda}] = D\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{1}{N^2} D[\hat{\Lambda}] = \frac{\lambda N}{N^2 T} = \frac{\lambda}{NT} = \mathfrak{D}[\hat{\lambda}] \quad (3.3.7')$$

Можно показать, что эта оценка является эффективной. Заметим также, что из вида плотности (3.3.1) следует, что в случае плана  $[N, B, T]$  достаточной статистикой является только число  $d(T)$  отказов, происшедших за время испытаний, а сами моменты отказов  $t_1, \dots, t_{d(T)}$  никакой дополнительной информации о параметре  $\lambda$  не содержат.

Пример. Испытания проводились по плану  $[N = 100, B, T = 200]$ . Отказы произошли в моменты  $t_1 = 51, t_2 = 78, t_3 = 110, t_4 = 135, t_5 = 180$ . Общее число отказов  $d(200) = 5$ . По формуле (3.3.5) найдем, что

$$\hat{\lambda} = \frac{5}{100 \cdot 200} = 2,5 \cdot 10^{-4}.$$

П л а н  $[N, B, r]$ . Для плана  $[N, B, r]$ , рассуждая аналогичным образом, получаем, что вероятность того, что отказы произойдут в интервалах  $(t_1, t_1 + dt_1), \dots, (t_r, t_r + dt_r)$ , равна

$$\Lambda e^{-\Lambda t_1} dt_1 \Lambda e^{-\Lambda (t_2 - t_1)} dt_2 \dots \Lambda e^{-\Lambda (t_r - t_{r-1})} dt_r = \Lambda^r e^{-\Lambda t_r} dt_1 \dots dt_r.$$

Отсюда следует, что плотность вероятностей наступления отказов в моменты  $t_1, \dots, t_r$  равна

$$p(t_1, \dots, t_r, \lambda) = \Lambda^r e^{-\Lambda t_r}. \quad (3.3.8)$$

Из (3.3.8) следует, что достаточной статистикой для оценки параметра  $\lambda$  является момент  $t_r$  наступления  $r$ -го отказа. Уравнение максимального правдоподобия имеет вид

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \dots, t_r, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{\partial (r \ln \lambda - \Lambda t_r)}{\partial \lambda} = 0, \quad (3.3.9)$$

откуда получаем оценку

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{r}{t_r}. \quad (3.3.10)$$

Заметим теперь, что  $t_r = t_1 + (t_2 - t_1) + \dots + (t_r - t_{r-1})$ , т. е.  $t_r$  является суммой  $r$  интервалов между последовательными отказами. Выше (§ 2.2) было показано, что эти интервалы являются взаимно независимыми случайными с плотностями вероятностей, равными  $\Lambda e^{-\Lambda t}$ . Поэтому плотность вероятностей  $t_r$ , равная свертке  $r$  плотностей  $p(t) = \Lambda e^{-\Lambda t}$ , имеет вид

$$p(t_r) = \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r}. \quad (3.3.11)$$

Из (3.3.11) и (3.3.10) получаем

$$\begin{aligned} M\hat{\Lambda}_1 &= \int_0^{\infty} \frac{r}{t_r} \frac{\Lambda^r t_r^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda t_r} dt_r = \frac{r\Lambda}{(r-1)!} \int_0^{\infty} \Lambda^{r-1} t_r^{r-2} e^{-\Lambda t_r} dt_r = \\ &= \frac{r\Lambda}{r-1}, \quad r > 1. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Следовательно, оценка  $\hat{\Lambda}_1$ , полученная методом максимального правдоподобия, является смещенной, а при  $r=1$  ее математическое ожидание равно бесконечности. Смещение легко устранить, если рассмотреть оценку

$$\hat{\Lambda}_1 = \frac{r-1}{t_r}, \quad r > 1. \quad (3.3.13)$$

Из (3.3.13) и (3.3.12) следует, что  $M\hat{\Lambda}_1 = \Lambda$ . Вспомнив, что  $\Lambda = N\lambda$ , получаем несмещенную оценку для  $\hat{\lambda}$

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{\Lambda}_1}{N} = \frac{r-1}{Nt_r}. \quad (3.3.14)$$

Для дисперсий оценок (3.3.13), (3.3.14) имеют место формулы

$$D[\hat{\Lambda}_1] = \int_0^{\infty} \frac{(r-1)^2 \Lambda^r t_r^{r-1}}{t_r^2 (r-1)!} e^{-\Lambda t_r} dt_r - \Lambda^2 = \frac{\Lambda^2}{r-2}, \quad (3.3.15)$$

$$D[\hat{\lambda}] = D\left[\frac{\hat{\Lambda}_1}{N}\right] = \frac{D[\hat{\Lambda}_1]}{N^2} = \frac{(\lambda N)^2}{N^2(r-2)} = \frac{\lambda^2}{r-2} = \mathfrak{D}(\hat{\lambda}) \quad (3.3.16)$$

Дисперсии оценок существуют только для значений  $r > 2$ .

Пример. Испытания проводились в соответствии с планом  $[N=200, B, r=10]$ . Момент регистрации десятого отказа  $t_{10} = 551$  час. Из формулы (3.3.14) находим оценку

$$\hat{\lambda} = \frac{9}{200 \cdot 551} = 8,17 \cdot 10^{-5} \text{ отк/час.}$$

План  $[N, B, (r, T)]$ . При исследовании более общего плана  $[N, B, (r, T)]$  испытания прекращаются либо в момент  $T$ , и при этом наблюдается  $d(T) < r$  отказов, или в момент  $t_r$  появления  $r$ -го отказа, если  $t_r < T$ . В первом случае плотность вероятности наступления отказов в моменты  $t_1, \dots, t_{d(T)}$  записывается по формуле (3.3.1), а во втором случае плотность вероятности наступления отказов в моменты  $t_1, \dots, t_r$  — по формуле (3.3.8). Используя метод максимального правдоподобия в виде, изложенном в конце предыдущего параграфа мы получаем оценку для  $\Lambda$

$$\hat{\Lambda}_1 = \begin{cases} \frac{d(T)}{T}, & \text{если } t_r > T, \\ \frac{r}{t_r}, & \text{если } t_r \leq T. \end{cases}$$

По аналогии с только что разобранным случаем плана  $[N, B, r]$  мы можем улучшить эту оценку, устранив смещение. Вводим оценку

$$\hat{\Lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{T}, & \text{если } t_r > T, \\ \frac{r-1}{t_r}, & \text{если } t_r \leq T, \end{cases} \quad (3.3.17)$$

которая является несмещенной. Действительно, используя формулу для условных математических ожиданий, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\hat{\Lambda} &= \mathbf{M}(\hat{\Lambda} | t_r > T) \mathbf{P}(t_r > T) + \mathbf{M}(\hat{\Lambda} | t_r \leq T) \mathbf{P}(t_r \leq T) = \\ &= \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d}{T} \mathbf{P}(d(T) = d) + \int_0^T \frac{r-1}{s} d_s \mathbf{P}(t_r < s) = \sum_{d=0}^{r-1} \frac{d}{T} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \\ &+ \int_0^T \frac{(r-1)}{s} \frac{\Lambda r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \Lambda \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \Lambda \sum_{d=r-1}^{\infty} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} = \Lambda. \end{aligned}$$

Аналогичным способом можно найти дисперсию этой оценки  $\hat{\Lambda}$

$$\mathbf{D}[\hat{\Lambda}] = \mathbf{M}\hat{\Lambda}^2 - (\mathbf{M}\hat{\Lambda})^2 = \frac{\Lambda}{T} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \frac{\Lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}. \quad (3.3.18)$$

Для несмещенной оценки параметров  $(\hat{\lambda} = \frac{\hat{\Lambda}}{N}, \mathbf{M}\hat{\lambda} = \lambda)$  имеем

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{NT}, & \text{если } t_r > T, \\ \frac{r-1}{Nt_r}, & \text{если } t_r \leq T, \end{cases} \quad (3.3.19)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\hat{\lambda}] &= \mathbf{D}\left[\frac{\hat{\Lambda}}{N}\right] = \frac{1}{N^2} \mathbf{D}[\hat{\Lambda}] = \\ &= \frac{\lambda}{NT} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT} + \frac{\lambda^2}{r-2} \sum_{\lambda=r-2}^{\infty} \frac{(\lambda NT)^d}{d!} e^{-\lambda NT}. \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

В заключение части параграфа, посвященной планам типа *B*, отметим изящный результат, полученный Л. Н. Большевым [9]. В конце § 3.1 указывался общий класс планов проведения испытаний, в которых момент останова испытаний  $t^*$  определялся как момент первого достижения траекторией  $(t, d(t))$  границы множества  $G$ . Здесь  $d(t)$  — число элементов, отказавших к моменту  $t$ . Предположим, что граница  $\Gamma$  множества  $G$  является невозрастающей функцией от  $t$  (рис. 3.3.1).

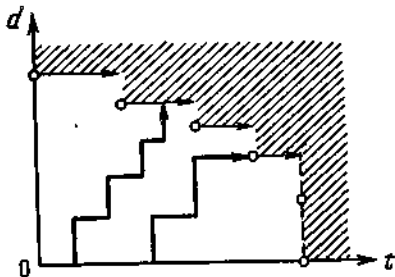


Рис. 3.3.1.

Точки границы  $\Gamma$  разбиваются на два класса. Назовем точку  $(t, d)$  точкой класса *A*, если правее ее на уровне  $d$  все точки не принадлежат множеству  $G$ . Точки класса *A* обведены на рис. 3.3.1

кружками. Точки границы  $\Gamma$ , не являющиеся точками класса  $A$ , назовем точками класса  $B$ . Эти точки на рис 3.3.1 показаны тонкими сплошными линиями. Л. Н. Большев показал, что несмещенная оценка для параметра  $\lambda$  строится следующим образом. Если в момент первого достижения траекторией  $(t, d(t))$  границы  $\Gamma$  точка  $(t^*, d(t^*)) \in \Gamma$  есть точка класса  $A$ , то оценка определяется по формуле

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t^*)}{Nt^*}.$$

Если же точка  $(t^*, d(t^*))$  есть точка класса  $B$ , то оценка для  $\lambda$  находится по формуле

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t^*) - 1}{Nt^*}.$$

Заметим, что с вероятностью единица момент достижения точек класса  $B$  совпадает с моментом наступления отказа.

Планы типа  $B$ . Рассмотрим теперь планы  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, (r, T)]$ , в которых отказавшие элементы не заменяются новыми.

План  $[N, B, T]$ . Выражение для плотности вероятностей того, что при испытаниях по плану  $[N, B, T]$  отказы произойдут в моменты  $t_1, \dots, t_{d(T)}$ , можно получить следующим образом. Плотность вероятностей того, что в эти моменты откажут элементы с номерами  $i_1, \dots, i_{d(T)}$ , равна, в силу взаимной независимости моментов отказов, произведению плотностей вероятностей для моментов отказов каждого из этих элементов, умноженных на вероятность того, что в интервале  $(0, T)$  отказов у остальных  $N - d(T)$  элементов не произойдет, т. е. равна

$$\lambda e^{-\lambda t_1} \lambda e^{-\lambda t_2} \dots \lambda e^{-\lambda t_{d(T)}} e^{-\lambda(N-d(T))T}. \quad (3.3.21)$$

Событие, состоящее в том, что моменты отказов равны  $t_1, \dots, t_{d(T)}$ , может осуществиться  $A_N^{d(T)} = N(N-1) \dots [N-d(T)+1]$  способами, так как из  $N$  чисел можно сделать  $N \dots [N-d(T)+1]$  различных выборок номеров  $i_1, \dots, i_{d(T)}$ . Умножая (3.3.21) на  $A_N^{d(T)}$ , получаем выражение для искомой плотности вероятностей

$$p(t_1, \dots, t_{d(T)}; \lambda) =$$

$$= N \dots [N-d(T)+1] \lambda^{d(T)} e^{-\lambda \left( \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N-d(T)]T \right)}. \quad (3.3.22)$$

Таким образом, в случае плана  $[N, B, T]$  достаточными статистиками будут: число  $d(T)$  элементов, отказавших за время  $T$ , и



сумма  $S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)] T$  времен, в течение которых проработал каждый элемент, т. е. суммарная наработка элементов за время проведения испытаний. Из (3.3.22) получаем, что

$$\ln p(t_1, \dots, t_{d(T)}, \lambda) = \\ = \ln N(N-1) \dots [N-d(T)+1] + d(T) \ln \lambda - \lambda S_B(T). \quad (3.3.23)$$

Отсюда имеем

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \dots, t_{d(T)}, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{d(T)}{\lambda} - S_B(T) = 0. \quad (3.3.24)$$

Таким образом, оценка максимального правдоподобия равна

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)}, \quad S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)] T. \quad (3.3.25)$$

Эта оценка является смещенной. Точный подсчет смещения приводит к очень громоздким формулам, которые мы опускаем. По этой же причине мы опускаем формулу для дисперсии оценки  $\hat{\lambda}$ . Заметим, что для сравнительно надежных элементов при  $\lambda T < 0,1$  плотность условного распределения момента отказа, происшедшего в интервале  $(0, T)$  равна  $\frac{\lambda e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} \approx \frac{\lambda}{\lambda T} = \frac{1}{T}$ , а среднее значение каждого  $t_i$  приблизительно можно считать равным  $\frac{T}{2}$ . Отсюда для  $d(T) > 10$  и  $\frac{d(T)}{N} < 0,1$ , исходя из закона больших чисел, можно считать, что  $\sum_{i=1}^{d(T)} t_i = d(T) \left[ \frac{1}{d(T)} \sum_{i=1}^{d(T)} t_i \right] \approx \frac{d(T) T}{2}$ . Подставив это выражение в знаменатель формулы (3.3.25), получаем

$$\hat{\lambda}_1 \approx \frac{d(T)}{d(T) \frac{T}{2} + [N - d(T)] T} = \frac{d(T)}{\left[ N - \frac{d(T)}{2} \right] T}. \quad (3.3.26)$$

Формулой (3.3.26) часто пользуются на практике. Следует, однако, иметь в виду, что она применима при  $\frac{d(T)}{N} \leq 0,1$ ,  $d(T) \geq 10$ .

Если считать, что формула (3.3.25) слишком сложна, то для оценки  $\lambda$  также можно исходить из формулы оценки вероятности по частоте (см. § 1.6). Оценкой для вероятности  $R(T) = e^{-\lambda T}$  безотказной работы элемента является отношение числа элементов  $N - d(T)$ , безотказно проработавших в течение времени  $T$ , к общему числу  $N$

элементов. Приравняв оценку к теоретическому значению вероятности, получаем для нахождения оценки  $\hat{\lambda}$  уравнение

$$\frac{N-d(T)}{N} = e^{-\hat{\lambda}T},$$

откуда

$$\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{T} \ln \frac{N}{N-d(T)}. \quad (3.3.27)$$

Этой формулой можно пользоваться для значений  $0,2 < \frac{d(T)}{N} < 0,8$ .

Заметим, что смещение оценки (3.3.27) является бесконечным, так как с положительной вероятностью может получиться, что  $d(T) = N$ .

Пример. Испытания проводились в соответствии с планом  $[N=100, B, T=500]$ . Отказы произошли в моменты  $t_{(1)}=31$ ,  $t_{(2)}=49$ ,  $t_{(3)}=90$ ,  $t_{(4)}=135$ ,  $t_{(5)}=161$ ,  $t_{(6)}=249$ ,  $t_{(7)}=323$ ,  $t_{(8)}=353$ ,  $t_{(9)}=383$ ,  $t_{(10)}=436$ ,  $t_{(11)}=477$ . Общее число отказавших элементов  $d(500)=11$ , суммарная наработка  $S_B(500)=31+49+90+135+161+249+323+353+383+436+477+89 \times 500=47147$ . По формуле (3.3.25) находим оценку для параметра  $\lambda$

$$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)} = \frac{11}{47147} = 2,33 \cdot 10^{-4}.$$

Если исходить из упрощенной формулы (3.3.26), то  $\lambda =$

$$= \frac{11}{\left(100 - \frac{11}{2}\right) 500} = 2,328 \cdot 10^{-4}.$$

План  $[N, B, r]$ . Для плана  $[N, B, r]$  плотность вероятностей появления отказов в моменты  $t_1, \dots, t_r$  получаем из рассуждений, аналогичных тем, которые были использованы для плана  $[N, B, T]$ . Плотность вероятностей того, что в моменты  $t_1, \dots, t_r$  откажут элементы с номерами  $i_1, \dots, i_r$ ,  $1 \leq i_k \leq N$ ,  $i_k \neq i_l$ ,  $k \neq l$ , а остальные  $N-r$  элементов в интервале  $(0, t_r)$  не дадут отказов, равна

$$\lambda e^{-\lambda t_1} \dots \lambda e^{-\lambda t_r} e^{-\lambda(N-r)t_r}.$$

Учитывая, что число возможных наборов по  $r$  различным цифр из  $N$  равно  $N(N-1) \dots (N-r+1)$ , получаем, что плотность вероятностей наступления  $r$  отказов в моменты  $t_1, \dots, t_r$

$$p(t_1, \dots, t_r, \lambda) = N(N-1) \dots (N-r+1) \lambda^r e^{-\lambda \left( \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r \right)}. \quad (3.3.28)$$

Из этой формулы следует, что достаточной статистикой является суммарная наработка всех испытываемых элементов

$$S_B(t_r) = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r = \\ = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + (N-r+1)(t_r - t_{r-1}). \quad (3.3.29)$$

Заметим, что, введя новые переменные  $s_1 = t_1$ ,  $s_k = t_k - t_{k-1}$ ,  $k = 2, \dots, r$ , плотность (3.3.28) можно, учитывая (3.3.29), переписать в виде

$$p_1(s_1, \dots, s_r) = \\ = N\lambda e^{-\lambda N s_1} (N-1)\lambda e^{-\lambda(N-1)s_2} (N-r+1)\lambda e^{-(N-r+1)\lambda s_r}. \quad (3.3.30)$$

При этом мы учитываем, что якобиан перехода от координат  $t_1, \dots, t_r$  к координатам  $s_1, \dots, s_r$  равен 1. Из (3.3.30) следует, что случайные величины  $s_1 = t_1, \dots, s_r = t_r - t_{r-1}$  являются взаимно независимыми, при этом плотность  $s_k$  равна  $(N - k + 1)\lambda e^{-(N-k+1)\lambda s}$ , соответственно плотность случайной величины  $(N - k + 1)s_k$  равна  $\lambda e^{-\lambda s}$ . Таким образом, из (3.3.30) следует, что  $s$  является суммой  $r$  взаимно независимых показательно распределенных случайных величин. Отсюда получаем, что плотность распределения суммарной наработки  $S_B(t_r)$  равна

$$p(s) = \lambda^r \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s}, \quad s > 0. \quad (3.3.31)$$

Прологарифмировав плотность (3.3.28), находим

$$\ln p(t_1, \dots, t_r, \lambda) = \ln [N \dots (N-r+1)] + r \ln \lambda - \lambda s,$$

откуда получаем уравнение максимального правдоподобия

$$\frac{\partial \ln p(t_1, \dots, t_r, \lambda)}{\partial \lambda} = \frac{r}{\lambda} - s = 0.$$

Оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{r}{S_B(t_r)}. \quad (3.3.32)$$

Используя выражение (3.3.31) для плотности вероятностей суммарной наработки, находим, что

$$M\hat{\lambda}_1 = \int_0^{\infty} \frac{r}{s} \lambda^r \frac{s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds = \frac{r}{r-1} \lambda, \quad r > 1.$$

Таким образом, оценка  $\hat{\lambda}$  является смещенной. Это смещение можно

устранить, если использовать оценку

$$\hat{\lambda} = \frac{r-1}{r} \hat{\lambda}_1 = \frac{r-1}{S_B(t_r)} \quad (3.3.33)$$

Дисперсия этой оценки равна

$$\begin{aligned} D\hat{\lambda} &= \int_0^{\infty} \left( \frac{r-1}{s^r} \right)^r \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds - \lambda^2 = \\ &= \frac{r-1}{r-2} \lambda^2 - \lambda^2 = \frac{\lambda^2}{r-2}, \quad r > 2. \quad (3.3.34) \end{aligned}$$

Пример. Испытания проводились в соответствии с планом  $[N=50, B, (r=8)]$ . Моменты отказов равны  $t_{(1)}=91, t_{(2)}=145, t_{(3)}=221, t_{(4)}=285, t_{(5)}=317, t_{(6)}=328, t_{(7)}=411, t_{(8)}=496$ . Значение суммарной параболки  $S_B(t_{(8)})=91+145+221+285+317+328+411+496(50-7)=21\,965$ . По формуле (3.3.33) находим оценку для параметра  $\lambda$

$$\hat{\lambda} = \frac{7}{21\,965} = 3,2 \cdot 10^{-4}.$$

План  $[N, B, (r, T)]$ . Если используется план  $[N, B, (r, T)]$ , то испытания прекращаются либо в момент  $T$ , если  $t_r > T$ , либо в момент  $t_r$ , если  $t_r < T$ . Соответственно в первом случае плотность вероятностей наступления  $d(T)$  отказов в моменты  $t_1, \dots, t_{d(T)}$  записывается по формуле (3.3.22), а во втором, для моментов отказов  $t_1, \dots, t_r$ , — по формуле (3.3.28). Как и в случае плана  $[N, B, (r, T)]$ , находим, что оценка максимального правдоподобия имеет вид

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{S_B(T)}, & \text{если } t_r > T, \text{ где } S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)] T, \\ \frac{r}{S_B(t_r)}, & \text{если } t_r \leq T, \text{ где } S_B(t_r) = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r. \end{cases}$$

По аналогии с предыдущим случаем мы можем использовать улучшенную оценку для случая  $t_r \leq T$ . Окончательно получаем

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{S_B(T)}, & \text{если } t_r > T, \text{ где } S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)] T, \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & \text{если } t_r \leq T, \text{ где } S_B(t_r) = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r. \end{cases} \quad (3.3.35)$$

Эта оценка является смещенной; ввиду громоздкости формул, выражающих смещение и дисперсию, мы вынуждены пропустить их.

План  $[N, B, (r, HS_0)]$ . В заключение этого параграфа рассмотрим еще один план проведения стендовых испытаний, который также находит практическое применение. Проводятся испытания  $N$  элементов без восстановления отказавших. Испытания прекращаются в тот момент, когда либо суммарная наработка испытываемых элементов станет равной заданному до начала испытаний числу  $S_0$ , либо в момент отказа  $r$ -го элемента, если при этом суммарная наработка оказывается меньше  $S_0$ . Такой план сокращенно будем обозначать через  $[N, B, (r, HS_0)]$ . Если обозначить через  $N(t)$  число элементов, оставшихся исправными к моменту  $t$ , то суммарная наработка  $S(t)$  испытываемых элементов к моменту  $t$  равна

$S_B(t) = \int_0^t N(s) ds$ . Допустим, что отказы элементов произошли в моменты  $t_1, \dots, t_{d(t)}$ , тогда суммарная наработка к моменту времени  $t$  задается формулой

$$S_B(t) = \int_0^t N(s) ds = \\ = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + [N - d(t)](t - t_{d(t)}),$$

$t_0 = 0$ , если  $d(t) = 0$ . Испытания прекращаются в тот момент  $s$ , когда либо суммарная наработка

$$S_B(s) = \\ = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \dots + (N - d(s))(s - t_{d(s)}) = S_0 \quad (3.3.36)$$

(при этом  $d(s) < r$ ), либо в момент  $t_r$  отказа  $r$ -го элемента

$$S_B(t_r) = Nt_1 + (N-1)(t_2 - t_1) + \\ + \dots + (N - r + 1)(t_r - t_{r-1}) < S_0. \quad (3.3.37)$$

Выше было показано, что при испытаниях  $N$  элементов без восстановления отказавших случайные величины  $Nt_1, (N-1)(t_2 - t_1), (N-r+1)(t_r - t_{r-1})$  являются взаимно независимыми, одинаково распределенными с плотностью  $\lambda e^{-\lambda t}$ . Таким образом, условия (3.3.36) и (3.3.37) фактически означают, что мы наблюдаем пуассоновский поток отказов с интенсивностью  $\lambda$  и прекращаем наблюдения либо в «момент»  $S_0$ , либо в «момент»  $S(t_r)$  наступления  $r$ -го отказа. Но задачу оценки параметра  $\lambda$  пуассоновского потока мы уже решили, разбирая случай плана  $[N, B, (r, T)]$ . Чтобы воспользоваться оценкой (3.3.17), в ней надо считать  $t_r = S(t_r)$ ,  $T = S_0$  и в формуле

для дисперсии оценки (3.3.18) считать  $\Lambda = \lambda$ . Окончательно,

$$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(t_0)}{S_0}, & \text{где } t_0 \text{ находится из условия} \\ & S_B(t_0) = S_0, \text{ если } S(t_r) > S_0, \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & \text{если } S_B(t_r) < S_0. \end{cases} \quad (3.3.38)$$

$S_B(t)$  находится по формуле (3.3.35). Как уже было доказано, эта оценка несмещенная, ее дисперсия в соответствии с формулой (3.3.18) равна

$$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{S_0} \sum_{d=0}^{r-2} \frac{(\lambda S_0)^d}{d!} e^{-\lambda S_0} + \frac{\lambda^2}{r-2} \sum_{d=r-2}^{\infty} \frac{(\lambda S_0)^d}{d!} e^{-\lambda S_0}. \quad (3.3.20)$$

Как это следует из рассмотрения плана  $[N, B, (r, T)]$ , достаточными статистиками будут  $d(t_0)$ , если  $S(t_r) > S_0$ , и  $S(t_r)$ , если  $S(t_r) < S_0$ .

Пример. Испытания проводятся в соответствии с планом  $[N=100, B, (r=5, HS=10\,000)]$ . Первый отказ наступил в момент  $t_{(1)}=34$ , значение суммарной наработки  $S_B(t_{(1)})=3400 < 10\,000$ . Второй отказ был зарегистрирован в момент  $t_{(2)}=75$ , значение суммарной наработки стало равным  $S_B(t_{(2)})=7459 < 10\,000$ . В интервале от  $t_{(2)}=75$  до  $t_0=100,71$  отказы не наблюдались. В момент  $t_0=100,71$  значение суммарной наработки достигло заданного уровня 10 000. В соответствии с верхней частью формулы (3.3.38) находим

$$\hat{\lambda} = \frac{d(t_0)}{S_0} = \frac{2}{10\,000} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ отк/час.}$$

Несмещенные оценки для вероятности безотказной работы. Одним из наиболее важных показателей надежности является вероятность безотказной работы в течение заданного времени  $T_3$ . В случае показательного закона эта вероятность  $R(T_3) = \exp(-\lambda T_3)$ . Используя полученные выше формулы для оценок  $\hat{\lambda}$  параметра  $\lambda$ , можно в качестве оценки для  $R(T_3)$  рассматривать

$$\hat{R}(T_3) = \exp(-\hat{\lambda} T_3). \quad (3.3.39)$$

Можно показать, что эта оценка при увеличении числа  $N$  испытываемых элементов является состоятельной и асимптотически эффективной, если только  $\hat{\lambda}$  — асимптотически эффективная оценка для  $\lambda$ . Однако при конечных значениях  $N$  оценка, задаваемая формулой (3.3.39), является смещенной. Это смещение может быть весьма существенным в практически важном случае, когда  $R(T_3)$  близка к единице. Величина смещения зависит также от типа плана, в соответствии с которым проводятся испытания. Так же как и для

оценок параметра  $\lambda$ , можно поставить задачу отыскания несмещенных оценок для  $R(T_3) = \exp(-\lambda T_3)$ . Мы ограничиваемся здесь разбором только двух типов планов  $[N, B, T]$  и  $[N, B, r]$ . Основная идея построения несмещенных оценок с минимальными дисперсиями заключается в следующем. Сначала отыскивают несмещенную оценку для заданной функции от неизвестного параметра. Если эта несмещенная оценка — функция от достаточной статистики (и притом единственная), то она имеет (см. § 7.5) наименьшую дисперсию. Если же эта несмещенная оценка не является функцией от достаточной статистики, то в качестве новой несмещенной оценки рассматривается условное математическое ожидание от исходной оценки при условии, что фиксировано значение достаточной статистики.

Пусть испытания проводились по плану  $[N, B, T]$ . Достаточной статистикой является число  $d(T)$  элементов, отказавших за время проведения испытаний.  $d(T)$  имеет пуассоновское распределение с параметром  $N\lambda T$ . Основное уравнение для несмещенной оценки  $\varphi(d)$  для  $R(T_3)$  имеет вид

$$\sum_{d(T)=0}^{\infty} \varphi(d) \frac{(N\lambda T)^d}{d!} e^{-N\lambda T} = e^{-\lambda T_3}. \quad (3.3.40)$$

Поделив обе части на  $e^{-N\lambda T}$  и разложив  $e^{\lambda(NT - T_3)}$  по степеням  $\lambda$ , получаем, что тождество (3.3.40) справедливо тогда и только тогда, когда

$$\varphi(d) \frac{(N\lambda T)^d}{d!} = \frac{\lambda^d (NT - T_3)^d}{d!}. \quad (3.3.41)$$

Таким образом, из (3.3.41) получаем выражение для несмещенной оценки  $R(T_3)$ :

$$\hat{R}(T_3) = \varphi(d(T)) = \left(1 - \frac{T_3}{NT}\right)^{d(T)}. \quad (3.3.42)$$

Дисперсия оценки задается формулой

$$D[\hat{R}(T_3)] = \exp\left\{\lambda NT \left[\left(1 - \frac{T_3}{NT}\right)^2 - 1\right]\right\} - \exp(-2\lambda T_3). \quad (3.3.43)$$

Заметим, что несмещенная оценка для значений  $T_3 > NT$  дает отрицательные значения при нечетном числе отказов и значения, большие единицы, при четном числе отказов. Оценку (3.3.42) можно рекомендовать только для значений  $T_3 < NT$ .

Пусть испытания проводились в соответствии с планом  $[N, B, r]$ . Если  $t_{(i)}$  — моменты отказов,  $i=1, \dots, r$ , то случайные величины  $\tau_i = (N-i+1)(t_{(i)} - t_{(i-1)})$ ,  $i=1, \dots, r$ ,  $t_{(0)}=0$  взаимно независимы и имеют показательное распределение с параметром  $\lambda$ ,  $P\{\tau_i > T_3\} = \exp(-\lambda T_3) = R(T_3)$ . Следовательно, в качестве несмещенной оценки для  $R(T_3)$  можно взять отношение числа  $d(r)$  случай-

ных величин  $\tau_i$  таких, что  $\tau_i > T_3$ , к общему числу  $r$ . Оценка  $\hat{R}_1(T_3) = \frac{d(r)}{r}$  является несмещенной. Однако она не есть функция от достаточной статистики  $S_B(t_r)$ . Взяв условное математическое ожидание  $\hat{R}_1(T_3)$  относительно  $S_B(t_r)$ , получаем выражение для улучшенной несмещенной оценки

$$\hat{R}(T_3) = \begin{cases} \left(1 - \frac{T_3}{S_B(t_r)}\right)^{r-1}, & S_B(t_r) > T_3, \\ 0, & S_B(t_r) \leq T_3. \end{cases} \quad (3.3.44)$$

Учитывая, что плотность вероятности суммарной наработки  $S_B(t_r)$  задается формулой (3.3.11), легко проверяем несмещенность оценки (3.3.44). Действительно, имеем

$$\begin{aligned} M\hat{R}(T_3) &= \int_{T_3}^{\infty} \left(1 - \frac{T_3}{s}\right)^{r-1} \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds = \\ &= \sum_{\nu=0}^{r-1} C_{r-1}^{\nu} \int_{T_3}^{\infty} \left(-\frac{T_3}{s}\right)^{\nu} \frac{\lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\lambda s} ds = \\ &= \sum_{\nu=0}^{r-1} (-1)^{\nu} C_{r-1}^{\nu} \frac{T_3^{\nu} \lambda^{\nu+1} (r-\nu-1)!}{(r-1)!} \sum_{\mu=0}^{r-\nu-1} \frac{(\lambda T_3)^{\mu}}{\mu!} e^{-\lambda T_3} = \\ &= e^{-\lambda T_3} \sum_{l=0}^{r-1} (\lambda T_3)^l \sum_{k=0}^l \left[ \frac{(-1)^k}{k! (l-k)!} \right] = e^{-\lambda T_3} \end{aligned}$$

Оценка (3.3.44) была получена в 1962 г. Е. М. Одноробовой. Аналогичная оценка опубликована в работе [10].

### § 3.4. Доверительные интервалы для параметра экспоненциального закона

Недостаточность точечных оценок. В предыдущем параграфе были рассмотрены различные оценки для параметра  $\lambda$  экспоненциального закона. Однако, какими бы хорошими свойствами эти оценки ни обладали, например несмещенностью и эффективностью, все же в ряде случаев, представляющих большой практический интерес, оказывается недостаточным характеризовать качество и надежность изделий только с помощью оценок. Если отказ элемента приводит к большому ущербу, то используются только очень надежные элементы. В случае показательного закона отказов это означает, что величина  $\lambda$  должна быть крайне мала. Поскольку время  $T$  проведения испытаний ограничено, то малость  $\lambda$  приводит



к тому, что среднее число отказов, наблюдаемых при проведении испытаний, также мало. Может оказаться, что при проведении испытаний отказы вообще не наблюдаются. Если обратиться к оценкам, которые были рекомендованы в предыдущем параграфе, то мы увидим, что в этих случаях качество оценивается как отличное, т. е. считается, что  $\lambda = 0$ . При этом никак не учитывается объем  $N$  партии испытываемых элементов. В тех случаях, когда наблюдаемое число отказов отлично от нуля, но невелико, естественная мера разброса значений случайной оценки — отношение корня из дисперсии к математическому ожиданию — велика ( $> 1$ ), поэтому величина оценки резко меняется от испытания к испытанию и не может служить устойчивой характеристикой надежности элементов. Эти критические значения подводят нас к целесообразности использования для оценки параметра  $\lambda$  экспоненциального закона метода доверительных интервалов. *Двусторонним доверительным интервалом* для параметра  $\lambda$  с коэффициентом доверия, не меньшим  $\gamma$ , называется случайный интервал  $(\underline{\lambda}(x), \bar{\lambda}(x))$ , концы которого  $\underline{\lambda}(x) < \bar{\lambda}(x)$  зависят только от исходов испытаний  $x$  и для любого  $\lambda > 0$

$$P \{ \underline{\lambda}(x) < \lambda < \bar{\lambda}(x) \} \geq \gamma.$$

*Верхним*  $(0, \bar{\lambda}(x))$  и *нижним*  $(\underline{\lambda}(x), +\infty)$  *односторонними интервалами* называются такие случайные интервалы, для которых при любом  $\lambda > 0$  соответственно

$$P \{ 0 < \lambda < \bar{\lambda}(x) \} \geq \gamma, \quad P \{ \underline{\lambda}(x) < \lambda \} \geq \gamma.$$

При построении доверительных интервалов мы будем использовать общий метод, изложенный в § 1.6. При этом в качестве случайных величин, распределение которых зависит от неизвестного параметра  $\lambda$ , мы будем брать значения достаточных статистик, которые получаются в результате проведения испытаний. Заметим, что поскольку оценки для параметра  $\lambda$  являются монотонными функциями от рассматриваемых ниже достаточных статистик, то, как это было показано в § 1.6, доверительные интервалы, полученные исходя из оценок, с одной стороны, и достаточных статистик, с другой, — совпадают. Мы несколько изменим порядок изложения, рассмотрев вначале более простые планы  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, T]$ , а затем более сложные планы  $[N, B, (r, T)]$ ,  $[N, B, (HS)]$ ,  $[N, B, (r, T)]$ .

Доверительные интервалы для планов с простыми достаточными статистиками. Для плана  $[N, B, T]$  достаточной статистикой является число  $d(T)$  наблюдаемых отказов.

$d(T)$  — случайная величина, имеющая пуассоновское распределение с параметром  $\Delta = \lambda NT$ . На плоскости  $(\Delta, d)$  исходы опыта

представляются в виде случайных точек  $Q = (\Delta, d)$ , где  $\Delta$  — значение параметра пуассоновской величины, а  $d$  — число наблюдаемых отказов. Исходя из методики, изложенной в § 1.6, для построения верхней границы доверительного интервала с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ , мы должны для каждого значения  $\Delta$  указать такое целое число  $\underline{d}(\Delta)$ , что вероятность того, что достаточная статистика примет значение, не большее  $d(\Delta)$ , не превышает  $1 - \alpha$ , а вероятность принять не большее  $[\underline{d}(\Delta) + 1]$  — уже больше, чем

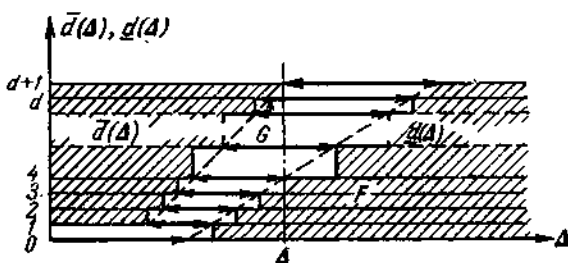


Рис. 3.4.1.

$1 - \alpha$ . Так как величина  $d(T)$  распределена по закону Пуассона, то  $\underline{d}(\Delta)$  определяется из соотношения

$$\begin{aligned} P\{d(T) \leq \underline{d}(\Delta)\} = L_{\underline{d}(\Delta)}(\Delta) \leq 1 - \alpha < P\{d(T) \leq \underline{d}(\Delta) + 1\} = \\ = L_{\underline{d}(\Delta) + 1}(\Delta), \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

где  $L_d(\Delta) = \sum_{k=0}^d \frac{\Delta^k}{k!} e^{-\Delta}$ . Заметив, что  $L_d(\Delta)$  является монотонно убывающей функцией параметра  $\Delta$ , мы получаем, что  $\underline{d}(\Delta)$  — неубывающая функция от  $\Delta$ . Так как  $d(\Delta)$  принимает только целочисленные значения, то  $\underline{d}(\Delta)$  является ступенчатой неубывающей функцией (рис. 3.4.1). При этом из (3.4.1) следует, что  $\underline{d}(\Delta)$  впервые достигает уровня  $d$  при таком значении  $\Delta_{1-\alpha}(d)$ , для которого

$$L_d(\Delta_{1-\alpha}(d)) = 1 - \alpha. \quad (3.4.2)$$

Определим множество  $F_B$  как совокупность точек  $(\Delta, d)$   $\Delta > 0$ ,  $d = 0, 1, 2, \dots$ , для которых  $d(\Delta) < \underline{d}(\Delta)$ . Из определения следует, что вероятность того, что случайная точка  $(\Delta, d(T))$ , где  $\Delta = \lambda NT$ , а  $d(T)$  — число отказавших элементов, попадет в множество  $F_B$ , ни при каком значении  $\Delta$  не превышает  $1 - \alpha$ . Событие  $Q = (\Delta, d(T)) \in F_B$  эквивалентно тому, что значение  $\Delta$  лежит левее случайной точки  $\Delta_{1-\alpha}(d(T))$ , определяемой

из (3.4.2). Вероятности эквивалентных событий равны поэтому

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\Delta < \Delta(d)\} &= \mathbf{P}\{Q \in \bar{\mathfrak{F}}_B\} = \mathbf{P}\{d > d(T)\} = \\ &= 1 - \mathbf{P}\{d \leq \underline{d}(T)\} \geq \alpha. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Таким образом,  $\Delta_{1-\alpha}(d)$  является верхней доверительной границей с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ . Так как  $\Delta = \lambda NT$ , то  $\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\alpha}(d)}{NT}$  является верхней доверительной границей для параметра  $\lambda$  с тем же коэффициентом доверия  $\alpha$ .

При построении двустороннего доверительного интервала для параметра  $\Delta$  пуассоновской случайной величины  $d(T)$  с коэффициентом доверия  $\alpha$  выбираем два числа  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 > 0$ ,  $1 - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  (обычно  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ ) и строим множество  $\mathfrak{F}$  точек  $(\Delta, d)$ , для которых или

$$L_d(\Delta) \leq \varepsilon_1, \quad \text{или} \quad 1 - L_{d-1}(\Delta) \leq \varepsilon_2. \quad (3.4.4)$$

Из условий (3.4.4) следует, что вероятность  $\mathbf{P}(Q \in \mathfrak{F})$  попадания случайной точки  $Q = (\Delta, d)$  в множество  $\mathfrak{F}$  не превышает  $1 - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Учитывая, что функция  $L_d(\Delta)$  — монотонно убывающая из (3.4.4), получаем, что точка  $(\Delta, d) \in \mathfrak{F}$  тогда и только тогда, когда значение  $\Delta$  лежит левее точки  $\bar{\Delta}(d)$  и правее точки  $\underline{\Delta}(d)$ , для которых

$$L_d(\bar{\Delta}(d)) = \varepsilon_1, \quad 1 - L_{d-1}(\underline{\Delta}(d)) = \varepsilon_2, \quad (3.4.5)$$

так как только при этом не выполняется хотя бы одно из неравенств (3.4.4). Итак, событие  $\{\underline{\Delta}(d) < \Delta < \bar{\Delta}(d)\}$  эквивалентно событию  $\{(\Delta, d) \in \mathfrak{F}\}$ . Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\{\underline{\Delta}(d) < \Delta < \bar{\Delta}(d)\} &= \mathbf{P}\{(\Delta, d) \in \mathfrak{F}\} = \\ &= 1 - \mathbf{P}\{(\Delta, d) \in \bar{\mathfrak{F}}\} \geq 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \alpha. \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Учитывая, что значения  $\Delta_\alpha(d)$ , определяемые формулой

$$L_d(\Delta_\alpha(d)) = \alpha, \quad (3.4.7)$$

даны в таблице 7 приложения, и исходя из (3.4.5), можно записать

$$\bar{\Delta}(d) = \Delta_{\varepsilon_1}(d), \quad \underline{\Delta}(d) = \Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1). \quad (3.4.8)$$

Таким образом, интервал  $(\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1), \Delta_{\varepsilon_1}(d))$  является доверительным с коэффициентом доверия, равным  $\alpha$ . Учитывая снова, что  $\lambda = \frac{\Delta}{NT}$ , получаем доверительный интервал для оцениваемого значения  $\lambda$ ,

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{NT}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{NT}, \quad (3.4.9)$$

где значения  $\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)$  и  $\Delta_{\varepsilon_1}(d)$  находятся как решения уравнений (3.4.5). Если  $d=0$ , то значение  $\Delta_{\alpha}(0-1)$  считаем равным нулю.

Пример. Предположим, что проводились испытания по плану  $[N=500, B, T=100]$  и при этом было зарегистрировано 5 отказов:  $d(T)=5$ . Требуется найти верхний доверительный предел с коэффициентом доверия  $\alpha=0,9$ . Из таблицы 7 приложения находим, что  $\Delta_{0,1}(5)=9,275$  для  $\alpha=0,9$ . Отсюда

$$\bar{\lambda} = \frac{9,275}{500 \cdot 100} = 1,855 \cdot 10^{-4},$$

истинное значение  $\lambda$  с вероятностью 0,9 не превосходит найденного значения  $\bar{\lambda}$ . Построим теперь двусторонний доверительный предел, соответствующий значению  $\alpha=0,9$ ;  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,05$ ; пользуемся той же таблицей 7, из которой находим  $\Delta_{0,05}(4) = 1,970$ ;  $\Delta_{0,05}(5) = 10,513$ . Отсюда по формуле (3.4.9) находим

$$\underline{\lambda} = \frac{1,970}{500 \cdot 100} = 0,394 \cdot 10^{-4}, \quad \bar{\lambda} = \frac{10,513}{500 \cdot 100} = 2,103 \cdot 10^{-4}.$$

При использовании плана  $[N, B, r]$  достаточной статистикой является момент  $t_r$  появления  $r$ -го отказа. Плотность вероятностей этой статистики задается формулой (3.3.11). Заметим теперь, что плотность случайной величины  $\Lambda t_r$  имеет вид

$$p(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t}, \quad (3.4.10)$$

т. е. не зависит от неизвестного значения параметра  $\Lambda$ . Если задаться значением коэффициента доверия  $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , и значениями  $\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)$  и  $\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)$  такими, что

$$\int_{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}^{\infty} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt = \varepsilon_1, \quad \int_0^{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt = \varepsilon_2, \quad (3.4.11)$$

то из вида плотности (3.4.10) следует, что

$$\begin{aligned} P\{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1) < \Lambda t_r < \Delta_{\varepsilon_1}(r-1)\} &= \int_{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}^{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt = \\ &= 1 - \int_0^{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt - \int_{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}^{\infty} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt = \\ &= 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = \alpha. \end{aligned} \quad (3.4.12)$$

Неравенства в (3.4.12) эквивалентны неравенствам  $\frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{t_r} < \Lambda < \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{t_r}$ , поэтому имеем

$$P \left\{ \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{t_r} < \Lambda < \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{t_r} \right\} = \alpha. \quad (3.4.13)$$

Так как соотношение (3.4.13) выполнено для любого  $\Lambda > 0$ , то случайный интервал  $\left( \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{t_r}, \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{t_r} \right)$  является доверительным интервалом для параметра  $\Lambda$  с коэффициентом доверия  $\alpha$ . Соответственно для параметра  $\lambda = \frac{\Lambda}{N}$  доверительный интервал имеет вид

$$\left( \underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{N t_r}, \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{N t_r} \right). \quad (3.4.14)$$

Односторонний интервал с коэффициентом доверия  $\alpha$  получаем из (3.4.14), полагая  $\varepsilon_2 = 0$ ,  $\varepsilon_1 = 1 - \alpha$ . При этом  $\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1) = 0$ , а  $\Delta_{\varepsilon_1}(r-1) = \Delta_{1-\alpha}(r-1)$ . Значения  $\Delta_{\alpha}(r)$  для различных  $r$  и  $\alpha$  приведены в таблице 7 приложения.

Пример. В результате испытаний в соответствии с планом  $[N=500, B, r=15]$  получено, что  $t_{15} = 1211$  час. Найти верхний доверительный интервал с коэффициентом доверия  $\alpha = 0,99$ . Из таблицы 7 приложения находим, что значение  $\Delta_{0,01}(14) = 25,446$ . Из формулы (3.4.14) получаем значение верхней границы доверительного интервала для  $\lambda$

$$\bar{\lambda} = \frac{25,446}{500 \cdot 1211} = 4,24 \cdot 10^{-5}.$$

Аналогичным способом можно построить доверительный интервал для плана  $[N, B, r]$ . Здесь достаточной статистикой является суммарная наработка испытываемых элементов  $S_B(t_r) = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r$ , где  $t_1, \dots, t_r$  моменты отказов элементов. Как было показано в § 3.3, плотность этой статистики имеет вид (3.3.31), поэтому случайная величина  $\hat{\lambda}$  имеет плотность (3.4.10). Повторяя рассуждения, использованные при выводе формулы (3.4.13), получаем, что

$$P \left\{ \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)} < \lambda < \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)} \right\} = \alpha. \quad (3.4.15)$$

Итак, двусторонний доверительный интервал для  $\lambda$ , соответствующий коэффициенту доверия  $\alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ , будет иметь границы

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}, \quad (3.4.16)$$

где  $S_B(t_r)$  — суммарная наработка элементов за время проведения испытаний. Соответственно верхняя граница одностороннего интервала с коэффициентом доверия  $\alpha$  равна

$$\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{S_B(t_r)}.$$

Значения коэффициентов  $\Delta_\alpha(r)$ , повторяем, даны в таблице 7 приложения.

П л а н  $[N, B, T]$ . В случае плана  $[N, B, T]$  достаточными статистиками являются число  $d(t)$  отказавших элементов и суммарная наработка  $S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)]T$ . Для высоконадежных элементов значение  $\lambda T \ll 1$ , поэтому условная плотность распределения моментов отказов практически совпадает с плотностью равномерного распределения, так как она равна  $\frac{\lambda e^{-\lambda T}}{1 - e^{-\lambda T}} \approx \frac{1}{T}$ ,  $\lambda T \ll 1$ .

Поэтому при фиксированном значении достаточной статистики  $S(T)$  распределение статистики  $d(T)$  практически не зависит от значения параметра  $\lambda$ , если только  $\lambda T \ll 1$ . Следовательно, в наиболее важной области малых значений параметра  $\lambda$  практически вся информация об этом параметре сосредоточена в достаточной статистике  $d(T)$ . Исходя из этого, мы ограничиваемся только статистикой  $d(T)$ . Можно было бы рассмотреть значения самой оценки для параметра  $\lambda$ , равной  $\frac{d(T)}{S_B(t)}$ , однако этот путь приводит к громоздким, мало пригодным для использования формулам. Так как каждый элемент может отказать независимо от отказов других элементов, а вероятность отказа  $p = 1 - e^{-\lambda T}$ , то распределение отказов  $d(T)$  является биномиальным

$$P\{d(T) = d\} = C_N^d p^d (1-p)^{N-d}.$$

Случай построения доверительного интервала  $(\underline{p}(d(T)), \bar{p}(d(T)))$  для параметра  $p$  биномиального распределения был уже рассмотрен в § 1.6. Функция  $\lambda = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-p}$  является монотонной по  $p$ , поэтому неравенство  $\underline{p}(d) < p < \bar{p}(d)$  эквивалентно неравенству

$\frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-\underline{p}(d)} < \lambda < \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-\bar{p}(d)}$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} P \left\{ \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-\underline{p}(d)} < \lambda < \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-\bar{p}(d)} \right\} = \\ = P \left\{ \underline{p}(d) < p < \bar{p}(d) \right\} \geq 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) + \alpha. \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

Так как при  $\varepsilon_1 = 0$   $\underline{p}(d) = 0$  для  $d = 0, 1, \dots, N$ , то из (3.4.17), полагая  $\varepsilon_1 = 0$ ,  $\varepsilon_2 = 1 - \alpha$ , получаем односторонний доверительный интервал  $\left( 0, \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-\bar{p}(d)} \right)$  с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ . В целях удобства построения доверительных интервалов для значений  $\alpha = 0,95$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0,025$  и  $N = 50, 60, 80, 100, 150, 200$  в приложении приведена таблица 8 коэффициентов

$$\underline{\Delta}'(d) = \ln \frac{1}{1-\underline{p}(d)}, \quad \bar{\Delta}'(d) = \ln \frac{1}{1-\bar{p}(d)}. \quad (3.4.18)$$

Из (3.4.17) находим, что двусторонний доверительный интервал имеет вид

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{\Delta}'(d)}{T}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{\Delta}'(d)}{T}, \quad (3.4.19)$$

где  $\underline{\Delta}'(d)$ ,  $\bar{\Delta}'(d)$  находятся из (3.4.18), а  $\underline{p}(d)$  и  $\bar{p}(d)$  — по формулам § 1.6 для значений  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{1-\alpha}{2}$ . Односторонний интервал равен

$$\left( 0, \frac{\bar{\Delta}'(d)}{T} \right), \quad (3.4.20)$$

где соответствующее значение  $\bar{p}(d)$  находится по формулам § 1.6 для  $\varepsilon_2 = 1 - \alpha$ .

Пример. Испытания проводятся по плану  $[N=150, B, T=100 \text{ час}]$ . За время испытаний отказало 5 элементов. Требуется найти двусторонний доверительный интервал с коэффициентом доверия  $\alpha = 0,95$ .

Из таблицы 8 приложения находим, что  $\bar{\Delta}'(10) = 0,079$ ;  $\underline{\Delta}' = 0,011$ . Таким образом, из формулы (3.4.19)

$$\underline{\lambda} = \frac{0,011}{100} = 1,1 \cdot 10^{-4};$$

$$\bar{\lambda} = \frac{0,079}{100} = 7,9 \cdot 10^{-4}.$$

Доверительные интервалы для планов с составными достаточными статистиками. План  $[N, B, (r, T)]$ . Общую методику § 1.6 используем теперь для построения доверительного интервала для  $\lambda$  по итогам испытаний, проведенных в соответствии с планом  $[N, B, (r, T)]$ . Моменты отказов в этом случае образуют пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$ . Основная специфика этого случая состоит в том, что достаточная статистика для параметра  $\lambda$  является составной. Если значение  $t_r > T$ , то она равна значению  $d(T)$  числа моментов, отказавших за время  $T$ ; если же  $t_r < T$ , то достаточная статистика равна  $t_r$  — моменту появления  $r$ -го отказа. Рассмотрим точки плоскости вида  $(\Lambda, t)$ ,

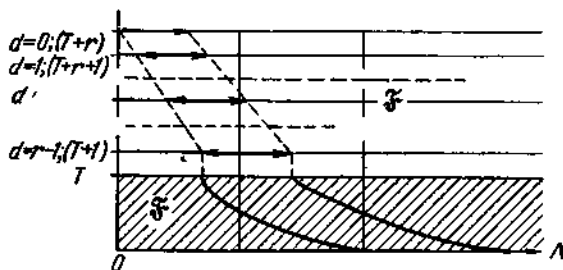


Рис. 3.4.2.

$\Lambda > 0$ ,  $0 < t < T$ ,  $t = T+1, \dots, T+r$  (рис. 3.4.2). Если в результате испытаний элементов, для которых  $\lambda N = \Lambda$ , наблюдается значение  $t_r < T$ , то результаты испытаний отмечаются случайной точкой  $(\Lambda, t_r)$ . Если же  $t_r > T$  и число отказов равно  $d(T) = d$ , то исход опыта обозначается случайной точкой  $(\Lambda, T+r-d)$ . Множество точек  $\tilde{\mathcal{Y}}$  строится следующим образом. Задаемся двумя числами  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$ ,  $\alpha = 1 - (\epsilon_1 + \epsilon_2)$ . При фиксированном значении  $\Lambda$  в верхней части множества  $\tilde{\mathcal{Y}}$  отнесим те точки  $(\Lambda, S)$ ,  $S = T+r-d$  или  $t$ , для которых  $S > \bar{S}(\Lambda)$ , где  $\bar{S}(\Lambda)$  находится из условий  $\bar{S}(\Lambda) = T+r-\bar{d}(T)$ ;  $\bar{d}(T)$  — целое число, не большее  $r-1$ , если

$$\sum_{d=0}^{\bar{d}(T)} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} \leq \epsilon_1 < \sum_{d=0}^{\bar{d}(T)+1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T}; \quad (3.4.21)$$

если же

$$\sum_{d=0}^r \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} < \epsilon_1,$$



то  $\bar{S}(\Lambda) = \bar{t}(\Lambda)$ , где  $\bar{t}(\Lambda)$  находится из условий

$$\sum_{d=0}^{r-1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \int_{\bar{t}(\Lambda)}^T \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \int_{\bar{t}(\Lambda)}^{\infty} \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \varepsilon_1. \quad (3.4.22)$$

Аналогичным образом к нижней части множества  $\mathfrak{F}$  относим точки  $(\Lambda, S)$ , для которых  $S < \underline{S}(\Lambda)$ , где  $\underline{S}(\Lambda)$  находится из условий

$$\int_0^{\underline{S}(\Lambda)} \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \varepsilon_2; \quad (3.4.23)$$

если же  $\int_0^T \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds < \varepsilon_2$ , то в качестве  $\underline{S}(\Lambda)$  выбирается число  $\underline{S}(\Lambda) = T + r - \underline{d}(T)$ , где  $\underline{d}(T)$  — целое число, не большее  $r-1$ , находится из условий

$$\begin{aligned} \sum_{d=\underline{d}(T)}^{r-1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} + \int_0^T \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \\ = 1 - \sum_{d=0}^{\underline{d}(T)-1} \frac{(\Lambda T)^d}{d!} e^{-\Lambda T} = \int_0^T \frac{\Lambda^{\underline{d}(T)} s^{\underline{d}(T)-1}}{(\underline{d}(T)-1)!} e^{-\Lambda s} ds \leq \varepsilon_1 < \\ < \sum_{d=\underline{d}(T)-1}^{r-1} \frac{(\Lambda T)^d e^{-\Lambda T}}{d!} + \int_0^T \frac{\Lambda^r s^{r-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds. \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Вероятность того, что исход испытаний будет отмечен случайной точкой  $(\Lambda, S) \in \mathfrak{F}$  не превышает  $1 - \alpha = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$  по построению множества  $\mathfrak{F}$ . Соответственно вероятность противоположного события  $(\Lambda, S) \notin \mathfrak{F}$  не меньше  $\alpha$ . Если в результате проведения испытаний наблюдалось  $d(T) = d \leq r-1$  отказов, то событие  $(\Lambda, S) \in \mathfrak{F}$  эквивалентно событию

$$\underline{\Lambda}(d) < \Lambda < \bar{\Lambda}(d), \quad (3.4.25)$$

где  $\underline{\Lambda}(d)$  и  $\bar{\Lambda}(d)$  — функции, обратные к  $\underline{S}(\Lambda)$ ,  $\bar{S}(\Lambda)$  для тех значений  $\Lambda$ , при которых  $\underline{S}(\Lambda)$  или  $\bar{S}(\Lambda)$  равны  $T + r - d$ ,  $d = 0, \dots, r-1$ . Из уравнений (3.4.21) и (3.4.24) находим, что  $\underline{\Lambda}(d)$  и  $\bar{\Lambda}(d)$

определяются уравнениями

$$\int_T^{\infty} \frac{\bar{\Lambda}_s^{d-1}}{d!} e^{-\bar{\Lambda}s} ds = \varepsilon_1, \quad (3.4.26)$$

$$\int_0^T \frac{\Lambda_s^{d-1}}{(r-1)!} e^{-\Lambda s} ds = \varepsilon_2. \quad (3.4.27)$$

Но эти уравнения эквивалентны уравнениям (3.4.11). Отсюда находим, что

$$\bar{\Lambda}(d) = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{T}, \quad \underline{\Lambda}(d) = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{T}, \quad (3.4.28)$$

где

$$\bar{\Lambda}(d) = \bar{\lambda}(d) N, \quad \underline{\Lambda}(d) = \underline{\lambda}(d) N.$$

Напоминаем, что значения коэффициентов  $\Delta_x(d)$  даны в таблице 7 приложения. Если же момент  $r$ -го отказа  $t_r < T$ , то событие  $(\Lambda, t_r) \in \tilde{\mathcal{F}}$  эквивалентно событию

$$\underline{\Lambda}(t_r) < \Lambda < \bar{\Lambda}(t_r), \quad (3.4.29)$$

где  $\underline{\Lambda}(S)$ ,  $\bar{\Lambda}(S)$  — функции, обратные к  $\underline{S}(\Lambda)$ ,  $\bar{S}(\Lambda)$  для тех значений  $\Lambda$ , при которых значения  $\underline{S}(\Lambda)$  и  $\bar{S}(\Lambda)$  не превышают  $T$ . Из (3.4.22) и (3.4.23) находим, что  $\underline{\Lambda}(t_r)$  и  $\bar{\Lambda}(t_r)$  определяются уравнениями

$$\int_{t_r}^{\infty} \frac{[\bar{\Lambda}(t_r)]^r}{(r-1)!} s^{r-1} e^{-\bar{\Lambda}(t_r)s} ds = \varepsilon_1, \quad (3.4.30)$$

$$\int_0^{t_r} \frac{[\underline{\Lambda}(t_r)]^r}{(r-1)!} s^{r-1} e^{-\underline{\Lambda}(t_r)s} ds = \varepsilon_2. \quad (3.4.31)$$

Эти уравнения эквивалентны уравнениям (3.4.11), в которых

$$\bar{\Delta}(r) = \bar{\Lambda}(t_r) t_r = \bar{\lambda}(t_r) N t_r, \quad \underline{\Delta}(r) = \underline{\Lambda}(t_r) t_r = \underline{\lambda}(t_r) N t_r,$$

$$\bar{\Delta}(r) = \Delta_{\varepsilon_1}(r-1), \quad \underline{\Delta}(r) = \Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1).$$

Таким образом, построение доверительного интервала для оценки параметра  $\lambda$  при использовании плана  $[N, B, (r, T)]$  нужно производить так же, как при использовании планов  $[N, B, T]$  и  $[N, B, r]$ , в зависимости от того, имеем мы  $t_r > T$  или  $t_r < T$ .

П л а н  $\{N, B, (r, HS_0)\}$ . В § 3.3 было показано, что план  $\{N, B, (r, HS_0)\}$  эквивалентен плану  $\{N=1, B, (r, S_0)\}$ . Поэтому двусторонний доверительный интервал имеет вид

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{S_0}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{S_0}, \quad \text{если } S_B(t_r) > S_0, \quad (3.4.32)$$

$$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}, \quad \text{если } S_B(t_r) \leq S_0, \quad (3.4.33)$$

где  $S(t) = \sum_{i=0}^{d(t)} t_i + [N - d(t)]t$ ,  $d(t)$  — число элементов, отказавших к моменту  $t$ . Значения коэффициентов  $\Delta_\alpha(d)$  находятся из таблицы 7 приложения. Односторонний доверительный интервал получаем из формул (3.4.32), (3.4.33), полагая в них  $\underline{\lambda} = 0$ , что соответствует значению  $\varepsilon_1 = 1 - \alpha$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ .

Пример. Испытания проводились в соответствии с планом  $\{N=500, B, (r=20, HS_0=20\,000)\}$ . К моменту окончания испытаний, когда суммарная наработка стала равной 20 000, отказало 16 элементов. Требуется найти верхний доверительный предел, соответствующий коэффициенту доверия  $\alpha=0,99$ . Так как значение  $S(t_{20}) \geq S_0$ , т. е. суммарная наработка элементов достигла уровня  $S_0$ , заданного до начала испытаний, раньше, чем наступил отказ 20-го элемента, то верхняя доверительная граница находится по формуле (3.4.32). Из таблицы 7 приложения находим, что  $\Delta_{0,01}(16) = 28,030$ , откуда

$$\bar{\lambda} = \frac{28,030}{20\,000} = 1,40 \cdot 10^{-3}.$$

П л а н  $\{N, B, (r, T)\}$ . Вполне аналогичным способом можно получить доверительные интервалы для случая плана  $\{N, B, (r, T)\}$ . Здесь достаточная статистика равна либо наработке  $S(t_r)$  к моменту  $t_r$ , если  $t_r \leq T$ , либо является двумерной  $(d(T), S_B(T))$ , если  $t_r > T$ , где  $d(T)$  — число отказавших элементов, а  $S_B(T) = \sum_{i=1}^{d(T)} t_i + [N - d(T)]T$  — суммарная наработка. Однако по тем же соображениям, которые приводились для случая плана  $\{N, B, T\}$ , статистику  $S_B(T)$  мы исключаем из рассмотрения. Итак, значение случайной величины, исходя из которой мы строим доверительный интервал, равно  $d(T)$ , если  $t_r > T$ , и равно  $S_B(t_r) = \sum_{i=1}^r t_i + (N-r)t_r$ , если  $t_r < T$ . На плоскости  $(\lambda, t)$  мы рассматриваем

множество точек  $\Lambda > 0$ ,  $0 < t < NT$ ,  $t = NT + 1, \dots, NT + r$ ,

$$\lambda S_B(t_r) = N\lambda t_1 + (N-1)\lambda(t_2 - t_1) + \dots + (N-r+1)\lambda(t_r - t_{r-1}),$$

где  $(N-i)(t_{i+1} - t_i)$  ( $i = 0, \dots, r-1$ ,  $t_0 = 0$ ) — взаимно независимые (см. § 3.3) неотрицательные случайные величины с плотностью, равной  $e^{-\lambda t}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} P\{\lambda S_B(t_r) < x, \lambda t_r < T\} = \\ = \int \dots \int e^{-\sum_1^r s_i} ds_1 \dots ds_r = F_r(x, T). \end{aligned} \quad (3.4.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_1^r s_i < x \\ \sum_1^r \frac{s_i}{N-i+1} < T \end{array} \right\}$$

Соответственно

$$P\{S(t_r) \leq s, t_r < T\} = F_r(\lambda s, \lambda T). \quad (3.4.35)$$

Далее, в точности повторяя все рассуждения, использованные при построении множества  $\bar{\mathfrak{F}}$  и затем доверительных интервалов для плана  $\{N, B, (r, T)\}$ , и учитывая, что распределение  $d(T)$  является биномиальным, получаем доверительные интервалы для параметра  $\lambda$  с коэффициентом доверия не меньшим  $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ . Если к моменту  $T$  окончания испытаний общее число отказов  $d(T) = d < r$ , то верхняя граница  $\bar{\lambda}$  доверительного интервала находится из уравнения

$$\sum_{k=0}^d C_N^k (1 - e^{-\bar{\lambda} T})^k e^{-(N-k)\bar{\lambda} T} = \varepsilon_1 \geq 0, \quad (3.4.36)$$

а нижняя — из уравнения

$$\sum_{k=d}^N C_N^k (1 - e^{-\underline{\lambda} T})^k e^{-(N-k)\underline{\lambda} T} = \varepsilon_2 \geq 0. \quad (3.4.37)$$

Если же момент появления  $r$ -го отказа  $t_r < T$ , то верхняя граница находится из уравнения

$$\sum_{k=0}^{r-1} C_N^k (1 - e^{-\bar{\lambda} T})^k e^{-(N-k)\bar{\lambda} T} + F(\bar{\lambda} S(t_r), \lambda T) = \varepsilon_1, \quad (3.4.38)$$

а нижняя — из уравнения

$$F(\underline{\lambda} S(t_r), \lambda T) = \varepsilon_2, \quad (3.4.39)$$

где  $S(t_r)$  — суммарная наработка элементов к моменту  $t_r$ .

Сравнивая (3.4.36), (3.4.37) с формулами § 1.6 для доверительных границ параметра биномиального распределения  $p$  и замечая, что  $\lambda = \frac{1}{T} \ln \frac{1}{1-p}$ , получаем, что для случая  $t_r > T$

$$\underline{\lambda} = \frac{\underline{\Delta}'(d)}{T}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{\Delta}'(d)}{T}.$$

Значения  $\underline{\Delta}'(d)$  и  $\bar{\Delta}'(d)$  приведены в таблице 8 приложения. Для случая  $t_r \leq T$  необходимо иметь таблицы решений уравнений (3.4.38), (3.4.39).

Если для выбранного значения  $r$  плана  $[N, B, (r, T)]$  отношение  $\frac{r}{N} < 0, 1$ , то планы  $[N, B, (r, T)]$  и  $[N, B, r]$  практически эквивалентны; соответственно эквивалентны планы  $[N, B, r]$  и  $[N, B, r]$ , так как число заменяемых элементов составляет незначительную часть от их общего числа. Поэтому в первом приближении для построения доверительных интервалов можно считать, что испытания проводились не по плану  $[N, B, (r, T)]$ , а по плану  $[N, B, r]$ . По той же причине оказываются практически эквивалентными доверительные интервалы, построенные исходя из плана  $[N, B, T]$  и плана  $[N, B, T]$ , если только наблюдаемое число  $d(T)$  отказавших элементов значительно меньше общего числа  $N$  испытываемых одновременно элементов,  $\frac{d(T)}{N} < 0, 1$ .

Основные формулы настоящего параграфа даны в таблице 6 приложения.

### § 3.5. Доверительные интервалы и множества. Случай многих параметров<sup>1)</sup>

В начале предыдущего параграфа указывалось, что иногда недостаточно характеризовать различные показатели надежности только посредством точечных оценок. Эти соображения остаются в силе и для многих неизвестных параметров. Если моменты отказов являются случайными величинами, функции распределения которых известным образом зависят от нескольких параметров, то числовые показатели надежности (вероятность безотказной работы в течение времени  $T$ , среднее время до первого отказа и т. д.) являются вполне определенными функциями от значений этих параметров. При этом возникает большое количество задач. Чтобы показать, насколько разнообразными могут быть возможные по-

<sup>1)</sup> Часть материалов, изложенных в этом параграфе, требует специальной математической подготовки.

становки задач, мы отметим три различных пути, приводящих к необходимости решения многопараметрических задач. Во-первых, для целого ряда элементов функция распределения момента появления отказа зависит от двух или более параметров. В § 1.4 приводились различные семейства функций распределения, зависящих от нескольких параметров: закон Вейбулла, нормальный и логарифмически нормальный законы и др. При этом структура статистических данных, исходя из которых надо построить доверительный интервал для заданной функции от неизвестных значений параметров, может соответствовать одному из планов, описанных в § 3.1. Более сложная ситуация возникает на втором пути, когда производятся испытания элементов (или систем), состоящих из нескольких частей, отказы каждой из которых приводит к отказу работы всего элемента.

Если, например, отказы частей происходят взаимно независимо друг от друга, а функция распределения момента отказа для  $i$ -й части равна  $F_i(t, \alpha_i, \beta_i)$ , т. е. зависит от двух параметров, то вероятность безотказной работы такого элемента в течение времени  $T$  равна  $R(T) = \prod_{i=1}^N [1 - F_i(T, \alpha_i, \beta_i)]$ . Здесь  $N$  — число частей,

составляющих элемент. Таким образом, мы видим, что важная числовая характеристика надежности  $R(T)$  является функцией  $2N$  неизвестных значений параметров. Заметим, что в этой ситуации число возможных планов проведения испытаний может быть значительно увеличено по сравнению с планами, описанными в § 3.1. Действительно, момент прекращения испытаний может зависеть от того, в каких составных частях элемента наблюдаются отказы. Наконец, многопараметрические задачи возникают при «прогнозировании» показателей надежности системы, состоящей из многих отличающихся друг от друга блоков. При этом надо исходить из статистических данных, полученных в отдельности для каждого типа составляющих систему блоков. Например, представляет интерес построение доверительного интервала для вероятности безотказной работы  $R(T)$  в течение времени  $T$ , когда блоки отказывают независимо и вероятность безотказной работы  $i$ -го блока равна  $P_i = R_i(T)$ . Если  $m$  — число различных типов блоков, а  $k_i - 1$  — число резервных блоков одного типа (резерв нагруженный), входящих в систему, то

$$R(T) = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - P_i)^{k_i}]. \quad (3.5.1)$$

Предполагается, что испытания блоков  $i$ -го типа проводились в соответствии с одним из возможных планов, например  $[N_i, B, T]$ . Если считать, что роль параметров играют  $m$  неизвестных значе-

ний  $P_i = R_i(T)$ , то мы снова приходим к задаче построения доверительного интервала для функции от многих неизвестных значений параметров. На первый взгляд может показаться, что эту задачу можно легко свести к случаю одного неизвестного параметра  $P_i = R_i(T)$ . Для этого надо только найти доверительные интервалы  $(\underline{P}_i, \bar{P}_i)$  отдельно для каждого из  $N$  параметров  $P_i = R_i(T)$ , а затем взять за доверительный интервал  $(\underline{R}, \bar{R})$  для  $R(T)$ , где

$$\underline{R} = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - \underline{P}_i)^{k_i}], \quad \bar{R} = \prod_{i=1}^m [1 - (1 - \bar{P}_i)^{k_i}].$$

Заметим, что если коэффициент доверия для интервала  $(\underline{P}_i, \bar{P}_i)$  равен  $\alpha_i$ , то коэффициент доверия для  $R$  не хуже  $\alpha = \prod_{i=1}^m \alpha_i$ . Однако  $\alpha$  оказывается слишком малым даже для небольших значений  $m$ . Например, если  $m = 10$ ,  $\alpha_i = 0,9$ , то  $\alpha = (0,9)^{10} \approx 0,35$ . Следовательно, мы можем ручаться, что в среднем из 100 построенных доверительных интервалов лишь не менее 35 будут содержать истинное значение вероятности  $R(T)$ . Редукция к меньшему числу параметров, осуществленная таким образом, оказалась неудачной.

Доверительные интервалы для случая последовательной цепи элементов. Рассмотрим простейшие случаи построения доверительного интервала для вероятности безотказной работы системы, состоящей из  $m$  последовательно соединенных элементов  $l$  типов. Число элементов  $i$ -го типа, входящих в систему, равно  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ ,  $\sum_{i=1}^l m_i = m$ . Предполагается, что элементы отказывают независимо друг от друга и что отказ любого из них приводит к отказу всей системы. Обозначим через  $R_i(T)$  вероятность безотказной работы элементов  $i$ -го типа в течение времени  $T$ . Вероятность безотказной работы системы  $R(T)$  задается формулой

$$R(T) = \prod_{i=1}^l R_i(T)^{m_i} = e^{\sum_{i=1}^l m_i \ln R_i(T)}. \quad (3.5.2)$$

Так как обычно  $R_i(T) \approx 1$ , то, используя соотношение  $\ln R_i(T) \approx 1 - R_i(T)$ , можно также вместо (3.5.2) исходить в расчетах из приближенной формулы

$$R(T) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^l m_i [1 - R_i(T)] \right\}. \quad (3.5.2')$$

Учитывая монотонную зависимость  $R(T)$  от  $\sum_{i=1}^l m_i \ln R_i(T)$ , можно

задачу отыскания нижнего доверительного интервала для  $R(T)$  свести к эквивалентной задаче отыскания верхнего доверительного интервала для суммы  $\sum m_i \ln R_i(T)$  выпуклых функций.

Построение доверительного интервала существенным образом зависит от того, какие статистические данные о неизвестных параметрах  $R_i(T)$  имеются в нашем распоряжении. Предположим, что элементы  $i$ -го типа испытываются в соответствии с планом  $[N_i, B, (T)]$ ,  $i=1, \dots, l$ , и что при этом было зарегистрировано  $d_i$  отказов. Если элементы достаточно надежные и  $N_i$  велико ( $N_i > 20$ ), то можно считать, что  $d_i$  имеют пуассоновское распределение с параметром  $\lambda_i = N_i [1 - R_i(T)]$ . Соответственно вместо формулы (3.5.2) используем формулу (3.5.2').

Рассмотрим два пространства: пространство исходов испытаний  $(d_1, \dots, d_l)$  и пространство параметров  $(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ . Так как  $d_1, \dots, d_l$  имеют пуассоновское распределение, то сумма их  $d = d_1 + \dots + d_l$  также имеет пуассоновское распределение с параметром  $\lambda = \lambda_1 + \dots + \lambda_l$ . Если  $\Delta_\alpha(d)$  — квантили пуассоновского распределения (таблица 7  $\Delta_\alpha(d)$  дана в приложении), то утверждение  $\{\lambda_1 + \dots + \lambda_l \leq \Delta_\alpha(d)\}$  эквивалентно утверждению  $\{d_1 + \dots + d_l \leq d_\alpha(\lambda_1 + \dots + \lambda_l)\}$ , где  $d_\alpha(\lambda)$  находится из условия

$$\sum_{k=0}^{d(\lambda)} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \geq 1 - \alpha > \sum_{k=0}^{d(\lambda)-1} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

По построению  $\Delta_\alpha(d)$  имеем

$$\mathbf{P}\{\lambda_1 + \dots + \lambda_l \leq \Delta_{1-\alpha}(d)\} \geq \alpha. \quad (3.5.3)$$

Исходя из (3.5.3), рассмотрим множества в пространстве параметров, задаваемые условиями

$$\lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^l \lambda_i \leq \Delta_{1-\alpha}(d), \quad d = d_1 + \dots + d_l. \quad (3.5.4)$$

Если на множестве, определяемом неравенствами (3.5.4), рассмотреть максимум функции  $\varphi = \sum_{i=1}^l m_i \ln R_i(T)$

$$\bar{\varphi} = \max \sum_{i=1}^l m_i \ln R_i(T), \quad (3.5.5)$$



то для событий имеем

$$\left\{ \bar{\varphi} = \max \sum_{i=1}^l m_i \ln R_i(T) \geq \varphi = \sum_{i=1}^l m_i \ln R_i(T) \right\} \supseteq \supseteq \{ \lambda_1 + \dots + \lambda_l \leq \Delta_{1-\alpha}(d) \}. \quad (3.5.6)$$

Так как вероятность события  $\{ \lambda_1 + \dots + \lambda_l \leq \Delta_{1-\alpha}(d) \}$  не меньше  $\alpha$ , то, учитывая (3.5.6), и подавно имеем  $\mathbf{P} \{ \bar{\varphi} > \varphi \} \geq \alpha$ .

В качестве нижней доверительной границы для  $R(T)$  можно взять  $\underline{R}(T) = \exp \{ -\bar{\varphi} \}$ . Таким образом, задача отыскания нижней доверительной границы сведена к задаче отыскания максимума функции (3.5.5) при ограничениях (3.5.4). Если воспользоваться приближением (3.5.2'), то (3.5.5) заменяется условием

$$\bar{\varphi} = \max \sum_{i=1}^l m_i (1 - R_i(T)). \quad (3.5.7)$$

Максимум (3.5.7) при ограничениях (3.5.4) легко найти в явном виде. Здесь имеем

$$\bar{\varphi} = \Delta_{1-\alpha}(d) \max_{1 \leq i \leq l} \frac{m_i}{N_i}. \quad (3.5.8)$$

Исходя из формулы (3.5.8), получаем, что нижний доверительный предел для вероятности  $R(T)$  безотказной работы с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ , равен

$$\underline{R}(T) = \exp \left\{ - \left[ \max_{1 \leq i \leq l} \frac{m_i}{N_i} \right] \Delta_{1-\alpha}(d_1 + \dots + d_l) \right\}. \quad (3.5.9)$$

Построенный по формуле (3.5.9) нижний доверительный предел не для всех значений параметров  $\lambda_i = N_i [1 - R_i(T)]$  будет давать хорошее приближение к  $R(T)$ . В тех случаях, когда  $\lambda_i$  и соответственно  $d_i$  велики, можно использовать нормальное приближение, предложенное в работе Р. А. Мирного и А. Д. Соловьева [11].

Заменяя  $\lambda_i$  оценками  $d_i$  и учитывая нормальность распределения  $\sum_{i=1}^l \frac{m_i}{N_i} d_i$ , можно утверждать, что с вероятностью, близкой к  $\alpha$ ,

$$\sum_{i=1}^l \frac{m_i}{N_i} \lambda_i \leq \sum_{i=1}^l \frac{m_i}{N_i} d_i + u_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^l \frac{m_i^2}{N_i} \frac{d_i}{N_i} \left( 1 - \frac{d_i}{N_i} \right)},$$

где  $u_\alpha$  — квантиль нормального распределения (см. таблицу 3 приложения).

Таким образом, нижний доверительный предел для вероятности  $R(T)$  имеет вид

$$\underline{R}(T) = \exp \left\{ - \sum_{i=1}^l \frac{m_i}{N_i} d_i - u_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^l \frac{m_i^2}{N_i} \frac{d_i}{N_i} \left( 1 - \frac{d_i}{N_i} \right)} \right\}. \quad (3.5.10)$$

В качестве второго примера рассмотрим случай построения нижней доверительной границы для вероятности безотказной работы, задаваемой формулой (3.5.2), когда  $R_i(T) = e^{-\lambda_i T}$ . Таким образом, здесь

$$R(T) = e^{-\sum_{i=1}^l m_i \lambda_i T}.$$

Будем предполагать, что данные о неизвестных значениях параметров  $\lambda_i$  получены в соответствии с планами испытаний  $[N_i, B, r_i]$ . Пусть значения суммарных наработок  $S_B(t_{r_i}) = S_i$ ,  $i = 1, \dots, l$ .  $S_i$  являются достаточными статистиками. Замечая, что  $2\lambda_i S_i$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $2r_i$  степенями свободы и что при сложении случайных величин, имеющих  $\chi^2$ -распределение, степени свободы складываются, получаем

$$\mathbf{P} \left\{ 2 \sum_{i=1}^l \lambda_i S_i < \chi_\alpha^2 \left( 2 \sum_{i=1}^l r_i \right) \right\} = \alpha,$$

где  $\chi_\alpha^2(n)$  — квантиль  $\chi^2$ -распределения с  $n$  степенями свободы (см. таблицу 4 приложения). Событие

$$2 \sum_{i=1}^l \lambda_i S_i < \chi_\alpha^2 \left( 2 \sum_{i=1}^l r_i \right), \quad \lambda_i \geq 0, \quad (3.5.11)$$

мы можем рассматривать как неравенства, наложенные на параметры  $\lambda_i$ , вероятность выполнения которых равна  $\alpha$ . Если рассмотреть максимум функции

$$\bar{\psi} = \max \sum_{i=1}^l m_i \lambda_i \quad (3.5.12)$$

на множестве, заданном неравенствами (3.5.11), то, очевидно, имеем

$$\left\{ \bar{\psi} = \max \sum_{i=1}^l m_i \lambda_i \geq \sum_{i=1}^l m_i \lambda_i \right\} \supseteq \left\{ 2 \sum_{i=1}^l \lambda_i S_i < \chi_\alpha^2 \left( 2 \sum_{i=1}^l r_i \right) \right\}.$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} P \left\{ R(T) = e^{-\sum_{i=1}^l m_i \lambda_i T} \geq R(T) = e^{-\bar{\psi} T} \right\} = \\ = P \left\{ \bar{\psi} \geq \sum_{i=1}^l m_i \lambda_i \right\} \geq P \left\{ 2 \sum_{i=1}^l \lambda_i S_i < \chi_\alpha^2 \left( 2 \sum_{i=1}^l r_i \right) \right\} = \alpha. \end{aligned}$$

Таким образом, задача отыскания нижнего доверительного интервала для  $R(T)$  сведена к задаче отыскания максимума функции (3.5.12) при ограничениях типа неравенств (3.5.11). Ответ находится в явном виде:

$$\bar{\psi} = \left( \max_{1 \leq i \leq l} \frac{m_i}{S_i} \right) \left\{ \frac{\chi_\alpha^2 \left( 2 \sum_{i=1}^l r_i \right)}{2} T \right\}.$$

Таким образом, нижний доверительный предел с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ ,

$$\underline{R}(T) = \exp \left\{ - \left( \max_{1 \leq i \leq l} \frac{m_i}{S_i} \right) \frac{\chi_\alpha^2 \left( 2 \sum_{i=1}^l r_i \right)}{2} T \right\}.$$

При больших значениях  $r_i$  можно использовать нормальное приближение для оценок  $\hat{\lambda}_i = \frac{r_{i-1}}{S_i}$ . Здесь, заменяя  $\lambda_i$  оценками  $\hat{\lambda}_i$ , имеем, что с вероятностью, близкой к  $\alpha$ ,

$$\sum_{i=1}^l m_i \lambda_i \leq \sum_{i=1}^l m_i \frac{r_{i-1}}{S_i} + u_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^l m_i^2 \frac{r_{i-1}}{S_i^2}}.$$

Таким образом, приближенная формула для нижнего доверительного предела с коэффициентом доверия  $\alpha$  имеет вид

$$\underline{R}(T) = \exp \left\{ - \left[ \sum_{i=1}^l m_i \frac{r_{i-1}}{S_i} + u_\alpha \sqrt{\sum_{i=1}^l m_i^2 \frac{r_{i-1}}{S_i^2}} \right] T \right\}. \quad (3.5.12')$$

Общий метод построения доверительных интервалов. Сформулируем теперь в самом общем плане постановку задачи о построении доверительных интервалов в случае многих неизвестных параметров.

Задано пространство статистических данных  $X = \{x\}$ . Результаты испытаний являются точками  $x$  из этого пространства. На этом пространстве задано семейство вероятностных мер  $P, \{x\}$ ,

зависящих от значений многомерного параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \Omega$ , где  $\Omega$  — множество возможных значений параметра  $\theta$ ; задана также известная числовая функция  $\varphi(\theta)$ . Требуется по известным результатам  $x$  построить доверительный интервал  $(\underline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x))$  такой, что для любого  $\theta \in \Omega$

$$P_0 \{ \underline{\varphi}(x) < \varphi(\theta) < \overline{\varphi}(x) \} \geq \alpha.$$

Если  $\alpha$  — наибольшее из чисел, удовлетворяющих этому неравенству, то  $\alpha$  называется *коэффициентом доверия* для доверительного интервала  $(\underline{\varphi}(x), \overline{\varphi}(x))$ . В противном случае говорят, что построен доверительный интервал с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ .

Постановку этой общей задачи, метод решения которой мы дадим ниже, проиллюстрируем на двух примерах.

**Пример 1** (постановка задачи). Испытания элементов проводились по плану  $[N, B, N]$ . Функция распределения моментов отказов  $F(t, \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)$ , где  $\Phi(t)$  — функция распределения для нормального закона. Неизвестные значения параметров

$$\theta_1 = \mu, \theta_2 = \sigma, \Omega = \{-\infty < \theta_1 < +\infty, 0 \leq \sigma < \infty\}.$$

Достаточными статистиками для параметров  $\mu, \sigma$  являются

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i, \quad S^2 = \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

(см. § 1.6), поэтому пространство  $X$  состоит из точек  $x = (\bar{x}, S)$ ,  $-\infty < \bar{x} < +\infty, S \geq 0$ .

Семейство мер  $P_0\{x\}$  является совместным распределением статистик  $\bar{x}$  и  $S$ . Требуется построить доверительный интервал  $(\varphi(\bar{x}, S), 1)$  для функции  $\varphi(\theta) = \varphi_T(\mu, \sigma) = 1 - \Phi\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)$ , т. е. вероятности безотказной работы элемента в интервале времени  $(0, T)$ .

**Пример 2.** Система содержит  $k_i$  блоков  $i$ -го типа,  $i = 1, \dots, N$ . Вероятность безотказной работы системы  $R(T)$  задается формулой (3.5.1), где вероятности безотказной работы  $i$ -го блока  $P_i = R_i(T)$ . Испытания блоков  $i$ -го типа проводятся по плану  $[N_i, B, T]$ . Так как достаточной статистикой для  $P_i$  является число  $d_i(T)$  элементов, отказавших за время  $T$  проведения испытаний, то в качестве пространства  $X$  выбираем совокупность  $N$ -мерных векторов  $X = (d_1, \dots, d_N)$ , где  $d_i = 0, 1, \dots, N_i$  равно числу элементов  $i$ -го типа, отказавших за время проведения испытаний. Неизвестный

параметр  $\theta = (P_1, \dots, P_N)$ ,  $\Omega = \{0 \leq P_i \leq 1, i = 1, \dots, N\}$ . Так как предполагается, что моменты отказов различных элементов взаимно не зависят друг от друга, то  $d_i(T)$  имеет биномиальное распределение и семейство вероятностных мер в пространстве  $X$  задается формулой

$$P_0\{x\} = \prod_{i=1}^N P_0\{d_i(T) = d_i\} = \prod_{i=1}^N C_{N_i}^{d_i} (1 - P_i)^{d_i} P_i^{N - d_i}.$$

Требуется построить нижний доверительный интервал для  $\varphi(\theta) = R(T)$ , т. е. для вероятности безотказной работы системы.

Общая методика построения доверительного интервала является естественным обобщением методики для случая одного неизвестного параметра, которая была изложена в § 1.6. В качестве случайной величины, распределение которой зависит от неизвестного значения параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$ , мы выбираем оценку  $\hat{\varphi}(x)$  для значения заданной функции  $\varphi(\theta)$ . Далее рассматривается пространство  $\mathcal{E}$  точек  $(\theta_1, \dots, \theta_N, \hat{\varphi}(x))$ . Каждой точке  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N)$  на оси значений  $\hat{\varphi}$  сопоставляется такое множество  $G(\theta)$ , что

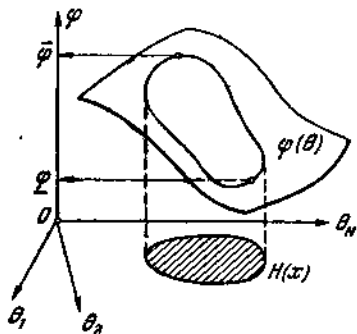


Рис. 3.5.1.

$$P\{\hat{\varphi} \in G(\theta)\} \geq \alpha. \quad (3.5.13)$$

При этом система множеств  $G(\theta)$  строится таким образом, чтобы неравенство (3.5.13) нельзя было улучшить для всех значений  $\theta$ , а само значение вероятности  $P\{\hat{\varphi} \in G(\theta)\}$  было бы по возможности ближе к  $\alpha$ . Если функция распределения оценки  $F_{\hat{\varphi}}(x) = P\{\hat{\varphi}(\theta) < x\}$  непрерывная, а параметр  $\theta$  одномерный, то в качестве множества  $G(\theta)$  выбираем интервал  $(\underline{G}(\theta), \bar{G}(\theta))$ , где

$$F_{\hat{\varphi}}(\bar{G}(\theta)) = 1 - \varepsilon_1, \quad F_{\hat{\varphi}}(\underline{G}(\theta)) = \varepsilon_2, \quad \alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2).$$

Если теперь рассмотреть подмножество  $\mathcal{F} \subset \mathcal{E}$  точек  $(\theta_1, \dots, \theta_N, \hat{\varphi})$ , для которых  $\hat{\varphi} \in G(\theta)$ , то из (3.5.13) следует, что

$$P\{(\theta, \hat{\varphi}) \in \mathcal{F}\} \geq \alpha. \quad (3.5.14)$$

Фиксируем теперь значение  $\hat{\varphi} = x$ , и в множестве  $\Omega$  возможных значений параметра  $\theta$  выделим подмножество  $H(\hat{\varphi})$ , или  $H(x) \subset \Omega$  (рис. 3.5.1), состоящее только из таких точек  $(\theta, x)$ , для которых

$x \in G(\theta)$ . По построению событие  $\{\hat{\varphi} \in G(\theta)\}$  эквивалентно событию  $(\theta, \hat{\varphi}) \in \mathfrak{F}$ . Так как вероятности эквивалентных событий совпадают, то, учитывая (3.5.14), получаем

$$\mathbf{P}\{\theta \in H(\hat{\varphi})\} \geq \alpha. \quad (3.5.15)$$

Каждому значению оценки  $\hat{\varphi}$  мы сопоставляем случайные величины  $\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) = \inf_{\theta \in H(\hat{\varphi})} \varphi(\theta)$ ,  $\bar{\varphi}(\hat{\varphi}) = \sup_{\theta \in H(\hat{\varphi})} \varphi(\theta)$ .

Вообще говоря, утверждение о том, что  $\underline{\varphi}(\hat{\varphi})$ ,  $\bar{\varphi}(\hat{\varphi})$  являются случайными величинами, требует специального доказательства, однако во всех практически интересных случаях это будет так. Событие  $\theta \in H(\hat{\varphi})$  влечет за собой событие  $\{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) < \varphi(\theta) < \bar{\varphi}(\hat{\varphi})\}$ , поэтому из (3.5.15) получаем

$$\mathbf{P}\{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}) < \varphi(\theta) < \bar{\varphi}(\hat{\varphi})\} \geq \mathbf{P}\{\theta \in H(\hat{\varphi})\} \geq \alpha.$$

Доверительный интервал с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ , построен.

Примеры. Воспользуемся этой общей методикой для решения задач, постановки которых были даны в примерах 1 и 2.

Для случая примера 1 в качестве несмещенной оценки для  $\varphi_T(\mu, \sigma)$  возьмем найденную А. Н. Колмогоровым [12] несмещенную оценку

$$\hat{\varphi}(x, S) = 1 - F\left(\frac{T-x}{\sqrt{NS}}\right), \quad (3.5.16)$$

где

$$F(y) = \int_{-\infty}^y f_N(t) dt;$$

$$f_N(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{N-1}{2}\right)}{\sqrt{2\pi}\Gamma\left(\frac{N-2}{2}\right)\sqrt{N-1}} \left(1 - \frac{t^2}{N-1}\right)^{\frac{N-3}{2}},$$

если  $|t| \leq \sqrt{N-1}$ ;  $f_N(t) = 0$ , если  $|t| > \sqrt{N-1}$ . Так как  $F(y)$  — монотонная функция от  $y$ , то из (3.5.16) следует, что оценка  $\hat{\varphi}(\bar{x}, S)$  является также монотонной функцией от значений статистики  $\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$ . Поэтому доверительные интервалы, построенные исходя из оценки  $\hat{\varphi}(\bar{x}, S)$ , или статистики  $\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$  совпадают, и мы можем вместо статистики  $\hat{\varphi}$  взять  $\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$ . Действительно,

если использовать метод уровней с числами  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ , то соответствующие множества  $H(\hat{\varphi}(\bar{x}, S))$  и  $H'\left(\frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}\right)$  совпадают. Числитель и знаменатель статистики  $\hat{\varphi} = \frac{T-\bar{x}}{S}\sqrt{N}$  являются взаимно независимыми случайными величинами. При этом  $\frac{T-\bar{x}}{\sigma}\sqrt{N}$  имеет нормальное распределение со средним  $\delta = \frac{T-\mu}{\sigma}\sqrt{N}$

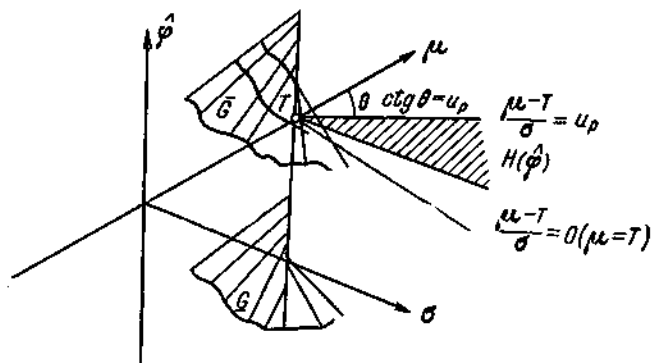


Рис. 3.5.2.

и единичной дисперсией, а  $\frac{S^2}{\sigma^2}$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $(N-1)$ -й степенью свободы. Таким образом, статистика  $\hat{\varphi}$  имеет нецентральное распределение Стьюдента (см. § 1.6) с параметром  $\delta = \frac{T-\mu}{\sigma}\sqrt{N}$  и  $(N-1)$ -м числом степеней свободы. Обозначим через  $p$  вероятность отсутствия отказов в интервале  $(0, T)$ ;  $p = 1 - \Phi\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)$ , поэтому, используя обычные обозначения и формулу для квантилей нормального распределения, получаем, что на всех точках полу-прямой ( $\sigma > 0$ )

$$\frac{\mu - T}{\sigma} = u_p \quad (3.5.17)$$

значения иско́мой вероятности равны  $p$ . Для разных значений  $0 \leq p \leq 1$  полупрямые образуют пучок, исходящий из точки  $(0, T)$ . В частности, полупрямой  $T = \mu, \sigma \geq 0$  соответствует значение  $p = 0,5$ . Полупрямым с углом наклона  $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ ,  $\text{ctg } \theta = u_p$  (рис. 3.5.2) соответствуют значения  $p > 0,5$ . Множества  $G(\theta), \theta = (\mu, \sigma)$

полагаются равными интервалам  $(\underline{y}, \bar{y})$ , где  $F_{N-1}(\bar{y}, \delta) = 1 - \varepsilon_1$ ,  $F_{N-1}(\underline{y}, \delta) = \varepsilon_2$ ,  $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ , а  $F_{N-1}(\bar{y}, \delta)$  — функция распределения смещенного закона Стьюдента с  $(N-1)$ -й степенью свободы и смещением, равным  $\delta$ . При этом значения  $\underline{y}$ ,  $\bar{y}$  одинаковы вдоль полупрямых  $\frac{T-\mu}{\sigma} \sqrt{N} = \delta = \text{const}$ , поэтому множество  $\mathfrak{F}$  является совокупностью точек, лежащих между двумя линейчатыми поверхностями  $\bar{G}$  и  $G$  (см. рис. 3.5.2). Пусть известно значение статистики  $\hat{\varphi} = \frac{T-\bar{x}}{S} \sqrt{N}$ ; тогда множество  $H(\hat{\varphi}) \subset \Omega$  состоит из таких точек  $\theta = (\mu, \sigma)$ , для которых  $\bar{\delta}(\hat{\varphi}) < \delta = \frac{T-\mu}{\sigma} \sqrt{N} < \underline{\delta}(\hat{\varphi})$ , где  $\underline{\delta}(\hat{\varphi})$  и  $\bar{\delta}(\hat{\varphi})$  находятся как решения уравнений

$$F_{N-1}(\hat{\varphi}, \bar{\delta}(\hat{\varphi})) = 1 - \varepsilon_1, \quad F_{N-1}(\hat{\varphi}, \underline{\delta}(\hat{\varphi})) = \varepsilon_2. \quad (3.5.18)$$

Для решения этих уравнений можно составить соответствующие таблицы. Таким образом, границами множества  $H(\hat{\varphi})$  являются два луча

$$\frac{\mu - T}{\sigma} = -\frac{\underline{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}, \quad \frac{\mu - T}{\sigma} = -\frac{\bar{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}. \quad (3.5.19)$$

Заметим, что  $-\frac{\delta \hat{\varphi}}{\sqrt{N}} < -\frac{\bar{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}$ . Поэтому из (3.5.17) получаем, что значения  $\underline{p}(\hat{\varphi})$  и  $\bar{p}(\hat{\varphi})$  находятся из уравнений

$$u_{\bar{p}}(\hat{\varphi}) = -\frac{\bar{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}, \quad u_{\underline{p}}(\hat{\varphi}) = -\frac{\underline{\delta}(\hat{\varphi})}{\sqrt{N}}. \quad (3.5.20)$$

В нашем случае события  $\{\underline{p}(\hat{\varphi}) < p < \bar{p}(\hat{\varphi})\}$  и  $\{\theta \in H(\hat{\varphi})\}$  эквивалентны, поэтому

$$\mathbf{P}\{\underline{p}(\hat{\varphi}) < p < \bar{p}(\hat{\varphi})\} = \mathbf{P}\{\theta \in H(\hat{\varphi})\} = \alpha. \quad (3.5.21)$$

Итак, доверительный интервал  $(\underline{p}, \bar{p})$  строится в два этапа. Сначала из уравнений (3.5.18) подсчитываются значения границ доверительного интервала для смещения  $\delta$ , а затем, исходя из (3.5.20), по таблице квантилей нормального закона (см. таблицу 3 приложения) находятся искомые значения  $\underline{p}$  и  $\bar{p}$ .

Для задачи, сформулированной во втором примере, мы сможем получить точный ответ в явном виде только для одного частного



случая, когда в результате испытаний по планам  $[N_i, B, T]$  отказы не наблюдались, т. е.  $d_i(T) = 0$ . Решение задачи в этом частном случае было впервые найдено Р. А. Мирным. Первоначально ответ показался авторам книги настолько неожиданным, что они сочли его, вообще неверным.

Так как несмещенными оценками для вероятностей безотказной работы  $R_i(T)$  являются отношения  $\frac{N_i - d_i(T)}{N_i}$ , то состоятельной оценкой для  $R(T)$ , задаваемой формулой (3.5.1), является

формула (3.5.1), является

$$\hat{\varphi} = \prod_{i=1}^N \left[ 1 - \left( \frac{N_i - d_i(T)}{N_i} \right)^{k_i} \right]; \quad (3.5.22)$$

$\hat{\varphi}$  принимает конечное число значений. Перенумеруем эти значения в порядке их убывания  $r_1 = 1 > r_2 > r_3 > \dots$ . Пространство  $\mathcal{G}$  состоит из точек  $(\theta, x)$ , где  $\theta = (p_1, \dots, p_N)$ ,  $x = r_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ . Пусть  $r(\alpha, \theta)$  — наименьшее из

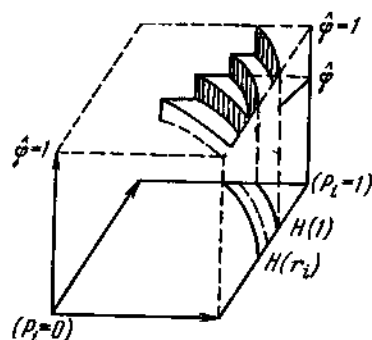


Рис. 3.5.3.

чисел  $r_i$ , удовлетворяющих условию

$$\mathbf{P} \{ \hat{\varphi} \leq r(\alpha, \theta) \} \geq \alpha; \quad (3.5.23)$$

тогда в качестве множества  $G(\theta)$  возьмем набор всех значений  $r_i \leq r(\alpha, \theta)$ . Функция  $r(\alpha, \theta)$  имеет вид ступенчатой функции, примерный вид которой показан на рис. 3.5.3. Расписывая (3.5.23), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \hat{\varphi} \leq r(\alpha, \theta) \} &= 1 - \sum_{r_i > r(\alpha, \theta)} \mathbf{P} \{ \hat{\varphi} = r_i \} = \\ &= 1 - \sum' \mathbf{P} \{ d_i = l_i, i = 1, \dots, N \} = 1 - \sum' \prod C_N^{l_i} (1 - P_i)^{l_i} P_i^{N-l_i}, \end{aligned}$$

где сумма  $\sum'$  берется по всем векторам  $(l_1, \dots, l_N)$  таким, что значения оценки  $\hat{\varphi}$  в формуле (3.5.22) равны числам  $r_i > r(\alpha, \theta)$ . Множество  $H(\hat{\varphi})$  состоит из точек  $\theta = (p_1, \dots, p_N)$ , удовлетворяющих условиям  $0 \leq p_i \leq 1$  и условию

$$\sum'' \prod_{i=1}^N C_N^{l_i} (1 - P_i)^{l_i} P_i^{N-l_i} > 1 - \alpha, \quad (3.5.24)$$

где  $\sum''$  берется по всем векторам  $(l_1, \dots, l_N)$  таким, что значения оценки в формуле (3.5.22), где надо положить  $d_i(T) = l_i$ , равны числам  $r_i$ . При этом  $r_i$  не меньше полученного значения  $\hat{\varphi}$  по фор-

муле (3.5.22), исходя из данных испытаний. Так как функция  $\varphi(\theta) = R(T)$ , определяемая по формуле (3.5.1), является монотонно возрастающей функцией аргументов  $P_i$ , то  $\varphi(\hat{\varphi}) = \inf \varphi(\theta)$  достигается на границе области  $H(\hat{\varphi})$ , которая задается, исходя из (3.5.24), уравнением

$$\sum^n \prod_{i=1}^N C_N^{k_i} (1 - P_i)^{k_i} P_i^{N - k_i} = 1 - \alpha, \quad (3.5.25)$$

где  $0 \leq P_i \leq 1$ .

Итак, задача построения нижнего доверительного интервала  $(\varphi(\hat{\varphi}), 1)$  с коэффициентом доверия, не меньшим  $\alpha$ , сведена к задаче отыскания минимума функции  $\varphi(\theta) = R(T)$  на гиперповерхности, задаваемой уравнением (3.5.25). В том частном случае, когда система состоит из  $N$  различных блоков (все  $k_{i\lambda} = 1$ ), а отказы при испытаниях не наблюдаются (все  $d_i(T) = 0$ ),  $\hat{\varphi} = 1$  и  $\sum^n$  содержит только один член. Уравнение (3.5.25) переписывается в виде

$$\prod_{i=1}^N P_i^{N_i} = 1 - \alpha. \quad (3.5.26)$$

Можно показать, что нижняя граница  $\varphi$  функции

$$\varphi(\theta) = R(T) = \prod_{i=1}^N P_i \quad (3.5.27)$$

при условии (3.5.26) равна  $(1 - \alpha)^\infty$ ,  $\infty = \max_{1 \leq i \leq N} \frac{1}{N_i}$ . Учитывая, что при отсутствии отказов у  $N$  испытываемых элементов нижний доверительный интервал  $(\varphi, 1)$  с коэффициентом доверия  $\alpha$  опреде-

ляется из соотношения  $\varphi = (1 - \alpha)^{\frac{1}{N}}$ , мы можем полученный результат сформулировать в следующем виде.

Если известно, что в результате испытаний элементов различных типов, проводимых по планам  $[N_i, B, T]$ , отказы не наблюдались, то нижняя доверительная граница для вероятности безотказной работы системы в течение времени  $T$ , определяемой по формуле (3.5.27), с коэффициентом доверия  $\alpha$  равна нижней доверительной границе с тем же коэффициентом доверия, подсчитанной для элементов  $i$ -го типа, у которых число  $N_i = \min(N_1, \dots, N_n)$ .

Доверительные множества. В заключение параграфа сделаем несколько кратких замечаний, относящихся к методике построения так называемых доверительных множеств, которые можно использовать для одномерной оценки нескольких неизвестных параметров. Общая постановка задачи аналогична только что

рассмотренной задаче построения доверительного интервала для  $\Phi(\theta_1, \dots, \theta_N)$ . Мы предполагаем, что имеется пространство  $X = \{x\}$ , точки которого соответствуют результатам испытаний. На этом пространстве задано семейство вероятностных мер  $P_\theta$ , зависящих от значений векторного параметра  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_N) \in \Omega$ , где  $\Omega$  — множество всех возможных значений параметра  $\theta$ . Если каждому значению  $x \in X$  поставлено в соответствие подмножество  $H(x)$  такое, что

$$P_\theta \{\theta \in H(x)\} \geq \alpha, \quad (3.5.28)$$

то подмножества  $H(x)$  называются *доверительными множествами*. Если неравенства (3.5.28) нельзя усилить, увеличив  $\alpha$ , то  $\alpha$  называется *коэффициентом доверия* доверительного множества  $H(x)$ ; в противном случае говорят, что коэффициент доверия *не хуже*  $\alpha$ . Сопоставим теперь каждому значению  $\theta \in \Omega$  такое множество  $G(\theta) \subseteq X$ , что

$$P_\theta \{x \in G(\theta)\} \geq \alpha. \quad (3.5.29)$$

Фиксируем значение  $x$  и определим множество  $H(x)$  как совокупность всех точек  $\theta$ , для которых  $x \in G(\theta)$ . События  $\{x \in G(\theta)\}$  и  $\{\theta \in H(x)\}$  являются эквивалентными, так как каждое из них влечет за собой другое, поэтому вероятности этих событий совпадают. Учитывая (3.5.29), получаем, что для построенных множеств  $H(x)$  выполнены неравенства (3.5.28). При этом, если хотя бы для одного значения  $\theta$  неравенство (3.5.29) обращается в равенство, то при этом же значении  $\theta$  обращается в равенство и (3.5.28); поэтому в данном случае  $\alpha$  является коэффициентом доверия для множеств  $H(x)$ .

Проиллюстрируем изложенный общий метод построения доверительных множеств на простом примере. Предположим, что функция распределения  $F(t)$  для момента отказа имеет нормальное распределение с неизвестным значением среднего  $\mu$  и дисперсии  $\sigma^2$ . Испытания проводятся по плану  $[N, B, N]$ . Достаточными статистиками являются

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N t_i, \quad s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (t_i - \bar{x})^2,$$

где  $t_i$  — моменты отказов. В качестве пространства  $X$  выбираем множество точек плоскости  $(\bar{x}, s)$ ,  $-\infty < \bar{x} < +\infty$ ,  $s \geq 0$ ;  $\Omega$  является множеством точек  $\theta = (\mu, \sigma)$ ,  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma > 0$ . Пусть  $\alpha_1, \alpha_2$  — такие положительные числа, что заданный коэффициент доверия  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$ .

Если теперь каждой точке  $\theta = (\mu, \sigma)$  (см. рис. 3.5.4) мы сопоставим множества  $G(\theta)$ , являющиеся прямоугольниками  $x_1 < \bar{x} < x_2$ ,

$s_1 < s < s_2$ , где  $x_i, s_i$  находятся из условий

$$P_{\theta} \{x_1 < \bar{x} < x_2\} = \alpha_1, \quad P_{\theta} \{s_1 < s < s_2\} = \alpha_2,$$

то, учитывая взаимную независимость  $\bar{x}$  и  $s$ , получаем

$$P \{(\bar{x}, s) \in G(\theta)\} = P \{x_1 < \bar{x} < x_2\} P \{s_1 < s < s_2\} = \alpha_1 \alpha_2 = \alpha. \quad (3.5.30)$$

$\bar{x}$  имеет нормальное распределение со средним  $\mu$  и дисперсией

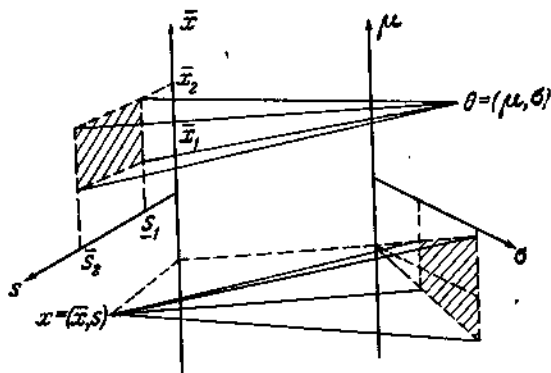


Рис. 3.5.4.

$\frac{\sigma^2}{\pi} ; \frac{s^2(N-1)}{\sigma^2}$  имеет  $\chi^2$ -распределение с  $(N-1)$ -й степенью свободы, поэтому

$$P_{\theta} \left\{ -u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} < \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma} \sqrt{N} < u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \right\} = \\ = P_{\theta} \left\{ \mu - u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \bar{x} < \mu + u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right\} = \alpha_1,$$

$$P_{\theta} \left\{ \chi_{\frac{1-\alpha_2}{2}}^2 (N-1) < \frac{s^2(N-1)}{\sigma^2} < \chi_{\frac{1+\alpha_2}{2}}^2 (N-1) \right\} = \\ = P_{\theta} \left\{ \sqrt{\frac{\chi_{\frac{1-\alpha_2}{2}}^2 (N-1)}{N-1}} \sigma < s < \sqrt{\frac{\chi_{\frac{1+\alpha_2}{2}}^2 (N-1)}{N-1}} \sigma \right\} = \alpha_2.$$

Следовательно, прямоугольник  $G(\theta)$  определяется неравенствами

$$\left. \begin{aligned} \mu - u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \bar{x} < \mu + u_{\frac{1+\alpha_1}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \\ \sqrt{\frac{\chi_{\frac{1-\alpha_2}{2}}^2 (N-1)}{N-1}} \sigma < s < \sqrt{\frac{\chi_{\frac{1+\alpha_2}{2}}^2 (N-1)}{N-1}} \sigma. \end{aligned} \right\} \quad (3.5.31)$$

Разрешая неравенства (3.5.31) относительно  $\mu$  и  $\sigma$ , мы получаем искомые доверительные множества  $H(x)$  с коэффициентом доверия  $\alpha$ , имеющие вид трапеций, принадлежность точек  $(\mu, \sigma)$  к которым определяется неравенствами

$$\begin{aligned} \bar{x} - \frac{u_{1+\alpha_1}}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} < \mu < x + \frac{u_{1+\alpha_1}}{2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \\ s \sqrt{\frac{N-1}{\frac{\chi_{1+\alpha_2}^2}{2}(N-1)}} < \sigma < s \sqrt{\frac{N-1}{\frac{\chi_{1-\alpha_2}^2}{2}(N-1)}}. \end{aligned}$$

С помощью изложенных выше общих методов можно строить различные системы доверительных интервалов и множеств. Так, например, каждой оценке  $\hat{\varphi}$  будет соответствовать своя система доверительных интервалов. Мы скажем, что система доверительных интервалов  $C_1 = \{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x)), \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x))\}$  (доверительных множеств  $\{H_1(x)\}$ ) предпочтительней системы  $C_2 = \{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x)), \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x))\}$ , ( $\{H_2(x)\}$ ), если для каждого значения  $x \in H$

$$\begin{aligned} \underline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x)) \leq \underline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x)), \quad \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_1(x)) \leq \overline{\varphi}(\hat{\varphi}_2(x)), \\ H_1(x) \subseteq H_2(x), \end{aligned}$$

где для хотя бы одного значения  $x$  имеют место строгие неравенства ( $H_1(x) \subset H_2(x)$  и  $H_2(x)$  и  $H_1(x)$  не пустые), а коэффициенты доверия  $\alpha$  у обеих систем совпадают. Систему доверительных интервалов  $C = \{\underline{\varphi}(\hat{\varphi}(x)), \overline{\varphi}(\hat{\varphi}(x))\}$  (доверительных множеств  $H(x)$ ) назовем *допустимой*, если нет более предпочтительной системы интервалов. Встает задача построения критериев определения допустимости для заданной системы доверительных интервалов (множеств). Если имеются две допустимые системы доверительных интервалов (множеств)  $C_1$  и  $C_2$ , коэффициенты доверия которых одинаковы, то их можно сравнивать с помощью различных вероятностных характеристик, например с помощью средней длины доверительного интервала (в случае доверительных множеств — с помощью средней длины диаметра доверительного множества и т. д.). Если вероятностный показатель качества систем доверительных интервалов (множеств) выбран, то встает задача отыскания такой допустимой системы, у которой этот показатель является наилучшим. Таким образом, открывается обширное поле деятельности, результаты которой могут найти широкое применение, в частности в области теории надежности. Желание привлечь внимание к этим вопросам главным образом математиков и является основной целью настоящего параграфа, в котором лишь намечены некоторые возможные направления исследований.

## ГЛАВА 4

### ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ О НАДЕЖНОСТИ

#### § 4.1. Общие положения теории проверки статистических гипотез

**Основные понятия.** В главе, посвященной проверке гипотез о надежности испытываемых элементов, настоящий параграф играет вспомогательную роль. В нем без доказательств, но со ссылками на доступные источники даны формулировки ряда теорем, которые будут нами использованы в последующих параграфах.

Исходными понятиями теории проверки статистических гипотез являются понятия *основной* и *конкурирующей* гипотез. Для простоты изложения мы предположим, что пространство  $X = \{x\}$  исходов испытаний не зависит от того, какие будут приниматься решения. Допущение, что исход испытаний является случайным, эквивалентно предположению, что в пространстве  $X$  существует распределение вероятностей  $P$ , в соответствии с которым возникает тот или иной исход испытаний. В большинстве случаев вид  $P$  неизвестен, известно лишь, что  $P$  принадлежит некоторому классу распределений вероятностей. Обозначим этот класс через  $\mathfrak{f}$ , входящие в него распределения вероятностей — через  $P_\theta$ , где  $\theta$  — параметр<sup>1)</sup>, с помощью которого различаются распределения, и через  $\Omega$  множество возможных значений параметра  $\theta$ .

Таким образом, утверждение  $P_\theta \in \mathfrak{f}$  эквивалентно утверждению  $\theta \in \Omega$ . Например, если испытания проводятся по плану  $\{N, B, N\}$ , то пространство исходов испытаний  $X = \{x\}$  состоит из точек  $N$ -мерного пространства  $x = (x_1, \dots, x_N)$ , где  $x_i$  — момент отказа  $i$ -го элемента. Допустим, что отказы взаимно независимы и имеют логарифмически нормальное распределение с неизвестными параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$  (см. гл. 1). Тогда семейство  $\mathfrak{f}$  вероятностей распределений

---

<sup>1)</sup> Вообще говоря,  $\theta$  является вектором. Так, для нормального распределения  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ .

задается плотностями вида

$$p_{\theta}(x) = \prod_{i=1}^N \frac{1}{\sqrt{2\pi} x_i \sigma} e^{-\frac{(\ln x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \quad (4.1.1)$$

Роль параметра играют пары  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ ,  $-\infty < \mu < +\infty$ ,  $\sigma^2 > 0$ .

Таким образом, множество значений параметров, или пространство параметров  $\Omega$ , состоит в рассматриваемом примере из точек полуплоскости  $(\mu, \sigma^2)$ :  $-\infty < \mu < \infty$ ,  $\sigma^2 \geq 0$ . Пространство параметров  $\Omega$  может иметь весьма сложное строение. Так будет в тех случаях, когда класс  $\mathfrak{F}$  может включать распределения вероятностей многих типов.

*Гипотезой  $H$*  называется любое утверждение о виде распределения вероятностей  $P_{\theta}$ . Если сформулирована гипотеза, то класс всех возможных распределений вероятностей разбивается на два подкласса. В один подкласс входят распределения  $P_{\theta}$ , обладающие свойством, сформулированным в гипотезе, а в другой — не обладающие этим свойством. Таким образом, пространство значений параметров  $\Omega$  разбивается на два непересекающихся подмножества  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$ ,  $\Omega = \Omega_0 \cup \Omega_1$ . Гипотезу  $H_0$  условимся называть *исходной* или *основной*, а дополнительную к ней гипотезу  $H_1$  — *конкурирующей*. Могут, конечно, встретиться и задачи, в которых формулируются несколько взаимно исключающих друг друга гипотез. Мы в основном ограничимся только случаем проверки двух гипотез  $H_0$  и  $H_1$ . В приведенном выше примере испытаний  $N$  элементов с логарифмически нормальным распределением времени безотказной работы можно сформулировать ряд гипотез. Например, исходная гипотеза  $H_0$  может состоять в том, что  $\mu_1 < \mu_0$ ,  $\sigma^2$  — любое. В этом случае конкурирующая гипотеза  $H_1$  соответствует значениям параметров  $\mu \geq \mu_0$ ,  $\sigma^2 > 0$  (рис. 4.1.1, б).

После того как описаны пространство возможных исходов испытаний  $X = \{x\}$ , класс  $\mathfrak{F}$  распределений вероятностей и сформулированы гипотезы, ставится задача построения *критерия*, проверяющего согласованность исходов опыта с одной из гипотез.

Под критерием понимают систему правил обработки исхода испытаний, на основании которой принимается (лучше даже говорить проверяется) одна из гипотез, а остальные отвергаются. Если значение  $x$  известно, то для большинства критериев принимается определенная гипотеза  $H_i$ ,  $i = i(x)$ . Такие критерии называются *нерандомизированными*. Нерандомизированный критерий определяется заданием *критического* множества  $X_{кр}$ , являющегося частью пространства  $X$  исходов испытаний. Если исход испытаний  $x \in X_{кр}$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается, если же  $x \in \bar{X}_{кр}$  ( $\bar{E}$  — «не принадлежит»), то гипотеза  $H_0$  принимается. В некоторых случаях оказывается полезным рассматривать критерии, в которых  $i(x)$  является

случайной величиной при фиксированном  $x$ . Такие критерии называются *рандомизированными*.

Примеры критериев. Вид используемых критериев существенным образом зависит от класса  $\mathfrak{F}$  и гипотез  $H_i$ . Довольно четко выделяются две большие группы задач. В первую группу входят задачи, связанные с проверкой вида семейства распределений, которыми описываются вероятности безотказной работы. Типичными здесь являются задачи такого содержания: «проверить гипотезу  $H_0$ , состоящую в том, что вероятность безотказной работы соответствует логарифмически нормальному распределению» и т. д. Таким образом, здесь нулевую гипотезу составляет

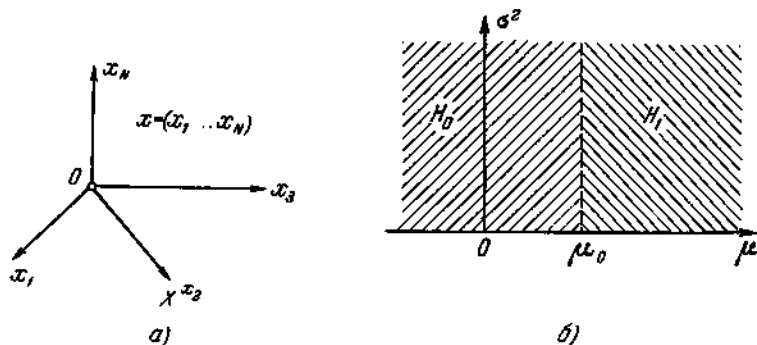


Рис. 4.1.1.

целый класс распределений. Роль конкурирующих гипотез также выполняют классы распределений. Во вторую группу входят задачи, связанные с проверкой конкретных значений параметров, определяющих распределения. Здесь предполагается, что вид распределения, принадлежность его к некоторому семейству уже заданы и требуется только проверить значения параметров. Задача, соответствующая рис. 4.1.1б, относится ко второй группе. Тому частному случаю, когда проверяется гипотеза об экспоненциальности вероятности безотказной работы, посвящается целиком § 4.2. Рассмотренные в нем задачи относятся к первой группе. В §§ 4.3 и 4.4 рассмотрены критерии проверки гипотез о значениях параметров экспоненциального распределения. Это типичные примеры задач второго типа.

В большинстве задач первой группы постулатом следующим образом. Старается найти такую статистику  $S(x)$ , т. е. функцию от исхода испытания, распределение которой оставалось бы неизменным для любого значения параметра  $\theta \in \Omega_0$ , входящего в исходную гипотезу. В критическое множество  $X_{кр}$  включают те точки



$x$ , для которых  $|S(x)| > S_\alpha$ . Значение  $S_\alpha$  находится из условия

$$P_\theta(|S(x)| > S_\alpha) \leq \alpha, \quad (4.1.2)$$

где  $\theta \in \Omega_0$ . Поскольку распределение  $S(x)$ , если гипотеза верна, не зависит от параметра  $\theta$ , индекс  $\theta$  в левой части неравенства можно было бы не писать. Число  $\alpha$  можно трактовать как вероятность ложного отвержения гипотезы  $H_0$ , когда она верна. Приведем несколько примеров критериев первого типа.

Критерий  $\chi^2$ .

а) *Непараметрический случай*. Допустим, что исходами опыта могут быть только события  $A_1, \dots, A_r$ , вероятности которых равны  $p_1, \dots, p_r$ ,  $\sum_{i=1}^r p_i = 1$ ,  $p_i > 0$ . Если в результате  $N$  независимых опытов событие  $A_i$  осуществлялось  $N_i$  раз, то статистика

$$T(N_1, \dots, N_r) = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - Np_i)^2}{Np_i} \quad (4.1.3)$$

при больших  $N$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $(r-1)$ -й степенью свободы. Это означает, что

$$P\{T < \chi_p^2(r-1)\} \approx p, \quad (4.1.4)$$

где  $\chi_p^2(n)$  находится из условия

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi_p^2(n)} e^{-\frac{t}{2}} t^{\frac{n}{2}-1} dt = p. \quad (4.1.5)$$

В таблице 4 приложения даны значения  $\chi_p^2(n)$ , когда  $1-p = 0,001; 0,01; 0,05; 0,1 (0,1) 0,9; n = 1 (1) 30$ . Таким образом, исходная гипотеза  $H_0$ , состоящая в том, что вероятности событий  $A_i$  равны заданным числам  $p_i$ , принимается, когда  $T(N_1, \dots, N_r) < \chi_{1-\alpha}^2(r-1)$ , и отвергается в противном случае. Вероятность ошибки первого рода приближенно равна  $\alpha$ .

б) *Параметрический случай*. Постановка задачи та же, что и в непараметрическом случае, только предполагается, что вероятности  $p_i = p_i(\theta_1, \dots, \theta_s)$ ,  $s < r-1$ , где  $\theta_1, \dots, \theta_s$  — неизвестные значения параметров. Пусть  $\hat{\theta}_i$  — оценки, которые получаются в результате решения уравнений

$$\frac{\partial T(N_1 \dots N_r)}{\partial \theta_i} = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (4.1.6)$$

где  $T(N_1, \dots, N_r)$  находится по формуле (4.1.3). Введем обозначения  $\hat{p}_i = p_i(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_s)$ . Тогда статистика

$$\hat{T}(N_1, \dots, N_r) = \sum_{i=1}^r \frac{(N_i - N\hat{p}_i)^2}{N\hat{p}_i} \quad (4.1.7)$$

имеет  $\chi^2$ -распределение с  $(r-s-1)$ -й степенью свободы. Таким образом, исходная гипотеза  $H_0$ , состоящая в том, что  $p_i = p_i(\theta_1, \dots, \theta_s)$ , принимается тогда и только тогда, когда  $\hat{T}(N_1, \dots, N_r) < \chi_{1-\alpha}^2(r-s-1)$ , где  $\alpha$  — вероятность ошибки первого рода.

Критерий  $\chi^2$  подробно описан во многих учебниках по математической статистике (см. [6]). Некоторые случаи испытаний на надежность могут быть сведены к полиномиальной схеме, лежащей в основе критерия  $\chi^2$ . Предположим, что испытываются  $N$  элементов, замена отказавших элементов не производится, испытания проводятся до момента  $T$ ; в наших обозначениях этот случай соответствует использованию плана типа  $[N, B, T]$ . Разобьем интервал  $(0, T)$  на  $r-1$  интервалов  $\Delta_1 = [0, T_1]$ ,  $\Delta_2 = [T_1, T_2]$ , ...,  $\Delta_{r-1} = [T_{r-2}, T_{r-1}]$ , где  $T_{r-1} = T$ , а  $r$ -й интервал положим равным  $\Delta_r = [T_{r-1}, +\infty)$ . Если обозначить через  $A_i$  событие, состоящее в том, что отказ элемента произошел в интервале  $\Delta_i$ , а через  $N_i$  — число элементов, отказавших в интервале  $\Delta_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ , то мы приходим к описанной выше полиномиальной схеме.

*F*-критерий Фишера.

Если  $\xi_1, \xi_2$  — две взаимно независимые случайные величины, плотности которых имеют вид

$$p_i(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ \frac{\beta_i^{\alpha_i} x^{\alpha_i-1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta_i x}, & x > 0, \quad i = 1, 2, \end{cases} \quad (4.1.8)$$

то функция распределения случайной величины  $\zeta = \frac{\xi_1}{\xi_2}$  легко выражается через неполную В-функцию [4]

$$J(x, r, s) = \frac{\Gamma(r+s)}{\Gamma(r)\Gamma(s)} \int_0^x z^{r-1} (1-z)^{s-1} dz.$$

Можно показать, что

$$P \left\{ \frac{\xi_1}{\xi_2} \leq z \right\} = J \left( \frac{\beta_1 z}{\beta_1 z + \beta_2}, \alpha_1, \alpha_2 \right). \quad (4.1.9)$$

Функция вида (4.1.9) называется *функцией распределения Фишера*

с  $n_1, n_2$  степенями свободы, если  $\alpha_1 = \beta_1 = \frac{n_1}{2}$ ,  $\alpha_2 = \beta_2 = \frac{n_2}{2}$ . В приложении даны значения квантилей распределения Фишера с четным числом степеней свободы  $f_{0,995}(n_1, n_2)$  и  $f_{0,99}(n_1, n_2)$

$$P \left\{ \xi = \frac{r_k}{k_r} < f_{0,995}(n_1, n_2) \right\} = 0,995. \quad (4.1.10)$$

$F$ -критерий применяют в тех случаях, когда найдется такая статистика  $S(x)$ , распределение которой для всех значений  $\theta$ , составляющих исходную гипотезу  $H_0$ , совпадает с распределением Фишера с  $n_1, n_2$  степенями свободы. Из формулы (4.1.9) легко вывести, что  $f_p(n_1, n_2) = f_{1-p}^{-1}(n_2, n_1)$ . Таким образом, событие, состоящее в том, что

$$\left\{ f_{\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) < S(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2) \right\} \quad (4.1.11)$$

эквивалентно событию

$$\left\{ \begin{array}{l} S(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2), \\ S^{-1}(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1). \end{array} \right. \quad (4.1.12)$$

Таким образом, вероятности событий (4.1.11) и (4.1.12) совпадают и равны  $1 - \alpha$ , когда справедлива гипотеза  $H_0$ . Формула (4.1.12) позволяет использовать таблицы только со значениями  $f_p(n_1, n_2)$ , где  $p$  близко к единице.

Использование критерия Фишера проводится по следующей схеме. Вычисляется статистика  $S(x)$ , имеющая  $F$ -распределение с  $n_1, n_2$  степенями свободы, когда верна гипотеза  $H_0$ . Но принимается тогда и только тогда, когда  $S(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1, n_2)$  и  $S^{-1}(x) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_2, n_1)$ . При этом ошибка первого рода равна  $\alpha$ .

Пример на использование  $F$ -критерия приведен в § 4.2.

Для критериев, аналогичных критериям  $\chi^2$  и  $F$ , характерно отсутствие описания конкурирующих гипотез. Эти критерии обеспечивают заданную величину вероятности ошибки первого рода, но надо быть уверенным, что малы вероятности ложного решения о справедливости гипотезы  $H_0$ , когда она неверна. Всегда существуют такие конкурирующие гипотезы, на которые используемый критерий не реагирует в том смысле, что с большой вероятностью принимается исходная гипотеза  $H_0$ , тогда как она неверна. За примером подобного рода для случая использования критерия Вилкоксона мы отсылаем читателя к материалу, изложенному в § 4.5.

Критерий А. Н. Колмогорова проверки типа распределения по малым выборкам.

Для получения достаточно достоверных результатов о виде закона распределения времени безотказной работы требуется, как правило, испытывать большое количество однотипных элементов. На практике могут встретиться такие случаи, когда испытания проводятся только небольшими группами. Такие испытания часто разделены большими интервалами времени, вследствие чего трудно ожидать, что вероятности безотказной работы у различных групп элементов будут совпадать. Сделать достоверный вывод о принадлежности распределений вероятностей безотказной работы одной группы элементов к определенному типу семейств законов распределения нельзя, так как объем группы невелик. Тем не менее, используя излагаемый ниже прием, предложенный А. Н. Колмогоровым, можно с большой степенью достоверности проверить принадлежность групп элементов к одному типу семейств законов распределения. В основе критерия лежит элементарная

Лемма 4.1.1. *Если случайная величина  $\xi$  имеет непрерывную функцию распределения  $F(t) = P\{\xi < t\}$ , то случайная величина  $\eta = F(\xi)$  имеет равномерное распределение в интервале  $[0, 1]$ .*

Доказательство следует из соотношений

$$P\{\eta < x\} = P\{\xi < F^{-1}(x)\} = F\{F^{-1}(x)\} = x,$$

где  $F^{-1}(x)$  — обратная функция для  $F(t)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ .

Критерий Колмогорова проверки по малым выборкам можно использовать только в том случае, когда существует такая статистика  $S(x_i)$ , где  $x_i$  — исход испытания  $i$ -й группы, распределение  $F_{s,i}(t)$  которой не зависит от конкретных значений параметров, определяющих функцию распределения вероятностей безотказной работы. Предполагается при этом, что верна исходная гипотеза  $H_0$ , состоящая в том, что функция распределения времени безотказной работы элементов входит в заданное семейство. Используя лемму 4.1.1, получаем, что случайные величины

$$F_{s,1}(S(x_1)), \dots, F_{s,k}(S(x_k)) \quad (4.1.13)$$

являются взаимно независимыми, равномерно распределенными в интервале  $[0, 1]$ , если только верна гипотеза  $H_0$ . Здесь  $k$  — число групп испытываемых элементов. Задача проверки гипотезы  $H_0$  свелась к совсем простой стандартной задаче проверки гипотезы о том, что  $k$  случайных точек равномерно распределены в интервале  $[0, 1]$ .

Этот прием можно использовать, например, для проверки гипотезы о показателем виде вероятности безотказной работы по результатам периодических испытаний на надежность небольших групп элементов. Предположим, что испытания  $i$ -й группы

проводятся по плану  $[N_i, B, r_i]$ ,  $r_i \geq 2$ ,  $i=1, \dots, k$ . Пусть  $r_i = r'_i + r''_i$ ,  $r'_i r''_i > 0$ ,  $S_{B,i}, S''_{B,i}$ , величины суммарной наработки в интервалах  $(0, t_{r'_i})$  и  $(t_{r'_i}, t_{r_i})$ . Используем тот факт, что случайные величины  $(N - k + 1)(t_k - t_{k-1})$  взаимно независимы и имеют плотности вида  $\lambda e^{-\lambda t}$ , легко показать, что статистики

$$S_i = S_i(t_1, \dots, t_{r_i}) = \frac{r'_i S'_{B,i}}{r'_i S''_{B,i}} \quad (4.1.14)$$

имеют  $F$ -распределение с числом степеней свободы, равным  $2r'_i$ ,  $2r''_i$  и не зависят от величины параметра  $\lambda$ . Все эти утверждения справедливы только в том случае, когда верна гипотеза  $H_0$ , т. е. когда вероятности безотказной работы в  $i$ -й группе равны  $R_i(t) = e^{-\lambda t}$ . Если обозначить через  $F_{n_1, n_2}(x)$  функцию распределения Фишера с  $n_1, n_2$  степенями свободы, то для проверки исходной гипотезы  $H_0$  нужно проверить, что случайные величины

$$F_{2r'_1, 2r''_1}(S_1), \dots, F_{2r'_k, 2r''_k}(S_k)$$

взаимно независимы и равномерно распределены в интервале  $[0, 1]$ .

Функция мощности критерия. Важнейшей числовой характеристикой критерия является *функция мощности*  $W(\theta)$ . Функция мощности равна вероятности отвергнуть исходную гипотезу  $H_0$ , когда значение параметра, определяющего вид распределения вероятностей в пространстве исходов испытаний  $X$ , равно  $\theta$ . В том случае, когда критерий нерандомизированный,

$$W(\theta) = \mathbf{P} \{x \in X_{кр} | \theta\}. \quad (4.1.15)$$

Если гипотезе  $H_0$  соответствует множество значений параметров  $H_0$  и  $\theta \in \Omega_0$ , то  $W(\theta)$  равна вероятности ложного отвержения гипотезы  $H_0$ . В том случае, когда гипотеза  $H_0$  сложная, т. е.  $H_0$  содержит более одной точки  $\theta$ , ошибка первого рода  $\alpha$  определяется по формуле

$$\alpha = \sup_{\theta \in H_0} W(\theta). \quad (4.1.16)$$

Рассмотрим пример. Предположим, что испытания на надежность проводятся по плану  $[N, B, T]$ . В результате испытаний регистрируется только число  $d(T)$  элементов, отказавших к моменту  $T$ . Таким образом, пространство исходов испытаний  $X = \{0, 1, \dots, N\}$ . Если предположить, что элементы отказывают взаимно независимо друг от друга, то  $d(T)$  — случайная величина, имеющая биномиальное распределение

$$\mathbf{P} \{d(T) = d | \theta\} = C_N^d [1 - \theta]^d \theta^{N-d}. \quad (4.1.17)$$

Здесь роль параметра  $\theta$  играет вероятность безотказной работы элемента в течение времени  $T$ . Так как  $0 \leq \theta \leq 1$ , то  $\Omega = [0, 1]$ . Пусть гипотеза  $H_0$  состоит в том, что вероятность безотказной работы  $\theta \geq \theta_0$ ,  $\Omega_0 = \{\theta \geq \theta_0\}$ , а гипотеза  $H_1$  состоит в том, что  $\theta < \theta_0$ . В качестве критического множества критерия, различающего эти две гипотезы, возьмем  $X_{кр} = \{c+1, c+2, \dots, N\}$ . Таким образом, если  $d(T) > c$ , тогда гипотеза  $H_0$  отвергается,

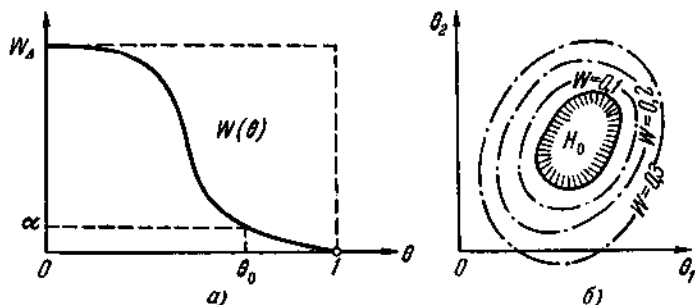


Рис. 4.1.2.

если же  $d(T) \leq c$ , то  $H_0$  принимается. Из формул (4.1.16) и (4.1.17) получаем, что функция мощности такого критерия

$$W(\theta) = \sum_{d(T)=c+1}^N C_N^d (1-\theta)^d \theta^{N-d}. \quad (4.1.18)$$

Легко показать, что функция мощности, задаваемая формулой (4.1.18), является монотонно убывающей (рис. 4.1.2, а). Учитывая монотонность, из формулы (4.1.17) находим, что ошибка первого рода

$$\alpha = \sum_{d=c+1}^N C_N^d (1-\theta_0)^d \theta_0^{N-d}. \quad (4.1.19)$$

Если задать величину ошибки первого рода  $\alpha$ , то значение числа  $c$  равно наименьшему из целых чисел  $c'$ , для которых

$$\alpha \geq \sum_{d=c'+1}^N C_N^d (1-\theta_0)^d \theta_0^{N-d}.$$

Другие примеры критериев и их функции мощности даны в §§ 4.3 и 4.4.

В тех случаях, когда параметр  $\theta$ , определяющий вид распределения вероятностей, является двумерным,  $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ , удобно изображать функцию мощности  $W(\theta_1, \theta_2)$  на плоскости  $(\theta_1, \theta_2)$  в

виде изолиний  $W(\theta_1, \theta_2) = p$ , где  $p$  пробегает ряд значений, например  $p = 0,05; 0,1(0,1) 0,9; 0,95$  (см. рис. 4.1.2, б). Сравнивая функции мощности различных критериев, можно отбирать наилучшие критерии. Предположим, что испытания можно проводить по плану либо типа  $\Pi_1$ , либо типа  $\Pi_2$ . Каждому из этих планов соответствует критерий. Функции мощности критериев для планов  $\Pi_1$  и  $\Pi_2$  равны соответственно  $W_1(\theta)$  и  $W_2(\theta)$ . Если окажется, что для множества значений параметров  $\Omega_0$ , соответствующего исходной гипотезе  $H_0$ , мы имеем  $W_2(\theta) \leq W_1(\theta)$ , а для  $\theta \in \bar{\Omega}_0$  имеем

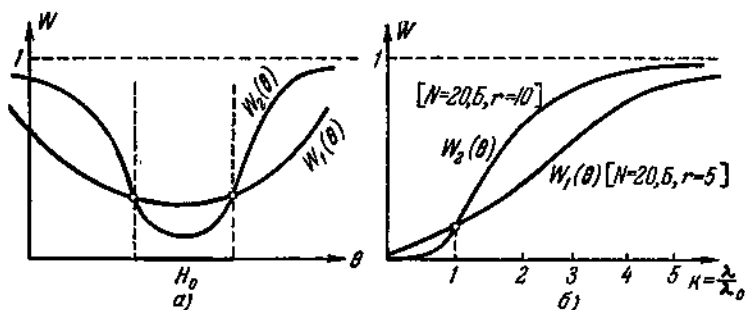


Рис. 4.1.3.

$W_2(\theta) \geq W_1(\theta)$  (рис. 4.1.3, а), то критерий для плана  $\Pi_2$  лучше, чем критерий для плана  $\Pi_1$ . Это следует из того, что вероятности ошибочного отвержения  $H_0$ , когда она верна, или ошибочного принятия  $H_0$ , когда она неверна, меньше у критерия для плана  $\Pi_2$ . Если экономический анализ или проверка других показателей планов  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  покажет, что они примерно эквивалентны, то надо использовать план  $\Pi_2$ .

Рассмотрим числовой пример. Если вероятность безотказной работы в течение времени  $t$  равна  $e^{-\lambda t}$ ,  $\theta = \lambda$ , то, как будет показано в § 4.3, для планов

$$\Pi_1 = [N = 20, 5, r = 5] \text{ и } \Pi_2 = [N = 20, 5, r = 10],$$

когда  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ ,  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ , а ошибка первого рода  $\alpha = 0,05$ , функции мощности рекомендуемых критериев равны соответственно

$$W_1(\lambda) = 1 - L_4\left(1,970 \frac{\lambda}{\lambda_0}\right), \quad W_2(\lambda) = 1 - L_9\left(5,425 \frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \quad (4.1.20)$$

Графики этих функций мощности приведены на рис. 4.1.3. Из сравнения функций мощности видно, что критерий плана  $\Pi_2$  более эффективен, чем критерий плана  $\Pi_1$ . Момент остановки испытаний для плана  $\Pi_1$  совпадает с моментом  $t_5$  возникновения 5-го отказа,

тогда как для плана  $\Pi_2$  с моментом  $t_{10}$  — возникновения 10-го отказа. Средняя продолжительность испытаний для  $\Pi_1$  равна  $\sum_{d=0}^4 (20-d)^{-1} \lambda^{-1} = 0,2795 \lambda^{-1}$ , а для  $\Pi_2$  равна  $\sum_{d=0}^9 (20-d)^{-1} \lambda^{-1} = 0,6688 \lambda^{-1}$ .

Таким образом, для более эффективного плана  $\Pi_2$  среднее время испытаний в 2,4 раза больше, чем для плана  $\Pi_1$ . Если время испытаний не является ограничивающим фактором, то нужно использовать план  $\Pi_2$ .

Может оказаться, что у различных критериев, соответствующих разным планам, функции мощности совпадают. В таких случаях нужно использовать те критерии, у которых лучше другие показатели, например такие, как среднее время испытания.

Критерий отношения правдоподобия. Для критериев второй группы, когда вид распределения вероятностей  $P_\theta$  известен, но неизвестно лишь значение параметра  $\theta$ , наиболее простым является случай простой исходной и простой конкурирующей гипотез. Гипотезы  $H_0$ ,  $H_1$  называются *простыми*, когда соответствующие им множества параметров  $\Omega_0$  и  $\Omega_1$  содержат только по одной точке  $\theta_0$ ,  $\theta_1$ . При этом наиболее важными показателями критерия являются ошибка первого рода  $W(\theta_0)$  и ошибка второго рода  $1 - W(\theta_1)$ . Ошибка второго рода равна вероятности ложного отвержения конкурирующей гипотезы  $H_1$ , когда эта гипотеза верна. Одним из возможных подходов к отысканию оптимальных критериев является следующий. Из всех критериев с ошибкой первого рода  $W(\theta_0) \leq \alpha$  отыскивается критерий, имеющий наибольшую мощность  $W(\theta_1)$  или наименьшую ошибку второго рода  $1 - W(\theta_1)$ . Наиболее фундаментальным в этом отношении результатом является теорема Неймана—Пирсона. Каждый критерий можно характеризовать заданием вероятности  $p(x)$  отвержения гипотезы  $H_0$ , где  $x$  — исход испытаний.

Теорема 4.1.1 (Неймана—Пирсона). Пусть обе гипотезы — исходная  $H_0$  и конкурирующая  $H_1$  являются простыми, а соответствующие им вероятностные меры имеют плотности  $p_0(x)$  и  $p_1(x)$ <sup>1)</sup>. Тогда имеют место следующие утверждения.

1. Существует критерий для проверки гипотезы  $H_0$  против гипотезы  $H_1$ , задаваемый функцией вероятности отвержения исходной гипотезы  $p(x)$ , такой, что ошибка первого рода равна

$$\int_X p(x) p_0(x) dx = \alpha, \quad (4.1.21)$$

<sup>1)</sup> В общем случае это плотности относительно некоторой меры  $\mu$ ; формулы верны с заменой  $dx$  на  $\mu(dx)$ .



где

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & p_1(x) > k p_0(x), \\ 0, & p_1(x) < k p_0(x), \quad k > 0. \end{cases} \quad (4.1.22)$$

II. Если критерий удовлетворяет условиям (4.1.21) и (4.1.22) для некоторого  $k > 0$ , то он является наиболее мощным критерием для проверки гипотез  $H_0$ ,  $H_1$ , и ошибка первого рода равна  $\alpha$ .

III. Если  $\varphi(x)$  — наиболее мощный критерий с ошибкой первого рода, не превышающей  $\alpha$ , то для некоторого  $k > 0$  выполняется условие (4.1.21). Условие (4.1.22) выполнено, если только не существует нерандомизированный критерий с ошибкой первого рода, меньшей  $\alpha$ , и нулевой ошибкой второго рода.

Доказательство теоремы Неймана — Пирсона читатель может найти в книге Лемана [1].

Из формулы (4.1.22) следует, что в тех случаях, когда  $P\{p_1(x) = k p_0(x)\} = 0$ ,  $i = 0, 1$ , наиболее мощный критерий является нерандомизированным. Критическая область такого критерия находится из уравнения

$$X_C = \left\{ x: \frac{p_1(x)}{p_0(x)} > C \right\}, \quad (4.1.23)$$

где  $C$  подбирается таким, чтобы ошибка первого рода была равна  $\alpha$ . В том случае, когда плотности  $p_0(x) = p(x|\theta_0)$ ,  $p_1(x) = p(x|\theta_1)$ , где  $p(x|\theta)$  — параметрическое свойство с достаточной статистикой  $S(x)$ , в соответствии с критерием факторизации (см. § 1.6), имеем

$$p(x|\theta) = g(S(x), \theta) h(x). \quad (4.1.24)$$

Из (4.1.23) и (4.1.24) получаем, что

$$X_C = \left\{ S(x): \frac{g(S(x), \theta_1)}{g(S(x), \theta_0)} > C \right\} = X_C(\theta_0, \theta_1). \quad (4.1.25)$$

Таким образом, критическая область для наиболее мощного критерия выражается через достаточные статистики.

Мы скажем, что из двух критериев  $K_1$  и  $K_2$  с функциями мощности  $W_1(\theta)$ ,  $W_2(\theta)$ , имеющих одинаковые ошибки первого рода, критерий  $K_1$  равномерно более мощный, чем критерий  $K_2$ , если

$$W_1(\theta) \geq W_2(\theta), \quad \theta \in \Omega_1,$$

причем  $W_1(\theta) > W_2(\theta)$ , хотя бы для одного значения  $\theta$ . Если критерий  $K_1$  равномерно более мощный, чем любой другой критерий с той же ошибкой первого рода, то он называется *равномерно наиболее мощным*. Как правило, равномерно наиболее мощные критерии не существуют. Однако для того частного случая, когда вероятность безотказной работы  $R(t) = e^{-\lambda t}$  и используются

планы типа  $B$  или планы  $[N, B, r]$ , равномерно наиболее мощные критерии существуют. Подробное изложение этих критериев дается в § 4. 3. Достаточные условия существования равномерно наиболее мощного критерия дает

*Теорема 4. 1. 2. Если критическая область  $X_C(\theta_0, \theta_1)$ , задаваемая формулой (4.1.25), не зависит от значений параметра  $\theta_1$ , то равномерно наиболее мощный критерий существует. Так будет в том случае, когда*

$$\frac{p(x|\theta_1)}{p(x|\theta_0)} = f(S(x)), \quad (4.1.26)$$

где  $f(y)$  — неубывающая или невозрастающая функция от  $y$ .

В ряде случаев оказывается полезным использовать байесовские критерии, основанные на понятиях функции риска и априорных вероятностях. За подробным изложением теории мы отсылаем читателя к литературе, посвященной решающим функциям [2], [3], [12], [13], [14]. Два частных примера байесовских критериев, построенных для задач проверки гипотез о значениях параметра  $\lambda$  экспоненциального распределения рассмотрены в § 4. 4. Там же даются определения функции риска и априорных вероятностей.

Сравнение вероятностей безотказной работы элементов двух типов. В заключение параграфа рассмотрим задачу сравнения вероятностей безотказной работы двух типов элементов или систем. Предположим, что были выпущены две опытные партии элементов. Объем первой партии  $N_1$ , объем второй —  $N_2$ . Элементы испытывались в одинаковых условиях в течение времени  $T$ . Предположим также, что отказы происходят независимо друг от друга и в первой партии отказало  $d_1$  элементов, а во второй  $d_2$ . Допустим, что основным показателем надежности является  $R_i(T)$  — вероятность безотказной работы элемента  $i$ -й партии в течение всего времени испытаний. Требуется построить критерий, в соответствии с которым можно было бы проверить или отвергнуть гипотезу  $H_0$  о том, что  $R_1(T) = R_2(T)$ . Если гипотеза  $H_0$  отвергается, то принимается одна из двух конкурирующих гипотез  $H_1 = \{R_1(T) < R_2(T)\}$  или  $H_2 = \{R_1(T) > R_2(T)\}$ . Ошибка первого рода  $\alpha$  не должна превышать заданного значения. Пространство исходов опыта  $X = \{x\}$  состоит из точек  $x = (d_1, d_2)$ ,  $d_i = 0, 1, \dots, N_i$ . Для определенности мы будем считать, что  $N_1 \leq N_2$ . В противном случае вторую партию будем называть первой.

Случайные величины  $d_1, d_2$  взаимно независимы и имеют биномиальное распределение. Вероятность появления исхода  $(d_1, d_2)$  задается формулой

$$P\{x = (d_1, d_2)\} = \prod_{i=1, 2} C_{N_i}^{d_i} [1 - R_i(T)]^{d_i} R_i(T)^{N_i - d_i}. \quad (4.1.27)$$

Роль множества параметров  $H$  играют пары  $R_1(T)$ ,  $R_2(T)$ ,  $0 \leq R_i(T) \leq 1$ . Гипотезы  $H_0$ ,  $H_1$ ,  $H_2$  показаны в виде подмножеств  $H$  на рис. 4.1.4б, а исходы испытаний  $(d_1, d_2)$  — на рис. 4.1.4а. Для построения критерия с уровнем значимости, или ошибкой первого рода, не превышающим  $\alpha$ , будем поступать следующим образом. Из формулы (4.1.27) и критерия факторизации следует, что  $d = d_1 + d_2$  является достаточной статистикой, когда верна

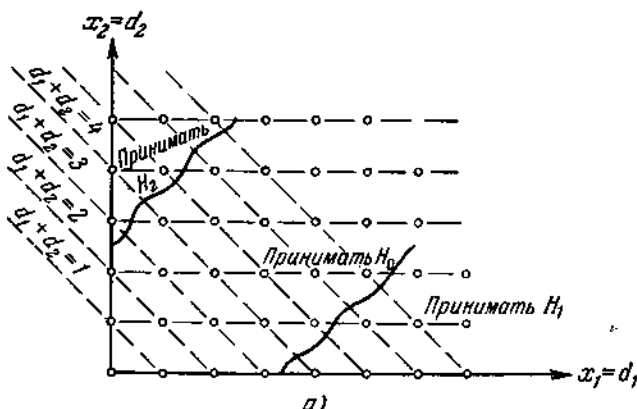


Рис. 4.1.4а.

гипотеза  $H_0$ . Из формулы условных вероятностей и (4.1.27) имеем, что

$$P\{x = (d_1, d_2) | d_1 + d_2 = d\} = \frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{\sum_{k_1+k_2=d} C_{N_1}^{k_1} C_{N_2}^{k_2}} = \frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^d}, \quad (4.1.28)$$

если только верна гипотеза  $H_0$ . Из формулы (4.1.28) видно, что эти условные вероятности выражаются через вероятности гипергеометрического распределения, свойства которого подробнее рассмотрены в главе 7. Замечая, что  $P\{x = (d_1, d_2) | d_1 + d_2 = d\}$  не зависит от значения  $R_1(T) = R_2(T)$ , будем включать в критическое множество  $X_{кр}$  точки  $(0, d)$ ,  $(1, d-1)$ ,  $\dots$ ,  $(d', d-d')$  и точки  $(d'', d-d'')$ ,  $(d''+1, d-d''-1)$ ,  $\dots$ ,  $(d, 0)$ , для которых

$$\begin{cases} p' = \sum_{d_1+d_2=d, d_1=0}^{d'} \frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^d} \leq \frac{\alpha}{2} < \sum_{d_1+d_2=d, d_1=0}^{d'+1} \frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^d} \\ p'' = \sum_{d_1+d_2=d, d_1=d''}^d \frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^d} \leq \frac{\alpha}{2} < \sum_{d_1+d_2=d, d_1=d''-1}^d \frac{C_{N_1}^{d_1} C_{N_2}^{d_2}}{C_{N_1+N_2}^d} \end{cases} \quad (4.1.29)$$

Если верна гипотеза  $H_0$ , то вероятность  $P_0$  попадания в критическое множество с учетом (4.1.27) — (4.1.30) не превышает  $\alpha$ . Действительно, при любом значении

$$\begin{aligned} P_0 &= \sum_{d=0}^{N_1+N_2} \mathbf{P} \{d | R_1(T) = R_2(T)\} \mathbf{P} \{(d_1, d_2) \in X_{кр} | d_1 + d_2 = d\} = \\ &= \sum_{d=0}^{N_1+N_2} \mathbf{P} \{d | R_1(T) = R_2(T)\} \cdot (p' + p'') \leq \\ &\leq \alpha \sum_{d=0}^{N_1+N_2} \mathbf{P} \{d | R_1(T) = R_2(T)\} = \alpha. \quad (4.1.30) \end{aligned}$$

Критерий с уровнем значимости, не превышающим  $\alpha$ , для проверки гипотезы  $H_0 = \{R_1(T) = R_2(T)\}$  против конкурирующих гипотез  $H_1 = \{R_1(T) < R_2(T)\}$  и  $H_2 = \{R_1(T) > R_2(T)\}$  описывается следующей системой правил. Если результаты испытаний задаются парой

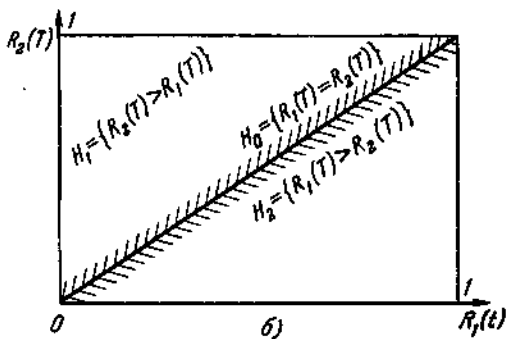


Рис. 4.1.46.

$(d_1, d_2)$ , то из формул (4.1.29), (4.1.30) находятся значения  $d'$  и  $d''$ . Если окажется, что  $d' < d_1 < d''$ , то гипотеза  $H_0$  принимается. В том случае, если  $d_1 \leq d'$ , то гипотеза  $H_0$  отвергается и принимается гипотеза  $H_1$ ; если же  $d_1 \geq d''$ , то  $H_0$  отвергается и принимается гипотеза  $H_2$ . При испытаниях высоконадежных элементов вероятность отказа  $R_i(T)$  невелика. В таких случаях оказывается, что  $\frac{d_i}{N_i} \ll 1$ , если только  $N_i$  велико. Получение значений  $d'$  и  $d''$  по формулам (4.1.29), (4.1.30) связано с большим количеством вычислений. Замечая, что в том случае, когда

$$\frac{d_i}{N_i} \ll 1, \quad C_{N_i}^{d_i} \left( \frac{N_i^{d_i}}{d_i!} \right)^{-1} \approx 1,$$

из (4.1.28) получаем приближенную формулу

$$\begin{aligned} P\{x = (d_1, d_2) \mid d_1 + d_2 = d\} &= \frac{N_1^{d_1} N_2^{d_2} (d_1 + d_2)!}{d_1! d_2! (N_1 + N_2)^d} = \\ &= C_{d_1 + d_2}^{d_1} \left(\frac{N_1}{N_1 + N_2}\right)^{d_1} \left(\frac{N_2}{N_1 + N_2}\right)^{d_2}. \end{aligned} \quad (4.1.31)$$

Таким образом, гипергеометрическое распределение заменяется биномиальным. Если ввести обозначения  $b_d^{d_1}(p) = C_d^{d_1} p^{d_1} (1-p)^{d-d_1}$ , то согласно (4.1.31) можно вместо (4.1.29), (4.1.30) использовать для нахождения  $d'$ ,  $d''$  уравнения

$$p' = \sum_{d_1 + d_2 = d, d_1 = 0}^{d'} b_d^{d_1}(p) \leq \frac{\alpha}{2} < \sum_{d_1 + d_2 = d, d_1 = 0}^{d'+1} b_d^{d_1}(p), \quad (4.1.32)$$

$$p'' = \sum_{d_1 + d_2 = d, d_1 = d''}^d b_d^{d_1}(p) \leq \frac{\alpha}{2} < \sum_{d_1 + d_2 = d, d_1 = d''-1}^d b_d^{d_1}(p), \quad (4.1.33)$$

где  $p = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$ ,  $N_1 \leq N_2$ . В таблице 9 приложения приведены числа  $d'$ ,  $d''$ , найденные исходя из биномиального приближения для случая, когда  $\alpha = 0,1$ , а  $d_1 + d_2 = 0(1)30$ .

В том случае, когда  $d_1$ ,  $d_2$  велики и отношения  $\frac{d_i}{N_i} > 0,1$ , можно воспользоваться тем фактом, что частоты  $\frac{d_i}{N_i}$  имеют распределение, близкое к нормальному. Здесь удобно использовать преобразование  $y = 2 \arcsin \sqrt{x}$ , таблицы которого имеются в книге Я. Янко [4]. Можно показать, что  $\xi_i = 2 \arcsin \sqrt{\frac{d_i}{N_i}}$ ,  $i = 1, 2$ , имеют распределение, близкое к нормальному, со средними, равными  $2 \arcsin \sqrt{[1 - R_i(T)]}$ , и дисперсиями, равными  $\frac{1}{N_i}$ . Так как эти случайные величины взаимно независимы, то их разность в том случае, когда верна гипотеза  $H_0$ , будет иметь нормальное распределение со средним, равным нулю, дисперсией, равной  $\frac{1}{N_1} + \frac{1}{N_2} = \frac{N_1 + N_2}{N_1 N_2}$ . Отсюда следует, что случайная величина

$$Q(d_1, d_2) = \left(2 \arcsin \sqrt{\frac{d_1}{N_1}} - 2 \arcsin \sqrt{\frac{d_2}{N_2}}\right) \cdot \sqrt{\frac{N_1 N_2}{N_1 + N_2}} \quad (4.1.34)$$

имеет распределение, близкое к нормальному, с нулевым средним и единичной дисперсией. Таким образом, если  $R_1(T) = R_2(T)$ , то

$$P\{|Q(d_1, d_2)| > u_{1 - \frac{\alpha}{2}}\} \approx \alpha, \quad (4.1.35)$$

где  $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$  — квантиль нормального распределения. Полученный приближенный критерий состоит в том, что гипотеза  $H_0 = \{R_1(T) = R_2(T)\}$  отвергается всякий раз, когда  $|Q(d_1, d_2)| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}$ .

Проиллюстрируем использование таблицы 10 приложения на конкретном примере. Испытывались две партии элементов. В первой было 500 элементов, из которых отказало 5, во второй — 250, отказало 10. В наших обозначениях  $N_1 = 250$ ,  $N_2 = 500$ ,  $d_1 = 10$ ,  $d_2 = 5$ ,  $\frac{N_1}{N_1 + N_2} = \frac{1}{3}$ . Из таблицы 10 приложения для значения  $d = d_1 + d_2 = 15$  находим, что  $d' = 1$ ,  $d'' = 9$ . Так как  $d_1 = 10 > d'' = 9$ , то гипотеза о равенстве вероятностей  $R_i(T)$  безотказной работы отвергается и принимается гипотеза  $H_2 = \{R_1(T) < R_2(T)\}$ .

#### § 4.2. Проверка гипотезы о показательности распределения времени безотказной работы

В § 4.3 описаны критерии, которые позволяют эффективно различить гипотезы о значениях интенсивности  $\lambda$  испытываемых элементов или системы. Эти критерии существенным образом основываются на гипотезе, состоящей в том, что вероятность безотказной работы в течение времени  $t$  равна  $e^{-\lambda t}$ . При этом же допущении верны формулы точечных и интервальных оценок, приведенные в §§ 3.3 и 3.4. Возникает задача проверки гипотезы, что вероятность безотказной работы  $R(t) = e^{-\lambda t}$ .

Ниже приводится набор критериев для проверки этой гипотезы. Многообразие приводимых ниже критериев необходимо по существу дела. Действительно, в качестве конкурирующих гипотез к исходной гипотезе  $R(t) = e^{-\lambda t}$  могут встретиться различные распределения (например, распределения Вейбулла, логарифмически показательное и др.; см. главу 1. Каждый конкретный критерий может с большой достоверностью, при ограниченном количестве данных об испытаниях на надежность, различать показательное распределение только от некоторого числа других распределений. Таким образом, могут встретиться такие конкурирующие распределения времени безотказной работы, которые существенно отличаются от показательного распределения. Тем не менее результаты обработки данных в соответствии с использованным критерием будут ложным образом согласовываться с гипотезой о показательном характере вероятности  $R(t)$  безотказной работы. Чтобы избежать таких ошибок, рекомендуется проверку гипотез о показательности проводить по нескольким критериям. Ниже приводится набор ряда критериев для проверки гипотезы  $R(t) = e^{-\lambda t}$ . Авторы существенно использовали обзорную работу Эпштейна [5].

Показательная бумага. Используя общий подход для построения вероятностных бумаг, изложенный в § 4.2, можно построить показательную вероятностную бумагу. На этой бумаге семейство функций распределения

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(t-a)} & \text{при } t \geq a, \\ 0 & \text{при } t < a \end{cases} \quad (4.2.1)$$

представляется в виде полупрямых  $y = \lambda(x-a)$ ,  $x \geq a$ . Для построения бумаги используется тот факт, что при отображении  $x = t$ ,  $y = -\ln(1-F)$  точек полуполосы  $(t, F)$ ,  $t \geq a$ ,  $0 \leq F \leq 1$ , в точки плоскости  $(x, y)$  линии вида  $(t, F(t))$ , где  $F(t)$  задается по формуле (4.2.1), переходят в полупрямые  $y = \lambda(x-a)$ ,  $x \geq a$ . Показательное распределение получается в частном случае, когда  $a = 0$ . По теореме Гливенко эмпирическая функция распределения должна проходить вблизи теоретической функции распределения. Строя изображение эмпирической функции распределения, нужно в случаях существенного отклонения ее графика от луча прямой  $y = \lambda x$ ,  $x \geq 0$ , проходящей через начало координат, отвергать гипотезу о показательности распределения. При этом полезно иметь в виду, что трехпараметрическое семейство распределений Вейбулла, для которого

$$F(t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(t-a)^p} & \text{при } t \geq a, \\ 0 & \text{при } t < a, \end{cases} \quad (4.2.2)$$

дает на показательной вероятностной бумаге линии вида  $y = \lambda(t-a)^p$ . На рис. 4.2.1, показаны графики этих линий; случай

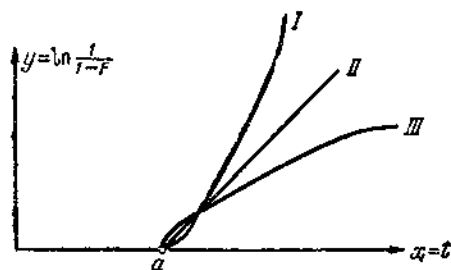


Рис. 4.2.1.

*I* соответствует  $p > 1$ , случай *II* —  $p = 1$  и случай *III* —  $p < 1$ . Следуя качественной картине, изображенной на рис. 4.2.1, нужно отвергать гипотезу, состоящую в том, что функция распределения имеет вид (4.2.1), в пользу гипотезы о виде, задаваемом формулой (4.2.2), когда эмпирическая функция распределения, нанесенная на вероят-

ностную бумагу, имеет выпуклость вверх ( $p < 1$ ) или вниз ( $p > 1$ ).

Построение эмпирической функции распределения производится различными способами в зависимости от типа используемого плана испытания.

Если испытания  $N$  элементов проводились по плану типа *Б*, а наблюдаемые моменты отказов оказались равными  $t_1, t_2, \dots, t_d$ ,

то первый способ построения состоит в том, что эмпирическая функция задается формулой

$$F_{\text{эмп}}^{(1)}(t) = \frac{d(t)}{N}, \quad (4.2.3)$$

где  $d(t)$  — число отказов, происшедших до момента  $t$ . При таком построении нам известна лишь часть эмпирической функции распределения, если  $d < N$ . В случае использования второго способа вычисляются значения  $S_i$  суммарных наработок в интервалах между отказами,  $S_1 = Nt_1$ ,  $S_2 = (N-1)(t_2 - t_1)$ , ...,  $S_d = (N-d+1)(t_d - t_{d-1})$ . Выше было показано, что  $S_i$  — взаимно независимые величины, имеющие функции распределения вида (4.2.1), где  $a=0$ . Эмпирическая функция строится по формуле

$$F_{\text{эмп}}^{(2)}(t) = \frac{d(s)}{a}, \quad (4.2.4)$$

где  $d(s)$  — число  $S_i < s$ , а  $d$  — общее число наблюдаемых отказов.

При испытаниях типа *B* также можно использовать эти способы. В первом способе учитываются только моменты  $t'_1, t'_2, \dots, t'_d$  первых отказов, т. е. если в  $i$ -й стендовой ячейке в начале испытаний стоял элемент, который отказал в момент  $t_{i1}$ , то моменты отказов последующих элементов, поставленных в эту ячейку, не учитываются. С учетом моментов  $t'_1, \dots, t'_d$  эмпирическая функция строится по формуле (4.2.3). При втором способе учитываются все моменты отказов  $t_1, \dots, t_d$ . Так как в случае планов типа *B* поток моментов отказов — пуассоновский с интенсивностью  $N\lambda$ , то случайные величины  $S_1 = Nt_1$ ,  $S_2 = N(t_2 - t_1)$ , ...,  $S_d = N(t_d - t_{d-1})$  имеют функции распределения вида (4.2.2), где  $a=0$ . Эмпирическая функция распределения строится по формуле (4.2.4).

Мы привели эти способы построения потому, что каждый из них в разной мере чувствителен к различным конкурирующим гипотезам. Графики, показанные на рис. 4.2.1 для гипотезы вида (4.2.2) относятся только к первому способу построения.

**Пример.** Пусть испытания проводились в соответствии с планом  $[N=49, B, N=49]$ . Моменты отказов испытываемых элементов приведены в таблице 4.2.1; см. также [5].

Для построения эмпирической функции можно воспользоваться формулой (4.2.3). Заметим, однако, что планов типа  $[N, B, r]$   $MF(t_i) = \frac{i}{N+1}$ , если  $i \leq r$ ,  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ . У нас план  $[N, B, N]$ , поэтому вместо формулы (3) можно использовать несколько видоизмененную формулу

$$F_{\text{эмп}}^{(1)}(t) = \frac{d(t)}{N+1}, \quad t_d < t < t_{d+1}. \quad (4.2.3')$$



Таблица 4.2.1

1,2	13,7	38,9	72,4	102,8	151,6	203,0
2,2	15,1	47,9	73,6	108,5	152,6	204,3
4,9	15,2	48,4	76,8	128,7	164,2	229,5
5,0	23,9	49,3	83,8	133,6	166,8	253,1
6,8	24,3	53,2	95,1	144,1	178,6	304,1
7,0	25,1	55,6	97,9	147,6	185,2	341,7
12,1	35,8	62,7	99,6	150,6	187,1	354,4

Вычисляя значения  $t_i = -\ln \left[ 1 - \frac{d(t)}{N+1} \right]$ , строим на показательной вероятностной бумаге график эмпирической функции. Вид полученного при этом графика показан на рис. 4.2.2. Согласно с гипотезой о показательном характере распределения очень хорошее.

Критерий  $\chi^2$  для проверки показательности. Ограничимся двумя примерами использования критерия  $\chi^2$  для проверки показательности. Пусть испытания проводились в соответствии с планом  $[N, B, T]$ . Наблюдаемое число отказов велико ( $d(t) \geq 20$ ). Пусть  $t_1, \dots, t_{d(t)}$  суть моменты отказов. Как уже указывалось в главе 2, случайные величины  $\omega_i = \frac{S_B(t_i)}{S_B(t)}$ , где  $S_B(t)$  — значение суммарной наработки к моменту  $t$ , образуют вариационный ряд  $d(t)$  взаимно независимых равномерно распределенных в интервале  $[0, 1]$  случайных величин. Разобьем интервал  $[0, 1]$  на  $k$  равных частей; тогда из  $d(T)$  точек  $\omega_i$  в среднем в каждый из  $k$  интервалов попадает по  $\frac{d(T)}{k}$  точек. Пусть  $d_i$  — фактическое число точек  $\omega_i$ , попавших в  $i$ -й интервал. Как известно (см. § 1.6), статистика

$$\Psi_T = \sum_{i=1}^k \frac{\left( d_i - \frac{d}{k} \right)^2}{\frac{d}{k}} \quad (4.2.5)$$

имеет распределение, близкое к  $\chi^2$  с  $(k-1)$ -й степенью свободы, если только числа  $d_i$  достаточно велики. Гипотеза о показателности распределения отвергается с уровнем значимости  $\alpha$ , если окажется, что  $\Psi_T > \chi_{1-\alpha}^2(k-1)$ . Если используется план  $[N, B, r]$ , то значения суммарных наработок  $S_B(t_i)$  можно рассматривать как значения  $r-1$  взаимно независимых случайных величин, равномерно распределенных в интервале  $[0, S(t_r)]$ . Если обозначить через

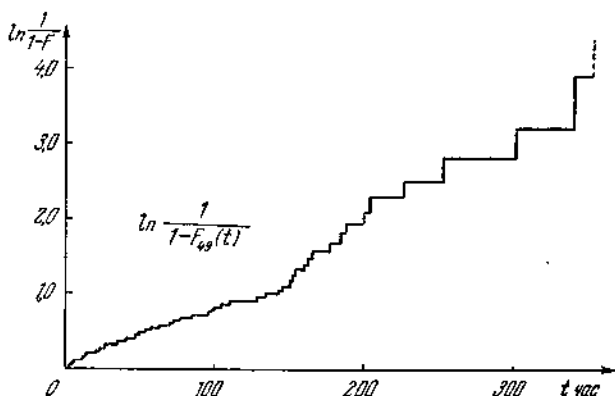


Рис 4.2.2.

$\omega_i = \left[ \frac{S_B(t_i)}{S_B(t_r)} \right]$ ,  $i=1, 2, \dots, r-1$ , а через  $d_i$ —число точек  $\omega_i$ , попавших в интервал  $\left[ \frac{i-1}{k}, \frac{i}{k} \right]$ , то статистика

$$\Psi_r = \sum_{i=1}^k \frac{\left[ d_i - \frac{r-1}{k} \right]^2}{\frac{r-1}{k}} \quad (4.2.6)$$

имеет распределение, близкое к  $\chi^2$ , с  $(k-1)$ -й степенью свободы, если только  $d_i$  достаточно велики.

Формулы, аналогичные (4.2.5) и (4.2.6), применимы и для планов типа  $[N, B, T]$ . Надо только учесть, что при использовании плана  $[N, B, T]$   $\omega_i = \frac{t_i}{T}$ , а при использовании плана  $[N, B, r]$   $\omega_i = \frac{t_i}{t_r}$ ,  $i=1, 2, \dots, r-1$ , где  $t_i$ —моменты отказов. Если испытания проводились по плану  $[N, B, (r, T)]$  или  $[N, B, (r, T)]$ , то формула (4.2.5) используется, когда  $t_r > T$ , а формула (4.2.6)—когда  $t < T$ .

Подробный обзор общих вопросов, связанных с использованием критерия  $\chi^2$ , излагается в работе Кохрана [6]. Таблица значений квантилей  $\chi_p^2(k)$  дана в приложении 4.

Критерий Колмогорова. Как и обычно,  $S_B(t)$  и  $S_B(t)$  равны значениям времени суммарной наработки при использовании планов типа  $B$  и  $B$ . Если  $t^*$  — момент остановки испытаний,  $d = d(t^*)$  — общее число наблюдаемых отказов, то при использовании планов  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$  точки

$$\omega_i = \frac{S_B(t_i)}{S_B(T)}, \quad i = 1, 2, \dots, d(T); \quad \omega_i = \frac{S_B(t_i)}{S_B(T)}, \quad i = 1, \dots, r-1, \quad (4.2.7)$$

образуют вариационный ряд, соответствующий независимой выборке объема  $d(t^*)$ , равного  $d(T)$  или  $r-1$ , из равномерно распределенных в интервале  $[0, 1]$  случайных величин. При использовании плана  $[N, B, (r, T)]$  аналогичными свойствами обладают точки  $\omega_i$ , которые вычисляются по левой формуле (4.2.7), когда  $t_r > T$ , и по правой, когда  $t_r < T$ . Аналогичные вариационные ряды образуют точки

$$\omega_i = \frac{t_i}{T}, \quad i = 1, 2, \dots, d(T); \quad \omega_i = \frac{t_i}{t_r}, \quad i = 1, 2, \dots, r-1, \quad (4.2.8)$$

которые вычисляются при использовании планов типа  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, (r, T)]$ . Таким образом, теоретическая функция распределения  $F(\omega) = \omega$ ,  $0 \leq \omega \leq 1$ , а эмпирическая функция

$$F_{\text{эмп}}(\omega) = \frac{i}{d^*}, \quad \omega_i \leq \omega < \omega_{i+1}, \quad (4.2.9)$$

где  $d^*$  либо равно  $d(T)$ , если  $t^* = T$ , либо  $d^* = r-1$ , если  $t^* = r$ . А. Н. Колмогоров исследовал асимптотическое поведение

$$D_{d^*} = \sup_{0 \leq \omega \leq 1} |F_{\text{эмп}}(\omega) - \omega| = \max_{1 \leq i \leq d^*} \left\{ \left| \frac{i-1}{d^*} - \omega_i \right|, \left| \frac{i}{d^*} - \omega_i \right| \right\}. \quad (4.2.10)$$

Он показал, что

$$\lim_{d^* \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \sqrt{d^*} D_{d^*} < y \} = \begin{cases} 0 & \text{при } y < 0, \\ K(y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 y^2}, & y \geq 0. \end{cases} \quad (4.2.11)$$

Значения функции  $K(y)$  даны в таблице 15 приложения.

Впоследствии были вычислены некоторые квантили случайных величин  $D_n$ , задаваемых формулой (4.2.10). В таблице 16 приложения даны значения  $D_{n\alpha}$ ,  $\alpha = 0,2; 0,1; 0,05; 0,02; 0,01$  и  $n = 1(1)100$ . Числа  $D_{n\alpha}$  удовлетворяют условию

$$\mathbf{P} \{ D_n > D_{n\alpha} \} = \alpha. \quad (4.2.12)$$

Критерий Колмогорова для проверки экспоненциальности времени распределения состоит в следующем. В зависимости от типа используемого плана по формулам (4.2.7) и (4.2.8) вычисляются значения точек  $\omega_i$ . Затем по формуле (4.2.10) находится значение  $D_{d^*}$ . Если  $N^* > 100$ , то производится нормировка умножением на  $\sqrt{d^*}$ . Гипотеза о показательном характере вероятности безотказной работы отвергается с уровнем значимости  $\alpha$ , если  $\sqrt{d^*} D_{d^*} > K_{1-\alpha}$ ; здесь  $K(k_p) = p$ , т. е.  $k_p$  — квантиль уровня  $p$  для распределения Колмогорова. Если  $d^* \leq 100$ , то производим сравнение с числами  $D_{na}$  таблицы 16 приложения. Гипотеза о показательном характере распределения отвергается с уровнем значимости  $1 - \alpha$ , если  $D_{d^*} > D_{d^*, \alpha}$ ; в противном случае эта гипотеза принимается.

Критерии, основанные на однородных статистиках  $\bar{\omega}$  и  $v$ . Пусть  $t_1, t_2, \dots, t_d$  — моменты отказов, зарегистрированные при испытаниях. Мы назовем статистику  $f = f(t_1, \dots, t_d)$  *однородной*, если ее значение при любом  $\lambda > 0$

$$f(\lambda t_1, \dots, \lambda t_d) = f(t_1, \dots, t_d). \quad (4.2.13)$$

Из условия (4.2.13) следует, что в том случае, когда вероятность безотказной работы имеет показательное распределение, распределение статистики  $f(t_1, \dots, t_d)$  не зависит от  $\lambda$ . Если заранее рассчитать таблицу квантилей  $f_{d,p}$  таких, что

$$P\{f(t_1, \dots, t_d) \leq f_{d,p} \mid d(t^*) = d\} = p,$$

то можно строить критерии для проверки показательности. Критерий, соответствующий уровню значимости  $\alpha$ , состоит в том, что гипотеза о показательном характере отвергается, когда  $f > f_{d, 1-\alpha}$ , и принимается, когда  $f \leq f_{d, 1-\alpha}$ . В сущности, все критерии настоящего параграфа построены по этому принципу. Однако здесь мы ограничимся только указанием на две статистики:  $\bar{\omega}$  и  $v$ . Эти статистики задаются формулами

$$\bar{\omega} = \frac{\sum_{i=1}^n |x_i - \bar{x}|}{2nx}, \quad v = \frac{\bar{x}}{s}, \quad (4.2.14)$$

где  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ,  $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ . Статистику  $\bar{\omega}$  называют

*статистикой Шермана* [7], [8]. Если вместо  $x_i$  подставить значение суммарной наработки в интервале между  $(i-1)$ -м и  $i$ -м отказами, то легко убедиться, что обе статистики удовлетворяют условию однородности, и их можно использовать для проверки гипотезы об экспоненциальности. Авторам неизвестны таблицы

квантилей или функций распределения этих статистик. Можно показать, что в том случае, когда значения  $x_i$  суть взаимно независимые случайные величины с функцией распределения  $F(t) = 1 - e^{-t}$ , то при  $n \rightarrow \infty$  двумерный случайный вектор

$$\{\sqrt{n}(\bar{x} - 1), \sqrt{n}(s^2 - 1)\}$$

имеет нормальное распределение со средними, равными нулю, и матрицей ковариаций  $\|c_{ij}\|$ ,  $c_{11} = 1$ ,  $c_{22} = 8$ ,  $c_{12} = c_{21} = 2$ . Используя асимптотическую лемму из § 1.6, где  $H(x, y) = \frac{x}{y}$ , получаем, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ v_n < 1 + \frac{t}{\sqrt{n}} \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{z^2}{2}} dz. \quad (4.2.15)$$

Таким образом, если окажется, что  $n \gg 1$  и  $|\sqrt{n}(v_n - 1)| > \frac{u_\alpha}{2}$ , где  $\frac{u_\alpha}{2}$  — квантиль нормального распределения, то гипотезу о

показательном виде вероятности безотказной работы надо отвергнуть. Барфоломью [8] исследовал сравнительную асимптотическую эффективность критериев, основанных на статистиках  $\bar{w}$  и  $v$ , когда роль конкурирующих гипотез играли  $\Gamma$ -распределения и распределение Вейбулла. Однако эффективность понималась в более узком, локальном смысле, когда значения параметров  $\Gamma$ -распределения и распределения Вейбулла изменялись таким образом, что эти распределения в пределе давали также показательное распределение.

$F$ -критерий для проверки постоянства функции опасности отказов. Как известно (см. главу 2), утверждение, состоящее в том, что вероятность безотказной работы  $R(t) = e^{-\lambda t}$ , эквивалентно условию, что функция опасности отказов  $\lambda(t) = -\frac{R'(t)}{R(t)} = \lambda$ . В качестве конкурирующих гипотез можно рассматривать такие, для которых  $\lambda(t)$  является либо монотонно убывающей, либо монотонно возрастающей функцией от  $t$ . Пусть испытания проводятся в соответствии либо с планом  $[N, B, r]$ , либо с планом  $[N, B, r]$ . В первом случае подсчитаем значения  $s_i$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ) суммарной наработки между отказами по формулам  $s_i = (N - i + 1)(t_i - t_{i-1})$ ,  $t_0 = 0$ ,  $i = 1, \dots, r$ , во втором случае — по формулам  $s_i = N(t_i - t_{i-1})$ . В обоих случаях  $s_i$  — взаимно независимые случайные величины с функциями распределения, равными  $1 - e^{-\lambda t}$ . Отсюда следует, что  $2\lambda s_i$  имеет  $\chi^2$ -распределение с двумя степенями свободы. Пусть  $r = r_1 + r_2$ , где  $r_1 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ;

тогда из формулы 4.1.9 следует, что случайная величина

$$\varphi(r_1, r_2) = \frac{r_2 \sum_{i=1}^{r_1} s_i}{r_1 \sum_{i=r_1+1}^{r_2} s_i} \quad (4.2.16)$$

имеет  $F$ -распределение с числом степеней свободы  $\nu_1 = 2r_1$ ,  $\nu_2 = 2r_2$ . Пусть  $f_p(\nu_1, \nu_2)$  — квантиль  $F$ -распределения, соответствующий уровню  $p$ .

$F$ -критерий, соответствующий уровню значимости  $1 - \alpha$ , с нулевой гипотезой  $H_0 = \{h(t) = \lambda\}$  против конкурирующей гипотезы  $H_1 = \{h(t) \neq \text{const}, h(t) \text{ либо возрастает, либо убывает}\}$  описывается следующей системой правил.

Гипотеза  $H_0$  принимается, если

$$\begin{aligned} \psi(r_1, r_2) &= \max \{ \varphi(r_1, r_2), [\varphi(r_1, r_2)]^{-1} \} = \\ &= \begin{cases} \varphi(r_1, r_2) < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_1, r_2), \\ [\varphi(r_1, r_2)]^{-1} < f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_2, r_1); \end{cases} \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

в противном случае эта гипотеза отвергается. Если окажется, что  $\psi(r_1, r_2) = \varphi(r_1, r_2) > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_1, r_2)$ , то принимается конкурирующая гипотеза, состоящая в том, что  $\lambda(t)$  убывает, если же  $\psi(r_1, r_2) = [\varphi(r_1, r_2)]^{-1} > f_{1-\frac{\alpha}{2}}(r_2, r_1)$ , то принимается конкурирующая гипотеза, что  $\lambda(t)$  возрастает.

Рассмотрим численный пример. Пусть испытания проводились в соответствии с планом  $[N=100, B, r=6]$ . Моменты отказов оказались равными  $t_1=3, t_2=10, t_3=20, t_4=34, t_5=48, t_6=70$ . Значения суммарных наработок соответственно равны  $s_1=300, s_2=693, s_3=980, s_4=1358, s_5=1344, s_6=2090$ . Пусть  $r_1=r_2=3$ , тогда

$$\varphi(3, 3) = \frac{300 + 693 + 980}{1358 + 1344 + 2090} \approx (3,5)^{-1}.$$

Так как  $\varphi < 1$ , то  $\psi(3, 3) = [\varphi(3, 3)]^{-1} \approx 3,5$ . Из таблицы, аналогичной таблице 11 приложения, находим, что  $f_{0,9}(6,6) = 3,055 < \varphi(3,3) = 3,5$ ; таким образом, гипотеза  $H_0$  должна быть отвергнута, если уровень значимости  $1 - \alpha = 0,9$ . Заметим, однако, что  $f_{0,95}(6,6) = 4,284$ . Таким образом, если бы был выбран уровень  $1 - \alpha = 0,95$ , то гипотезу  $H_0$  следовало бы принять. Как же поступить, если очевидно, что выбор  $\alpha = 0,1$  весьма условен?

Можно рассуждать следующим образом. Налицо имеется тенденция к уменьшению функции опасности отказов  $\lambda(t)$ . Однако

количество данных, полученных в результате испытаний, явно недостаточно. Образно говоря, испытания были прекращены «в самом интересном месте». Решаем продолжить испытания до  $r=10$ . В результате продолжения испытаний имеем  $t_7=108$ ,  $t_8=147$ ,  $t_9=204$ ,  $t_{10}=264$ . Значения соответствующих суммарных наработок равны  $s_7=3572$ ,  $s_8=3627$ ,  $s_9=5244$ ,  $s_{10}=6000$ . Пусть теперь  $r_1=5$ ,  $r_2=5$ . Здесь  $\varphi(5,5)=(4,4)^{-1}$ ; таким образом,  $\varphi(5,5)\approx 4,5$ .  $f_{0,975}(10,10)=3,717 < 4,5$ , поэтому гипотезу  $H_0=\{\lambda(t)=\lambda\}$  следует отвергнуть в пользу гипотезы, что  $\lambda(t)$  является монотонно убывающей функцией. Степень уверенности в отвержении гипотезы  $H_0$  резко возросла.

Критерий  $\chi^2$  для проверки постоянства функции опасности отказов. При описании критерия Колмогорова отмечалось, что в том случае, когда верна гипотеза  $H_0=\{\lambda(t)=\lambda>0\}$ , точки  $\omega_i$ ,  $i=1, \dots, d^*$ , рассчитанные по формулам (4.2.7) или (4.2.8), можно рассматривать как вариационный ряд из  $d^*$  взаимно независимых случайных величин  $\xi_1, \dots, \xi_{d^*}$ , каждая из которых имеет равномерное распределение в интервале  $[0, 1]$ . Так как  $-2 \ln \xi_i$  имеет  $\chi^2$ -распределение с 2 степенями свободы, то

$$\gamma_{d^*} = -2 \sum_{i=1}^{d^*} \ln \omega_i = -2 \sum_{i=1}^{d^*} \ln \xi_i \quad (4.2.18)$$

имеет  $\chi^2$ -распределение с  $2d^*$  степенями свободы. Если используется план одного из типов  $[N, B, r]$ ,  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$  и т. п., то по соответствующей формуле (4.2.7) или (4.2.8) мы можем найти значения точек  $\omega_i$ , а затем по формуле (4.2.18) подсчитать значение статистики  $\gamma_{d^*}$ . Если окажется, что (а)  $\gamma_{d^*} > \chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(2d^*)$  или (б)

$\gamma_{d^*} < \chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(2d^*)$ , где  $\chi_p^2(2d^*)$  — квантили уровня  $p$  для  $\chi^2$ -распределения с  $2d^*$  степенями свободы, то гипотеза  $H_0=\{\lambda(t)=\lambda\}$  отвергается и в случае (б) принимается гипотеза, что  $\lambda(t)$  монотонно возрастает, а в случае (а) — что  $\lambda(t)$  монотонно убывает. Эпштейн в своей статье [5] рекомендует также использовать известный критерий Бартлетта для проверки постоянства дисперсий  $D_{\xi_i}^2$ .

Критерий Фишера для проверки совместимости гипотезы о показателности с наличием большого интервала между отказами. Иногда может оказаться, что один из испытываемых элементов работает безотказно в течение очень большого интервала времени испытания. Может также случиться, что при испытаниях системы встретится один очень большой интервал безотказной работы. Излагаемый ниже критерий Фишера [9] может быть использован для проверки совместимости

наличия такого интервала с гипотезой о показательном характере распределения времени безотказной работы.

Статистика

$$\eta_{d^*} = \frac{\max_{1 \leq i \leq d^*} x_i}{d^*} \sum_{i=1}^r x_i \quad (4.2.19)$$

является однородной. Следовательно, если  $x_i$  взаимно независимы и имеют показательное распределение  $F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ , то распределение  $\eta_n$  не зависит от  $\lambda$ . Фишер [9], показал, что

$$P\{\eta_n > g\} = \sum_{k=1}^r (-1)^{k-1} C_n^k (1 - kg)^{n-1}. \quad (4.2.20)$$

В таблице 13 приложения даны значения  $g_\alpha(n)$ ,  $\alpha = 0,05$ , такие, что  $P\{\eta_n > g(n)\} = \alpha$ ,  $n = 5(5)50$ .

Как уже неоднократно указывалось выше, при использовании планов, в которых момент остановки  $t^* = t_r$  или  $t^* = T$ , значения времени  $S_i$  суммарной наработки в интервалах  $(t_{i-1}, t_i)$  между двумя последовательными отказами — взаимно независимые случайные величины с функциями распределения, равными  $1 - e^{-\lambda t}$ . Из этого следует, что при выполнении гипотезы  $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$

$$P\left\{\frac{\max_{1 \leq i \leq d^*} S_i}{S^*} > g_\alpha(d^*) \mid d(t^*) = d^*\right\} = \alpha, \quad (4.2.21)$$

где  $S^*$  — значение суммарной наработки к моменту  $t^*$  остановки испытаний и  $d^* = r$ , если  $t^* = t_r$ ; если  $t^* = T$ , то  $S^* = S(t_d(T))$  и  $d^* = d(T)$ . Значения  $S_i$  вычисляются по формулам

$$S_i = \begin{cases} (N - i + 1)(t_i - t_{i-1}) & \text{для планов типа } B, \\ N(t_i - t_{i-1}) & \text{для планов типа } B. \end{cases} \quad (4.2.22)$$

Критерий Фишера, соответствующий уровню значимости  $\alpha$ , состоит в том, что гипотеза  $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$  отвергается, когда

$\max_{1 \leq i \leq d^*} \frac{S_i}{S^*} > g_\alpha(d^*)$ ; в противном случае гипотеза  $H_0$  принимается.

Рассмотрим числовой пример на использование этого критерия. Предположим, что производится регистрация отказов, возникающих в цифровой вычислительной машине. Результаты регистрации оказались следующими:  $t_1 = 16$ ,  $t_2 = 39$ ,  $t_3 = 45$ ,  $t_4 = 55$ ,  $t_5 = 305$ ,  $t_6 = 319$ ,  $t_7 = 325$ ,  $t_8 = 345$ ,  $t_9 = 376$ ,  $t_{10} = 420$ . Поскольку испытывается один образец и возникающие отказы устраняются, то в соответствии с полученными данными можно считать, что испытания проводятся по плану типа  $[N = 1, B, r = 10]$ . По формуле (4.2.22)



находим, что  $S_1 = 16$ ,  $S_2 = 13$ ,  $S_3 = 6$ ,  $S_4 = 10$ ,  $S_5 = 250$ ,  $S_6 = 14$ ,  $S_7 = 6$ ,  $S_8 = 20$ ,  $S_9 = 31$ ,  $S_{10} = 44$ . Вычисляя статистику, входящую под знаком вероятности в формулу (4.2.21), получаем, что

$$\frac{\max_{1 \leq i \leq 10} S_i}{S(t_{10})} = \frac{250}{420} = 0,59 > g_{0,05}(10);$$

таким образом, гипотеза о показателем характере распределения интервалов должна быть отвергнута.

Появление большого интервала между отказами может быть связано с тем, что гипотеза  $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$  не имеет места. Но ведь могут быть и другие неожиданные причины. В данном случае оказалось, что работник, регистрировавший отказы, ушел в отпуск, в течение которого отказы не регистрировались. Этот пример поучителен тем, что привлекает внимание исследователей к необходимости более тщательного предварительного анализа достоверности полученных данных.

Критерий Хартли для проверки совместимости гипотезы о показателем с наличием большого и малого интервалов между отказами. Для проверки совместимости наличия малого и большого интервалов между отказами можно использовать критерий, предложенный Хартли [10]. Хартли изучил распределение однородной статистики

$$h(r, n) = \frac{\max_{1 \leq i \leq n} x_i}{\min_{1 \leq i \leq n} x_i}, \quad (4.2.23)$$

где  $x_1, \dots, x_n$  — взаимно независимые случайные величины, имеющие  $\chi^2$ -распределение с  $r$  степенями свободы. Для различных значений  $r, n$  им были подсчитаны таблицы квантилей  $h_{1-\alpha}(r, n)$ , для которых

$$P\{h(r, n) > h_{1-\alpha}(r, n)\} = \alpha,$$

где  $\alpha = 0,05$ ,  $\alpha = 0,01$ . Таблица 12 значений этих квантилей дана в приложении. Если обозначить через  $S_i$  значения суммарных наработок, вычисленные по формулам (4.2.22), а через  $d^*$  — число отказов, происшедших за время испытаний, то статистика

$$h(2, d^*) = \frac{\max_{1 \leq i \leq d^*} S_i}{\min_{1 \leq i \leq d^*} S_i} \quad (4.2.24)$$

имеет распределение, совпадающее с распределением статистики, задаваемой формулой (4.2.23), когда  $r = 2$ ,  $n = d^*$ . Это непосредственно вытекает из того факта, что  $2\lambda S_i$  взаимно независимы и имеют  $\chi^2$ -распределение с двумя степенями свободы. Таким образом,

применительно к задаче проверки гипотезы об экспоненциальном характере вероятности безотказной работы критерий Харгли, соответствующий уровню значимости  $\alpha$ , описывается следующей системой правил. Если значение статистики, вычисляемой по формуле (4.2.23), таково, что  $h(2, d^*) > h_{1-\alpha}(2, d^*)$ , то гипотезу  $H_0 = \{\lambda(t) = \lambda > 0\}$  следует отвергнуть. В противном случае эта гипотеза проверяется. Заметим, что было бы полезно иметь значения квантилей  $h_\alpha(2, n)$  для малых значений  $\alpha = 0,05$  (0,01), так как тогда можно было бы проверять гипотезу  $H_0$ , когда роль конкурирующей гипотезы играют распределения, близкие к регулярным.

### § 4.3. Критерии проверки гипотез о значениях параметра показательного распределения

Предположим, что вероятность безотказной работы можно считать равной  $e^{-\lambda t}$ , где  $\lambda \geq 0$  — неизвестное нам значение параметра  $\lambda$ . В задачах теории надежности наибольший интерес представляет проверка сложных гипотез вида  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ ,  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ , где  $\lambda_0$  — фиксированное значение параметра. Значение  $\lambda_0$  задают таким образом, что при  $\lambda \leq \lambda_0$  продукцию (элементы, системы и т. п.) можно считать надежной, а при значениях  $\lambda > \lambda_0$  — ненадежной или недостаточно надежной. Можно представить и более общую постановку вопроса, когда имеется несколько гипотез, например  $H'_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ ,  $H'_1 = \{\lambda_0 < \lambda < \lambda_1\}$ ,  $H'_2 = \{\lambda \geq \lambda_1\}$ . Здесь  $H'_0$  соответствует высоконадежным элементам,  $H'_1$  — элементам средней надежности, а  $H'_2$  — элементам с низкой надежностью. Мы ограничимся только случаем построения критериев для проверки двух гипотез  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ ,  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ . При этом критерии будут строиться на основе теоремы 4.1.1 (Неймана — Пирсона). Вид критерия существенным образом зависит от плана, в соответствии с которым производятся испытания на надежность. Будем считать, что в начальный момент испытываются  $N$  элементов. Одна из весьма общих схем планирования испытаний состоит в том, что заранее задается система правил, определяющих момент  $t^*$  окончания испытаний. При этом предполагается, что момент окончания испытаний зависит от моментов отказов элементов  $t_i \leq t^*$ , т. е.  $t^*$  — величина, не зависящая от будущего. В этом случае достаточными статистиками будут  $d(t^*)$  — число отказавших к моменту остановки  $t^*$  элементов и  $S(t^*)$  — суммарная наработка. Для планов типа  $B$  (см. главу 3)

$$S_B(t^*) = Nt^*, \quad (4.3.1)$$

а для планов типа  $B$

$$S_B(t^*) = t_1 + \dots + t_{d(t^*)} + [N - d(t^*)]t^*. \quad (4.3.2)$$

Пространство  $X = \{x\}$  исходов опыта состоит из последовательностей моментов отказов  $t_i \leq t^*$ , происшедших ранее момента остановки, т. е.  $x = (t_1, \dots, t_{d(t^*)}, t^*)$ . Соответственно функции правдоподобия при использовании планов типа  $B$  задается соотношением

$$p(t_1, \dots, t_{d(t^*)}, t^* | \lambda) = (N\lambda)^{d(t^*)} e^{-\lambda S_B(t^*)}, \quad (4.3.3)$$

где  $S_B(t^*)$  находится по формуле (4.3.1). В случае применения планов типа  $B$

$$p(t_1, \dots, t_{d(t^*)}, t^* | \lambda) = \lambda^{d(t^*)} N(N-1) \dots [N-d(t^*)+1] e^{-\lambda S_B(t^*)}, \quad (4.3.4)$$

где  $S_B(t^*)$  находится по формуле (4.3.2).

Из (4.3.3) и (4.3.4) получаем, что отношение правдоподобия

$$\frac{p(x | \lambda_1)}{p(x | \lambda_0)} = \exp [d(t^*) \left( \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) - (\lambda_1 - \lambda_0) S(t^*)], \quad (4.3.5)$$

где  $\lambda_1 > \lambda_0$ . Таким образом, из (4.3.5) следует, что критическое множество отбирается среди семейства множеств вида

$$X_c = \left\{ d(t^*), S(t^*) : d(t^*) \ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) - (\lambda_1 - \lambda_0) S(t^*) > c \right\}. \quad (4.3.6)$$

Как следует из теоремы Неймана—Пирсона, критерий с критическим множеством, входящим в семейство множеств, определяемых формулой (4.3.6) при заданной ошибке первого рода, соответствующей значению  $\lambda = \lambda_0$ , имеет наименьшую ошибку второго рода при  $\lambda = \lambda_1$  (всюду ниже  $\lambda_1 > \lambda_0$ ). Рассмотрим теперь конкретные планы стеновых испытаний, введенные в главе 3.

План типа  $[N, B, T]$ . При использовании плана  $[N, B, T]$  момент остановки испытаний  $t^* = T$ , т. е. не зависит от хода испытаний. Статистика  $s(t^*) = NT$  не содержит в себе никакой информации о параметре  $\lambda$ , так как ее значение может быть вычислено до начала испытаний. Поэтому из (4.3.6) находим, что семейство множеств, содержащих критическое, имеет вид

$$X_c = \{d(T) > c\}. \quad (4.3.7)$$

Напомним обозначения, использовавшиеся в главе 3,

$$L_c(\lambda) = \sum_{d=0}^c \frac{\lambda^d}{d!} e^{-\lambda}, \quad L_d(\Delta_c(d)) = \varepsilon. \quad (4.3.8)$$

Напоминаем также, что значения  $\Delta_c(d)$  даны в таблице 7 приложения. Для построения критерия, имеющего уровень значимости, не большим  $\alpha$  при значении  $\lambda = \lambda_0$ , мы отбираем такое

наименьшее целое  $c > 0$ , что

$$P\{d(T) > c | \lambda_0\} = \sum_{d=c+1}^{\infty} \frac{(N\lambda_0 T)^d}{d!} e^{-N\lambda_0 T} = 1 - L_c(N\lambda_0 T) \leq \alpha.$$

Замечая, что  $L_d(x)$  является убывающей функцией от  $x$ , получаем, что в качестве  $c$  надо взять наименьшее целое  $c$ , для которого

$$N\lambda_0 T \leq \Delta_{1-\alpha}(c). \quad (4.3.9)$$

Итак, критерий состоит в том, что приемочное число  $c$ , найденное из (4.3.9) сравнивают с фактическим числом отказов  $d(T)$ . Если  $d(T) \leq c$ , то гипотеза  $\lambda = \lambda_0$  или  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  проверяется, а гипотеза  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$  отвергается. При этом величина ошибки первого рода равна  $1 - L_c(\lambda_0 NT) \leq \alpha$ . Замечая далее, что выполнено второе условие теоремы 4.1.2, получаем, что найденный критерий является равномерно наиболее мощным. При этом функция мощности равна вероятности отвержения гипотезы. Когда значение параметра равно  $\lambda > 0$ , функция мощности задается формулой

$$W(\lambda) = 1 - L_c(N\lambda T). \quad (4.3.10)$$

$W(\lambda)$  является неубывающей функцией от  $\lambda$ .

Если параметры, определяющие критерий, заданы и найдено значение  $c = c(\alpha, T)$ , то можно проводить испытания по сокращенной программе, прекращая испытания в момент  $t_{c+1}$  наступления  $(c+1)$ -го отказа, если только  $t_{c+1} < T$ . При этом гипотеза  $H_0$  отвергается. При таком перепланировании мы фактически переходим от использования плана  $[N, B, T]$  к плану  $[N, B, (c+1, T)]$ , что должно быть учтено при построении точечных и интервальных оценок параметра  $\lambda$ . При этом, однако, функция мощности остается неизменной и задается формулой (4.3.10).

План типа  $[N, B, r]$ . Испытания прекращаются в момент  $t_r$  наступления  $r$ -го отказа. Так как  $t^* = t_r$ , то  $d(t_r) = r$  и статистика  $d(t^*)$  становится тривиальной. Вся информация о параметре  $\lambda$  содержится в суммарной наработке  $S_B(t_r)$ , которая имеет распределение (см. § 3.3), задаваемое формулой

$$P\{\lambda S_B(t_r) < X | \lambda\} = \int_0^X \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt = 1 - L_{r-1}(x). \quad (4.3.11)$$

Семейство множеств  $X_c$  в формуле (4.3.6) эквивалентно семейству

$$\{S_B(t_r) < S\}.$$

Учитывая (4.3.11), находим такое  $S_\alpha$ , для которого

$$P\{S_B(t_r) < S_\alpha | \lambda_0\} = 1 - L_{r-1}(\lambda_0 S_\alpha) = \alpha. \quad (4.3.12)$$

Из уравнения (4.3.12), используя обозначения (4.3.8), имеем

$$S_{\alpha} = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}. \quad (4.3.13)$$

Условия теоремы (4.1.2) снова выполнены, поэтому критерий, соответствующий плану  $[N, B, r]$  с уровнем значимости  $\alpha$ , является равномерно наиболее мощным. Функция мощности критерия

$$W(\lambda) = P\{S_B(t_r) < S_{\alpha}\} = 1 - L_{r-1}\left(\Delta_{1-\alpha}(r-1) \frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \quad (4.3.14)$$

План типа  $[N, B, (r, T)]$ . Если при использовании плана  $[N, B, (r, T)]$  окажется, что  $t_r > T$ , то  $t^* = T$  и статистика  $S(t^*) = NT$  является тривиальной, если же  $t_r \leq T$ , то  $t^* = t_r$  и тривиальной является статистика  $d(t^*) = r$ . Семейство критических множеств имеет вид (4.3.6).

Рассмотрим на плоскости  $(x, y)$  точки  $(d(t), S_B(t))$ . В момент остановки испытаний  $t^* = \min(t_r, T)$  значения  $(d(t^*), S_B(t^*))$  находятся на прямой  $d = r$ ,  $S_B(t) = Nt_r < NT$ , если  $t_r < T$  или в одной из вертикально расположенных точек  $d(T) = 0, 1, \dots, r-1$  и  $S_B(t^*) = NT$ , если  $t_r \geq T$ . Возможные состояния показаны на рис. 4.3.1 жирной линией и точками. На плоскости  $(x, y)$  семейство критических множеств представляется совокупностью точек  $(d(t^*), S_B(t^*))$ , лежащих выше прямой  $(\ln(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}))y - (\lambda_1 - \lambda_0)x = k$ , где  $\lambda_1 > \lambda_0$ . При уменьшении  $k$  вероятность попадания финального состояния  $(d(t^*), S_B(t^*))$  в

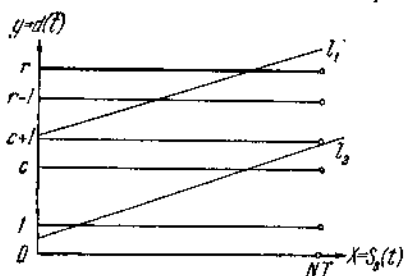


Рис. 4.3.1.

это критическое множество является неубывающей функцией. Возможны два случая. В первом  $k = k_1$  велико и критическое множество состоит только из точек отрезка, являющегося частью отрезка  $d(t^*) = r, 0 \leq S_B(t^*) \leq NT$ . Во втором случае  $k = k_2$  мало ( $k_2 < k_1$ ) и критическое множество состоит из точек всего отрезка  $d(t^*) = r, 0 \leq S(t^*) \leq NT$ , и точек  $(d(T); NT)$ , где  $d(T) > c$ .

Оба эти случая показаны на рис. 4.3.1;  $k = k_1$  соответствует прямой  $l_1$ , а  $k = k_2$  — прямой  $l_2$ . При выборе критического множества, задающего критерий с уровнем значимости, не большим  $\alpha$ , надо поступать следующим образом. Если

$$P\{t_r < T | \lambda_0\} = 1 - L_{r-1}(N\lambda_0 T) \geq \alpha,$$

то находим число  $S_{\alpha}$ , для которого

$$P(S_B(t_r) < S_{\alpha} | \lambda_0) = 1 - L_{r-1}(\lambda_0 S_{\alpha}) = \alpha. \quad (4.3.15)$$

(4.3.15) эквивалентно соотношению  $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$ . Если же окажется, что  $\mathbf{P}\{t_r < T | \lambda_0\} < \alpha$ , то в критическое множество включаем часть точек  $d(T) > c$ ,  $S_B(T) = NT$ , где  $c < r-1$ . Как легко заметить, событие, состоящее в том, что либо  $t_r < T$ , либо  $d(T) > c$ , эквивалентно событию  $d(T) > c$ . Следовательно, приемочное число  $c$  находится из условия

$$\mathbf{P}\{t_r < T \cup \{t_r > T, d(T) > c\} = \sum_{d=c+1}^{\infty} \frac{(N\lambda_0 T)^d}{d!} e^{-N\lambda_0 T} = 1 - L_c(N\lambda T) \leq \alpha, \quad (4.3.16)$$

причем в качестве  $c$  берется наименьшее целое число, удовлетворяющее (4.3.16). Итак, критерий для проверки гипотезы  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  с уровнем значимости, не большим  $\alpha$ , состоит в следующем.

Если  $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0} < NT$ , то испытания проводим до момента  $t^* = \min(t_r, T)$ . Если при этом окажется, что  $S_B(t_r) < S_\alpha$ , то гипотезу  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергаем и принимаем гипотезу  $H_1 = \{\lambda \geq \lambda_0\}$ . Если же либо  $t_r < T$  и  $S_B(t_r) \geq S_\alpha$ , либо  $t_r > T$ , то гипотезу  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  принимаем. Если же  $S_\alpha > NT$ , то из условия (4.3.16) находим наименьшее целое  $c$  такое, что  $N\lambda_0 T \leq \Delta_{1-\alpha}(c)$ . Испытания проводим до момента  $t^* = \min(t_r, T)$ . При этом, если либо  $t_r < T$ , либо  $t_r > T$  и  $d(T) > c$ , то гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается и принимается конкурирующая гипотеза  $H_1 = \{\lambda \geq \lambda_0\}$ . Если же  $t_r > T$  и  $d(T) \leq c$ , то принимается гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ . Замечая, что при этом нигде не было использовано значение  $\lambda = \lambda_1$ , входящее в конкурирующую гипотезу, мы убеждаемся в справедливости первой части теоремы 4.1.2. Таким образом, построенный критерий является равномерно наиболее мощным среди нерандомизированных критериев с уровнем значимости, не большим  $\alpha$ . Функция мощности этого критерия определяется по формуле

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1 - L_{r-1}\left(\Delta_{1-\alpha}(r-1) \frac{\lambda}{\lambda_0}\right), & \text{если } NT \geq \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}, \\ 1 - L_c(N\lambda T), & \text{если } NT < \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}. \end{cases} \quad (4.3.17)$$

Не меняя функции мощности, испытания можно провести по сокращенной программе. Действительно, если  $NT > S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$ , то испытания прекращаются либо в тот момент  $t' < t^* = \min(t_r, T)$ , когда значение суммарной наработки равно  $S_\alpha$ , если при этом  $d(t') < r$ , либо в момент  $t_r$ , если  $S_B(t_r) < S_\alpha$ . В этом случае вместо плана  $[N, B, (r, T)]$  используется план  $[N, B, (r, HS)]$ , т. е. план, при котором наблюдения ведутся либо до момента  $t_r$ , либо до момента

$t' < t_r$ , если суммарная наработка  $S_B(t') = S_\alpha$ . В том случае, когда  $NT < S_\alpha$ , вместо плана  $[N, B, (r, T)]$  используем план  $[N, B, (c, T)]$ , где  $c$  — наименьшее из целых чисел  $s$ , таких, что  $N\lambda_0 T \leq \Delta_{1-\alpha}(c)$ .

План типа  $[N, B, (r, HS_0)]$ . Как уже указывалось, в некоторых случаях план типа  $[N, B, (r, T)]$  сводится к такому плану. Следует, однако, заметить, что в свою очередь план  $[N, B, (r, HS_0)]$  эквивалентен плану  $[N, B, (r, \frac{S_0}{N})]$ , так как момент достижения  $t' < t_r$  суммарной наработки  $S_B(t') = Nt' = S_0'$  задает момент окончания испытаний  $t' = T = S_0/N$ .

Планы типа  $B$ . План  $[N, B, T]$ . Как следует из (4.3.4), достаточные статистики  $d(T)$  и  $S_B(T)$  обе являются нетривиальными.  $d(T)$  имеет биномиальное распределение

$$P\{d(t) = d | \lambda\} = C_N^d (1 - e^{-\lambda T})^d e^{-\lambda T (N-d)}. \quad (4.3.18)$$

При условии, что  $d(T) = d > 0$ ,  $S_B(T) = \sum_{k=1}^d t_k + (N-d)T$ , где  $\xi_d = \sum_{k=1}^d t_k$  есть сумма  $d$  значений взаимно независимых случайных величин с функциями распределения, имеющими плотности  $p(t) = \frac{\lambda e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda T}}$  для

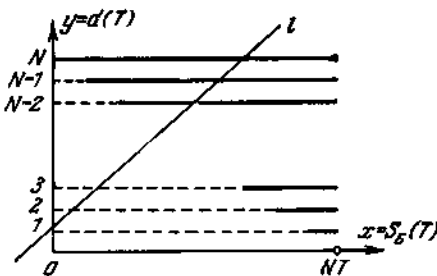


Рис. 4.3.2.

значений  $0 < t < T$  и  $p(t) = 0$ , когда  $t > T$  или  $t < 0$ . Плотность  $p(t | \lambda, d)$  распределения  $S_B(t)$  при условии  $d(T) = r$  можно легко найти, используя обратное преобразование Фурье характеристической функции

$$\begin{aligned} \psi(z) &= M \exp(i \xi_d z) = \\ &= \{\lambda [e^{(iz-\lambda)T} - 1] (iz - \\ &\quad - \lambda)^{-1} (1 - e^{-\lambda T})^{-1}\}^d r. \end{aligned}$$

Если по оси  $Ox$  отложить значения  $S_B(T)$ , а по оси

$Oy$  —  $d(T)$ , то в момент  $T$  значения достаточных статистик попадут в интервалы точек  $(x, y)$ ,  $x = 0, \dots, N$ ;  $(N-x)T < y < NT$ . Критическое множество состоит из точек, удовлетворяющих неравенству (4.3.6), т. е. лежащих выше прямой  $l$  (рис. 4.3.2), задаваемой уравнением

$$\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) d(T) - (\lambda_1 - \lambda_0) S_B(T) = k. \quad (4.3.19)$$

Пусть  $p(s | \lambda, d)$  — условная плотность вероятностей наработки  $S_B(T)$ , когда  $d(T) = d$ ; тогда константа  $k$  находится из условия

$$\sum_{d=1}^N \left[ \int_{(N-d)T}^{R(d,k)} p(s | d, \lambda_0) ds \right] \cdot C_N^d [1 - e^{\lambda_0 T}]^d e^{-\lambda_0 T (N-d)} = \alpha, \quad (4.3.20)$$

где  $R(d, k)$ , как это следует из (4.3.19), определяются соотношением

$$R(d, k) = \max \left\{ (N-d) T, \left[ \ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) d - k \right] (\lambda_1 - \lambda_0)^{-1} \right\}. \quad (4.3.21)$$

Построенный критерий, имеющий уровень значимости  $1 - \alpha$ , состоит в том, что в момент  $t = T$  испытания прекращаются. Если

$$\left[ \ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \right] d(T) - (\lambda_1 - \lambda_0) S_B(T) > k_\alpha, \quad (4.3.22)$$

то гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается и принимается конкурирующая гипотеза. В противном случае гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  проверяется. Этот критерий имеет наибольшую мощность в точке  $\lambda = \lambda_1$ , однако он не является равномерно наиболее мощным. Функция мощности для этого критерия определяется по формуле

$$W(\lambda) = \sum_{d=1}^N \int_{(N-d)T}^{R(d, k_\alpha)} p(s|d, \lambda) ds C_N^d [1 - e^{-\lambda T}]^d e^{-\lambda T (N-d)}. \quad (4.3.23)$$

Из формул (4.3.20)–(4.3.23) видно, что для использования этого критерия нужны специальные таблицы, которых в настоящее время нет<sup>1)</sup>. Может быть предложен упрощенный критерий (и заведомо худший сравнительно с описанным выше) принятия решения только по значениям статистики  $d(T)$ . Здесь рекомендуется подобрать наименьшее целое  $c$  такое, что

$$\sum_{d=c+1}^N C_N^d (1 - e^{-\lambda_0 T})^d e^{-\lambda_0 T (N-d)} \leq \alpha.$$

Гипотезу  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергают в пользу конкурирующей, если  $d(T) > c$ . Если же  $d(T) \leq c$ , то гипотеза  $H_0$  принимается.

Заметим, что без изменения функции мощности  $W(\lambda)$ , задаваемой формулой (4.3.23), испытания можно проводить по сокращенной программе. Момент остановки  $t^*$  соответствует тому моменту, когда уже очевидно, что при  $t = T$  для  $d(T)$  и  $S_B(T)$  будет выполняться неравенство (4.3.22) или противоположное ему неравенство. В общем случае  $t^*$  зависит от положения прямой  $l$ , и для краткости изложения мы опускаем описание правил сокращения времени испытаний без изменения функции мощности, заданной уравнением (4.3.23).

<sup>1)</sup> Как показали численные расчеты, проведенные Ю. К. Беляевым совместно с Е. В. Чепуриным и Т. Н. Топорищевой, для *малых* отношений  $d(T)/N$  выигрыш от использования пары статистик  $\{\bar{d}(T), S_B(T)\}$  невелик. Здесь хорошие результаты дают рандомизированные критерии, аналогичные (4.3.7), но со случайным выбором  $c$ .



План типа  $[N, B, r]$ . Здесь  $t^* = t_r$ ,  $d(t^*) = r$ , т. е. тривиальная статистика, а  $S_B(t_r) = \sum_{d=0}^r t_d + (N-d)t_r$  имеет функцию распределения, для которой

$$P\{S_B(t_r) < S|\lambda\} = \int_0^{\lambda S} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt. \quad (4.3.24)$$

Критическое множество имеет вид

$$S_B(t_r) < S_\alpha,$$

где в соответствии с (4.3.24) и (4.3.8)  $S_\alpha$  находится как решение уравнения

$$\int_0^{\lambda_0 S_\alpha} \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} e^{-t} dt = 1 - L_{r-1}(\lambda_0 S_\alpha) = \alpha, \quad (4.3.25)$$

т. е.  $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$ . Итак, если  $S_B(t_r) < \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$ , то гипотеза  $H_1 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается, если же  $S_\alpha \geq \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}$ , то гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  принимается. Этот критерий является равномерно наиболее мощным критерием с уровнем значимости  $\alpha$ . Функция мощности равна

$$W(\lambda) = 1 - L_{r-1}\left(\Delta_{1-\alpha}(r-1) \frac{\lambda}{\lambda_0}\right). \quad (4.3.26)$$

При испытаниях по сокращенной программе  $t^*$  определяется как момент, когда либо суммарная наработка достигла уровня  $S_\alpha$  и  $t_r > t^*$ , либо  $t^* = t_r$  и  $S_B(t_r) < S_\alpha$ . В первом случае отвергается гипотеза  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ , во втором случае отвергается гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ . Заметим, что при таком сокращении испытания проводятся по плану  $[N, B, (r, HS_\alpha)]$ .

План типа  $[N, B, (r, T)]$ . Построение критерия проводится аналогично построению для плана  $[N, B, T]$ . Момент остановки

$t^* = \min(t_r, T)$ , поэтому возможные значения  $d(t^*)$  совпадают с интервалами, содержащими точки вида  $(d, y)$ , где  $d = 0, \dots, r$ ,  $(N-d)T \leq y \leq NT$ . Заметим, что  $P\{d(t^*) = k|\lambda\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$ , где  $1-p = e^{-\lambda T}$ , а  $k < r$ ,  $P\{d(t^*) = r|\lambda\} =$

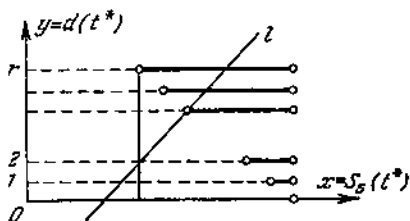


Рис. 4.3.3.

$= \sum_{k=r}^N C_N^k p^k (1-p)^{N-k}$ . Пусть  $p_B(s|d, \lambda)$  — условная плотность распределения  $S_B(T^*)$  при условии  $d(t^*) = d$ . Критическое множество состоит из точек, лежащих выше прямой  $l$  (рис. 4.3.3).

$$\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)x - (\lambda_1 - \lambda_0)y = k.$$

Константа  $k = k_\alpha$  подбирается таким образом, чтобы при  $\lambda = \lambda_0$  вероятность того, что значения  $d(t^*)$ ,  $S_B(t^*)$  попадут выше прямой, была бы равна  $\alpha$ . Выражая эту вероятность через условные плотности  $p_B(s|r, \lambda)$  и приравнявая  $\alpha$ , получаем трансцендентное уравнение

$$\sum_{d=1}^r \int_{(N-d)T}^{R(k_\alpha, \alpha)} p_B(s|\lambda_0, d) ds \mathbf{P}\{d(t^*) = d\} = \alpha, \quad (4.3.27)$$

где  $R(k_\alpha, \alpha) = \max \left[ (N - \alpha)T, \left( \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - k_\alpha \right) (\lambda_1 - \lambda_0)^{-1} \right]$ .

Итак, если  $k_\alpha$  найдено, то гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается, когда имеет место неравенство

$$\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) d(t^*) - (\lambda_1 - \lambda_0) S_B(t^*) > k. \quad (4.3.28)$$

Если выполняется неравенство, противоположное (4.3.28), то гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  принимается. Так же как и критерий для плана  $[N, B, T]$ , построенный критерий не является равномерно наиболее мощным. Он обеспечивает наименьшую ошибку второго рода только в точке  $\lambda = \lambda_1$ . Функция мощности для такого критерия задается формулой

$$W(\lambda) = \sum_{d=1}^r \int_{(N-d)T}^{R(\alpha, k_\alpha)} p_B(s|\lambda, d) dr \cdot \mathbf{P}\{d(t^*) = d|\lambda\}. \quad (4.3.29)$$

Как и для случая плана типа  $[N, B, T]$ , не изменяя функции мощности, можно было бы проводить испытания по сокращенной программе, прекращая их в тот момент, после которого при любом дальнейшем ходе испытаний знак неравенства (4.3.28) или противоположного ему неравенства уже не может измениться.

План типа  $[N, B, (r, HS_0)]$ . Для планов типа  $[N, B, (r, HS_0)]$  момент остановки  $t^*$  совпадает либо с моментом  $t_r$ , либо с моментом, когда впервые значение суммарной наработки станет равным заданному числу  $S_0$ . Частным случаем планов такого типа является план  $[N, B, (N, HS_0)]$ , соответствующий значению  $r = N$ . При использовании планом  $[N, B, (N, HS_0)]$  момент  $t^*$  остановки испытаний совпадает либо с моментом  $t_N$  отказа последнего элемента из  $N$

поставленных на испытание элементов, либо с моментом, когда впервые значение суммарной наработки достигает заданного уровня  $S_0$ . В § 3.3 предыдущей главы было показано, что если в качестве временного параметра взять значения суммарной наработки, то «моменты» отказов, записанные в таком «времени», равные  $S_i = S_B(t_i)$ , образуют пуассоновский поток отказов с интенсивностью, равной  $\lambda$ . Как и всюду в § 4.3, мы предполагаем, что вероятность безотказной работы каждого испытываемого элемента равна  $e^{-\lambda t}$ . Таким образом, план  $[N, B, (r, HS_0)]$  эквивалентен плану  $[N, B, (r, T)]$ , где в качестве временного параметра надо рассматривать значения суммарной наработки и соответственно  $T = \frac{S_0}{N}$ . Таким образом, переформулируя критерий, соответствующий плану  $[N, B, (r, T)]$ , получаем критерий в классе нерандомизированных критериев с уровнем значимости, не большим  $\alpha$ , для проверки гипотез  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  и  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ . Этот критерий задается следующей системой правил.

Если  $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0} < S_0$ , то испытания проводим до момента  $t^* = \min(t_r, t_0)$  где  $t_0$  находится из условия, то значение суммарной наработки  $S_B(t_0) = S_0$ . При этом в случае, когда  $t^* = t_r$  и  $S_B(t_r) < S_\alpha$ , гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается. В тех случаях, когда  $t^* = t_0$  гипотезу  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  принимаем. Может случиться, что  $S_\alpha = \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0} > S_0$ . В таком случае надо найти наименьшее целое  $c$  ( $c < r$ ) такое, что  $\lambda_0 S_0 = \Delta_{1-\alpha}(c)$ . Гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  принимается, когда  $t_0 < t_r$  и  $d(t_0) \leq c$ . Если же окажется, что  $t_0 < t_r$  и  $d(t_0) > c$  или  $t_r < t_0$ , то гипотеза  $H = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается.

Функция мощности для такого критерия задается соотношениями

$$W(\lambda) = \begin{cases} 1 - L_{r-1} \left[ \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)\lambda}{\lambda_0} \right], & S_0 \geq \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}, \\ 1 - L_c(N\lambda T), & S_0 < \frac{\Delta_{1-\alpha}(r-1)}{\lambda_0}. \end{cases} \quad (4.3.30)$$

В заключение рассмотрим правила объединения результатов испытаний на надежность, полученных при разнотипном планировании. Может случиться, что в нашем распоряжении окажутся данные об испытаниях на надежность, проведенных в различных организациях с использованием различных планов испытаний. Типичными в этом отношении являются испытания дорогостоящих образцов оборудования или систем. Ставится задача построения критерия с заданным уровнем значимости для различия гипотез  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  и  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$  о значениях пара-

метра, определяющего надежность элемента. Пусть  $X_i = \{x_i\}$  — пространство исходов испытаний, соответствующее использованию плана типа  $\Pi_i$  (например, одного из рассмотренных выше),  $i = 1, \dots, m$ ;  $p_i(x|\lambda)$  — плотность вероятностей получения исхода  $x_i \in X_i$ . Естественно предположить, что исходы опытов  $(x_1, \dots, x_m)$  являются взаимно независимыми случайными величинами. При таком предположении всю совокупность опытов  $x = (x_1, \dots, x_m)$  можно рассматривать как случайную величину, принимающую значения из пространства  $X = X_1 \times \dots \times X_m$ , плотность вероятностей которой равна  $p(x|\lambda) = \prod_{i=1}^m p_i(x_i|\lambda)$ . Теперь можно использовать стандартную технику выделения достаточных статистик и использования критерия отношения правдоподобия. Для иллюстрации мы ограничимся разбором двух примеров.

Пусть в  $i$ -й организации на испытание было поставлено  $N_i$  элементов,  $i = 1, \dots, m$ . Испытания проводились по плану  $[N, B, T_i]$ . Требуется построить критерий с уровнем значимости, не большим  $\alpha$ , различающий гипотезы  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$ ,  $H_1 = \{\lambda > \lambda_0\}$ . Из формулы (4.3.3) получаем, что плотность вероятностей  $p(x|\lambda)$  объединения всех исходов испытаний имеет вид

$$p(x|\lambda) = \prod_{i=1}^m N_i^{d_i(T_i)} \lambda^{\sum_{i=1}^m d_i(T_i)} e^{-\lambda \sum_{i=1}^m N_i T_i}. \quad (4.3.31)$$

Из формулы (4.3.31) следует, что  $D = \sum_{i=1}^m d_i(T_i)$  является достаточной статистикой. Так как  $d_i(T_i)$  являются, по предположению, взаимно независимыми случайными величинами, имеющими пуассоновское распределение с параметрами  $\lambda N_i T_i$ , то  $D$  также имеет пуассоновское распределение с параметром  $\Lambda = \sum_{i=1}^m \lambda N_i T_i$ . В соответствии с (4.3.6) набор критических множеств имеет вид  $(D > k)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . В качестве  $k$  отбирается наименьшее целое число  $c$ , для которого

$$P\{D > c | \lambda_0\} = 1 - L_c\left(\sum_{i=1}^m \lambda_0 N_i T_i\right) \leq \alpha. \quad (4.3.32)$$

Используя обозначения (4.3.8), можно переписать (4.3.32) в виде неравенства

$$\sum_{i=1}^m \lambda_0 N_i T_i \leq \Delta_{1-\alpha}(c-1). \quad (4.3.33)$$

Таким образом, критерий описывается следующей системой правил. Гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается, когда общее число отказов  $D$ ,

наблюдавшихся во всех  $m$  организациях, больше числа  $c$ , найденного из условия (4.3.33). Если же  $D = c$ , то гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  принимается. Этот критерий является равномерно наиболее мощным в классе нерандомизированных критериев с уровнем значимости, не большим  $\alpha$ .

В качестве последнего примера рассмотрим случай двух серий испытаний. В первой серии использовался план  $[N_1, B, r_1]$ , во второй — план  $[N_2, B, T_2]$ . Совместная плотность вероятностей обоих исходов испытаний имеет вид

$$p(x|\lambda) = (N_1)_{r_1} (N_2)_{d_2} \lambda^{r_1+d_2} (T_2)^{-\lambda} [S_B^{(1)}(T_1) + S_B^{(2)}(T_2)], \quad (4.3.34)$$

где  $(N)_m = N(N-1)\dots(N-m+1)$ .

Из формулы (4.3.34) следует, что при  $\lambda = \lambda_0$  достаточной статистикой будет пара  $(d(T_2), S_B^{(1)}(T_1) + S_B^{(2)}(T_2))$ , где  $d_2(T_2)$  — число отказов во второй серии испытаний, а  $S_B^{(i)}(T_2)$  — значение суммарной наработки в момент  $t$  в  $i$ -й серии испытаний. Взяв логарифм отношения правдоподобия  $\frac{p(x|\lambda_1)}{p(x|\lambda_0)}$ , где  $\lambda_1 > \lambda_0$ , получаем, что критическое множество имеет вид

$$\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) d_2(T_2) - (\lambda_1 - \lambda_0) [S_B^{(1)}(T_1) + S_B^{(2)}(T_2)] > k_\alpha. \quad (4.3.35)$$

Значение  $k_\alpha$  находится из условия, что при  $\lambda = \lambda_0$  вероятность выполнения неравенства (4.3.35) должна быть равна  $\alpha$ . Построенный критерий состоит в том, что гипотеза  $H_0 = \{\lambda \leq \lambda_0\}$  отвергается тогда, когда выполнено неравенство (4.3.35), и принимается тогда, когда выполнено неравенство, противоположное (4.3.35). Этот критерий дает наименьшую ошибку второго рода при  $\lambda = \lambda_1$ . Однако он не является равномерно наиболее мощным.

#### § 4.4. Критерии типа последовательного анализа для проверки гипотез о значении параметра $\lambda$ экспоненциального распределения<sup>1)</sup>

В предыдущих параграфах рассматривались критерии, соответствующие тем случаям, когда испытания проводились по конкретным планам типов  $B$  и  $B$ . Возможен другой подход к построению критериев, основанный на понятии *функции риска*. К сожалению,

<sup>1)</sup> Материал, излагаемый в этом параграфе, несколько выходит за рамки этой книги. Мы опускаем детали доказательств, в связи с чем изложение носит эвристический характер. В задуманном продолжении книги будет дано систематическое изложение применений теории управляемых случайных процессов к задачам теории надежности.

в большинстве случаев построенные критерии имеют пока весьма относительную практическую ценность. Причина этого заключается в том, что для построения функции риска требуется задавать определенные численные значения априорных вероятностей и значение ущерба от принятия ложного решения. Вид критерия существенным образом зависит от этих параметров, значения которых могут быть оценены лишь с большой степенью неопределенности. Хотя субъективность выбора параметров существенным образом влияет на вид полученного критерия и снижает его практическую ценность, все же описание класса оптимальных критериев полезно во многих отношениях. В ряде случаев полученные таким образом критерии обладают весьма ценными свойствами. Одной из жемчужин этой теории является последовательный критерий отношения правдоподобия Вальда [2], [3]. В настоящем параграфе мы ознакомимся с этим критерием на примере проверки гипотез о значении интенсивности пуассоновского потока.

Рассмотрим задачу построения критерия для проверки двух простых гипотез о значении параметра  $\lambda$  потока отказов. Пусть испытываются  $N$  элементов, вероятность безотказной работы каждого элемента в течение времени  $t$  равна  $R(t) = e^{-\lambda t}$ . Исходная гипотеза  $H_0$  состоит в том, что  $\lambda = \lambda_0$ , а конкурирующая  $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$ ,  $\lambda_1 > \lambda_0$ . Если испытания проводятся с заменой отказавших элементов (планы типа  $B$ ), то возникающий случайный поток моментов отказов является пуассоновским с интенсивностью, равной  $N\lambda_i$  (см. § 3.2), когда верна гипотеза  $H_i$ . Если замена отказавших элементов не производится (планы типа  $A$ ), то интенсивность отказов изменяется (см. § 3.2). Пусть до испытаний нам заданы два числа:  $\theta_0$  — вероятность того, что верна гипотеза  $H_0$ , и  $\theta_1$  — вероятность того, что верна гипотеза  $H_1$ ;  $\theta_0 + \theta_1 = 1$ . Эти вероятности  $\theta_i$  носят название *априорных*. Под *критерием* будем понимать правило, по которому определяется момент прекращения испытаний и принимается одна из гипотез  $H_i$ . Пусть вероятность ошибочно принять гипотезу  $H_i$ , когда верна гипотеза  $H_j$ , равна  $\alpha_j$ . Обозначим через  $W_j$  величину ущерба от того, что будет принята  $H_i$ , в то время как верна  $H_{1-i}$ . Условимся обозначать через  $\eta^t$  реализацию случайного потока отказов в интервале от 0 до  $t$ . Если  $t_1, \dots, t_{d(t)}$  — моменты отказов, то  $\eta^t = (t_1, \dots, t_{d(t)}, t)$ . Для удобства обозначений будем каждый критерий и соответствующие ему характеристики отмечать одной и той же буквой  $\delta$ . Например, момент  $t^*$  остановки испытаний, соответствующий критерию  $\delta$ , обозначаем через  $t_\delta$ . Как уже было показано ранее, плотность вероятностей появления реализации  $\eta^t$  задается формулами

$$p_i(\eta^t | \lambda) = (N\lambda)^{d(t)} e^{-\lambda S_B(t)} \quad (4.4.1)$$

для планов типа  $B$  и

$$p_t(\eta^t | \lambda) = (N)_t \lambda^d e^{-\lambda S_B(t)} \quad (4.4.2)$$

для планов типа  $B$ . Здесь  $S_B(t)$  и  $S_B(t)$  — значения суммарных наработок,

$$S_B(t) = Nt, \quad S_B(t) = [N - d(t)]t + \sum_{i=1}^{d(t)} t_i, \quad (4.4.3)$$

где  $t_i < t$  — моменты отказов.

Проведение испытаний связано с определенными расходами. Предположим поэтому, что за интервал времени  $(t, t + \Delta t)$  расходы равны  $c(\eta^t) \Delta t$ . Таким образом, расходы за время испытаний до момента остановки равны  $\int_0^{t_b} c(\eta^s) ds$ . Очень часто оказывается целесообразным считать  $c(\eta^t) = c$ ,  $N > 0$ . Однако при использовании планов типа  $B$  могут встретиться и такие случаи, когда  $c(\eta^t) = c[N - d(t)]$ . Средние расходы  $r(\theta_0, \delta)$ , связанные с использованием критерия  $\delta$ , состоят из среднего ущерба от ложных решений и расходов от проведения испытаний. Расписывая подробно, получаем

$$r(\theta_0, \delta) = \theta_0 \alpha_0 W_0 + \theta_1 \alpha_1 W_1 + \theta_0 M_0 \left[ \int_0^{t_b} c(\eta^s) ds \right] + \\ + \theta_1 M_1 \left[ \int_0^{t_b} c(\eta^s) ds \right]. \quad (4.4.4)$$

$M_i$  означает, что математическое ожидание соответствует гипотезе  $H_i$ . Нашей задачей является теперь построение такого критерия  $\delta$ , для которого при заданных значениях априорных вероятностей  $\theta_i$ , величин ущерба  $W_i$  и стоимости  $c(\eta^t)$  значение функции риска минимально. Критерии, минимизирующие функцию риска, называются *бейесовскими*.

План типа  $B$ . Предполагаем, что  $c(\eta^t) = c > 0$ . Из (4.4.4) получаем

$$r(\theta_0, \delta) = \theta_0 [\alpha_0 W_0 + c M_0 t_b] + [1 - \theta_0] [\alpha_1 W_1 + c M_1 t_b]. \quad (4.4.5)$$

Используя (4.4.5), легко получить, что для значения  $\theta_0 = \lambda \theta_0^{(1)} + (1 - \lambda) \theta_0^{(2)}$ , где  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \theta_0^{(i)} < 1$ , имеет место соотношение

$$r(\lambda \theta_0^{(1)} + (1 - \lambda) \theta_0^{(2)}, \delta) = \lambda r(\theta_0^{(1)}, \delta) + (1 - \lambda) r(\theta_0^{(2)}, \delta). \quad (4.4.6)$$

Равенством (4.4.6) мы воспользуемся позднее. Пусть  $\theta_i^t$  — апосте-

риорная вероятность того, что справедлива гипотеза  $H_i$ , если наблюдается реализация потока отказов  $\eta^t$ . По формуле Байеса имеем

$$\theta_i^t = \frac{\theta_i p_i(\eta^t | \lambda_i)}{\theta_0 p_0(\eta^t | \lambda_0) + \theta_i p_i(\eta^t | \lambda_i)}. \quad (4.4.7)$$

Будем рассматривать только такие критерии, которые являются предельными для критериев дискретного типа. В. С. Михалевич [12] называет такие критерии *регулярными*. Критерии дискретного типа характеризуются тем, что для них решение об остановке или о продолжении испытаний принимается лишь в моменты, кратные  $\Delta t$ . Случай непрерывного времени получается в результате предельного перехода, когда  $\Delta t \downarrow 0$ . Случайный погон отказов  $\eta^t$  является пуассоновским, поэтому число отказов, возникающих в интервале  $(t, t + \Delta t)$ , не зависит от того, в какие моменты и в каком количестве наблюдались отказы в интервале  $(0, t)$ . Отсюда следует, что число отказов  $d(s)$ , происшедших за время  $s$ ,  $0 \leq s \leq t$ , является реализацией марковского процесса с независимыми приращениями. Из общей теории управляемых процессов (см. [3], [13]) следует, что *оптимальное решающее правило-критерий, минимизирующее функцию риска (4.4.5), зависит лишь от значения апостериорной вероятности  $\theta_0^t$* . Значения  $\theta_0^t$ , задаваемые формулой (4.4.7), образуют марковский процесс. Это следует из того, что  $\theta_0^t$  может быть взаимно однозначным образом выражено через отношение правдоподобия  $p_1(\eta^t | \lambda_1)/p_0(\eta^t | \lambda_0)$ . Ниже мы увидим, что отношение правдоподобия, или, что эквивалентно, его логарифм, является марковским процессом.

Так как в каждый момент времени  $t$  принимается одно из двух возможных решений об остановке испытаний и принятии одной из гипотез  $H_i$  или же о дальнейшем продолжении испытаний, то полезно рассмотреть две функции риска, связанные с этими решениями. Пусть  $\rho_{\text{ост}}(\theta_0^t)$  — минимальный риск от принятия решения об остановке испытаний в момент  $t$ , когда значение апостериорной вероятности равно  $\theta_0^t$ ,  $\theta_1^t = 1 - \theta_0^t$ . Если при этом принимается верной гипотеза  $H_i$ , то с вероятностью  $\theta_i^t$  это решение ложно и среднее значение ущерба равно  $\theta_i^t W_i$ .

На рис. 4.4.1 по оси абсцисс отложены значения  $\theta_0^t$ , а по оси ординат — значения ущерба. Минимальный ущерб в условиях остановки процесса в момент  $t$  задается, как это видно из рис. 4.4.1, формулой

$$\rho_{\text{ост}}(\theta_0^t) = \begin{cases} \theta_0^t W_0, & \theta_0^t < \frac{W_1}{W_0 + W_1}, \\ \theta_1^t W_1, & \theta_0^t > \frac{W_1}{W_0 + W_1}. \end{cases} \quad (4.4.8)$$



Таким образом, чтобы ущерб в момент остановки  $t$  был минимален, надо при значениях  $\theta_0^t < \frac{W_1}{W_0 + W_1}$  принимать гипотезу  $H_1$ , а при значениях  $\theta_0^t > \frac{W_1}{W_0 + W_1}$  принимать гипотезу  $H_0$ .

Пусть  $G$  — класс критериев, для которых с вероятностью единица по достижении момента  $t$  принимается решение о дальнейшем продолжении испытаний. Введем понятие минимального риска от оптимального продолжения испытаний  $\rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)$ , задав его формулой (ср. [1])

$$\rho_{\text{пр}}(\theta_0^t) = \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^t, \delta). \quad (4.4.9)$$

Для оптимального критерия, минимизирующего риск (4.4.5), возможно принятие как решения об остановке, так и решения о продолжении испытаний. Поэтому значение минимального риска

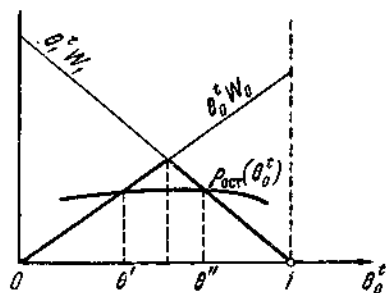


Рис. 4.4.1.

$$\rho(\theta_0^t) = \min[\rho_{\text{ост}}(\theta_0^t), \rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)]. \quad (4.4.10)$$

Если бы нам было известно значение  $\rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)$ , то с учетом (4.4.10) оптимальный критерий  $\delta$  описывался бы следующей системой правил. Пусть к моменту времени  $t$  значение апостериорной вероятности стало равно  $\theta_0^t$ . Нужно вычислить значение  $\rho_{\text{ост}}(\theta_0^t)$  и  $\rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)$ . Если окажется, что  $\rho_{\text{ост}}(\theta_0^t) \leq \rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)$ , то нужно принимать решения об остановке испытаний, если же  $\rho_{\text{ост}}(\theta_0^t) > \rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)$ , то испытания надо продолжить. Если в момент  $t_\delta$  остановки  $\theta_0^t < \frac{W_1}{W_0 + W_1}$ , то принимается гипотеза  $H_1$ ; в противном случае принимается гипотеза  $H_0$ .

Заметим, что уравнение (4.4.10) является типичным уравнением динамического программирования [14].

Значение  $\rho_{\text{пр}}(\theta_0^t)$  нам неизвестно, и найти его не так просто. Постараемся обойти эту трудность. Из уравнения (4.4.6) следует, что

$$\inf_{\delta \in G} r(\lambda \theta_0^{t(1)} + (1 - \lambda) \theta_0^{t(2)}, \delta) \geq \lambda \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^{t(1)}, \delta) + (1 - \lambda) \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^{t(2)}, \delta) \quad (4.4.11)$$

Используя обозначение (4.4.9), можно переписать (4.4.11) в виде

$$\rho_{\text{пр}}(\lambda \theta_0^{t(1)} + (1 - \lambda) \theta_0^{t(2)}) \geq \lambda \rho_{\text{пр}}(\theta_0^{t(1)}) + (1 - \lambda) \rho_{\text{пр}}(\theta_0^{t(2)}). \quad (4.4.12)$$

Из (4.4.12) следует, что  $\rho_{\text{пр}}(\theta)$  является выпуклой функцией по  $\theta$ . Так как каждая ограниченная сверху выпуклая функция является непрерывной, то из очевидного неравенства  $\rho_{\text{пр}}(\theta) \geq 0$  вытекает непрерывность  $\rho_{\text{пр}}(\theta)$ .

Примерный вид графика  $\rho_{\text{пр}}(\theta)$  показан на рис. 4.4.1. Пусть существует интервал  $(\theta', \theta'')$  такой, что из  $\theta \in (\theta', \theta'')$  следует  $\rho_{\text{пр}}(\theta) < \rho_{\text{ост}}(\theta)$ ; тогда до тех пор, пока значение  $\theta'_0 \in (\theta', \theta'')$ , надо продолжать испытания. Испытания прекращаются в момент  $t_\delta$ , когда впервые значение  $\theta'_0$  выйдет из интервала  $(\theta', \theta'')$ . Если  $\theta'_0 \delta \leq \theta'$ , то принимается гипотеза  $H_1$ , если же  $\theta'_0 \delta \geq \theta''$ , то принимается гипотеза  $H_0$ .

Вычисление значений  $\theta'_0$  по формуле (4.4.7) неудобно. Поэтому сделаем некоторые преобразования. Из формулы (4.4.7) получаем, что

$$x(t) = \left[ \ln \frac{\lambda_t}{\lambda_0} \right]^{-1} \ln \left[ \frac{\rho_t(\eta^t | \lambda_1)}{\rho_t(\eta^t | \lambda_0)} \right] = \left[ \ln \frac{\lambda_t}{\lambda_0} \right]^{-1} \ln \left[ \frac{\theta_0 - \theta'_0 \theta_0}{\theta'_0 \theta_1} \right]. \quad (4.4.13)$$

Формула (4.4.13) задает взаимно однозначное отображение точек  $\theta'_0 \in (0, 1)$  в точки  $x(t) \in (-\infty, +\infty)$ . При этом неравенство  $\theta_1 < \theta_2$ ,  $\theta'_0 \in (0, 1)$ , переходит в неравенство  $x_2 < x_1$ , где  $x_i$  — образ точки  $\theta_i$ . Используя формулы (4.4.1) и (4.4.3), получаем, что левая часть (4.4.13) имеет вид

$$x(t) = d(t) - ct, \quad (4.4.14)$$

где  $c = \frac{N(\lambda_1 - \lambda_0)}{\ln \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)} > 0$ .

Пусть  $x_0$  — образ  $\theta'$ , а  $x_1$  — образ  $\theta''$  при использовании преобразования (4.4.13), когда  $\theta'_0 \in (\theta', \theta'')$ . Тогда оптимальный критерий, минимизирующий риск (4.4.5), состоит в том, что надо регистрировать число отказов  $d(t)$ , происшедших до момента  $t$  включительно, а затем по формуле (4.4.14) находить значение  $x(t)$ . Испытания прекращаются в момент  $t_\delta$ , когда впервые значение  $x(t)$  окажется вне интервала  $(x_0, x_1)$ . Если  $x(t_\delta) \leq x_0$ , то надо принимать гипотезу  $H_0$ , если же  $x(t_\delta) \geq x_1$ , то надо принимать гипотезу  $H_1$ .

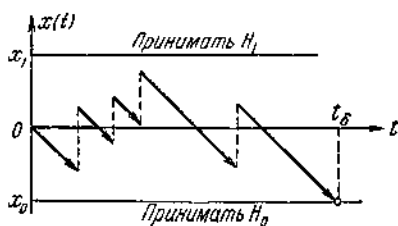


Рис. 4.4.2.

Такая интерпретация оптимального критерия является следствием монотонности отображения, задаваемого формулой (4.4.13). В силу монотонности события  $\theta' < \theta'_0 < \theta''$ ,  $\theta'_0 \leq \theta'$ ,  $\theta'_0 \geq \theta''$  эквивалентны

событиям  $x_0 < x(t) < x_1$ ,  $x(t) \geq x_1$ ,  $x(t) \leq x_0$ . Примерный вид траектории  $x(t)$  показан на рис. 4.4.2. Значения граничных точек  $x_0$  и  $x_1$  находятся из требований, чтобы значения ошибок первого и второго рода были соответственно равны  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Ошибка первого рода равна вероятности пересечения уровня  $x_1$  раньше уровня  $x_0$ , когда значение  $\lambda = \lambda_0$ . Ошибка второго рода равна вероятности пересечения уровня  $x_0$  раньше уровня  $x_1$ , когда  $\lambda = \lambda_1$ . Из этого мы замечаем, что на оптимальность критерия не влияют как значения ущербов  $W_i$ , так и значения априорных вероятностей  $\theta_i$ . Следовательно, если  $\delta^*$  — критерий, отличный от оптимального,  $\alpha_i$  — его ошибки первого и второго рода, такие же, как и у оптимального критерия, то

$$r(\theta_0, \delta) \leq r(\theta_0, \delta^*). \quad (4.4.15)$$

Пусть  $W_0 = 1 - W$ ,  $W_1 = W$ ; тогда для любого  $\theta_0 \in (0, 1)$  из (4.4.5) и (4.4.15) получаем

$$\theta_0 M_0 t_\delta + (1 - \theta_0) M_1 t_\delta \leq \theta_0 M_0 t_{\delta^*} + (1 - \theta_0) M_1 t_{\delta^*}. \quad (4.4.16)$$

Из неравенства (4.4.16) получаем, что

$$M_0 t_\delta \leq M_0 t_{\delta^*}, \quad M_1 t_\delta \leq M_1 t_{\delta^*}. \quad (4.4.17)$$

Этот результат можно интерпретировать следующим образом.

Свойство оптимального критерия. *Оптимальный критерий, различающий две простые гипотезы  $H_0 = [\lambda = \lambda_0]$  и  $H_1 = [\lambda = \lambda_1]$  с заданными ошибками первого рода  $\alpha_0$  и второго рода  $\alpha_1$ , требует в среднем меньше времени на проведение испытаний, чем любой другой критерий с теми же ошибками первого и второго рода.*

Не следует забывать, что минимальное среднее время соответствует только значениям  $\lambda = \lambda_0$  или  $\lambda = \lambda_1$ . Существуют другие критерии, которые требуют меньшего времени проведения испытаний для некоторых значений  $\lambda \neq \lambda_i$ ,  $i = 0, 1$ .

Рассмотрим теперь вопросы, связанные с вычислением значений  $x_0$  и  $x_1$  таких, что ошибки первого и второго рода равны  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Пусть  $\mu_j^t$  — условное математическое ожидание отношения правдоподобия в момент достижения уровня  $x_i$ ,  $i = 0, 1$ , когда верна гипотеза  $H_j$ . По формуле условных математических ожиданий

$$\mu_0^t = M_0 \left[ \frac{p_i(\eta^t | \lambda_1)}{p_i(\eta^t | \lambda_0)} \chi_i \right] : P\{\chi_i = 1 | \lambda = \lambda_0\}, \quad (4.4.18)$$

где  $\chi_i$  — случайные величины, задаваемые формулами

$$\chi_0 = \begin{cases} 1, & x(t_\delta) = x_0, \\ 0, & x(t_\delta) \geq x_1, \end{cases} \quad \chi_1 = \begin{cases} 0, & x(t_\delta) = x_0, \\ 1, & x(t_\delta) \geq x_1. \end{cases} \quad (4.4.19)$$

Замечая, что  $M_0 \left[ \frac{p_{t_0}(\eta^{t_0} | \lambda_1)}{p_{t_0}(\eta^{t_0} | \lambda_0)} \chi_i \right] = M_1 \chi_i = P \{ \chi_i = 1 | \lambda = \lambda_1 \}$ , и учитывая очевидные отношения

$$P \{ \chi_1 = 1 | \lambda = \lambda_1 \} = 1 - \alpha_1, \quad P \{ \chi_1 = 1 | \lambda = \lambda_0 \} = \alpha_0, \quad (4.4.20)$$

из (4.4.18), (4.4.19) и (4.4.20) находим, что

$$\mu_0^0 = \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0}; \quad \mu_0^1 = \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0}. \quad (4.4.21)$$

В условиях принятия решения о справедливости гипотезы  $H_i$  в момент окончания испытаний

$$e^{i \inf_{t_0} [y(t_0)]} \leq \frac{p_{t_0}(\eta^{t_0} | \lambda_1)}{p_{t_0}(\eta^{t_0} | \lambda_0)} = e^{[\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}] x(t_0)} \leq e^{\sup_{t_0} [y(t_0)]}, \quad (4.4.22)$$

где  $y(t_0) = \left[ \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right] x(t_0)$ ,  $\sup_i$  и  $\inf_i$  берутся по всем значениям  $x(t_0)$  в такие моменты окончания испытаний, которым соответствует принятие гипотезы  $H_i$ . Величины, стоящие в левой и правой частях неравенств (4.4.22), уже не являются случайными. Используя эти неравенства в формуле (4.4.18) и учитывая (4.4.21), получаем неравенства

$$e^{i \inf_{t_0} [y(t_0)]} \leq \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} \leq e^{i \sup_{t_0} [y(t_0)]}, \quad (4.4.23)$$

$$e^{i \inf_{t_0} [y(t_0)]} \leq \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0} \leq e^{i \sup_{t_0} [y(t_0)]}. \quad (4.4.24)$$

Если в момент  $t_0$  принимается гипотеза  $H_0$ , то  $x(t_0) = x_0$ , поэтому неравенства (4.4.23) эквивалентны равенству

$$\frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} = e^{(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}) x_0}. \quad (4.4.25)$$

Из уравнения (4.4.25) находим значение уровня принятия гипотезы  $H_0$

$$x_0 = \ln \frac{\alpha_1}{1 - \alpha_0} : \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}. \quad (4.4.26)$$

В момент  $t < t_0$   $x(t) < x_1$ , следовательно, в момент  $t = t_0$   $x(t_0) < x_1 + 1$ , так как с вероятностью 1 отказы в предположении о показателности вероятности безотказной работы не могут наступить одновременно. Учитывая это, из (4.4.24) имеем

$$\left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{x_1} \leq \frac{1 - \alpha_1}{\alpha_0} \leq \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^{x_1 + 1}. \quad (4.4.27)$$

Разрешая неравенства (4.4.24) относительно  $x_1$ , получаем верхнюю и нижнюю оценки для уровня  $x_1$  принятия гипотезы  $H_1 = [\lambda = \lambda_1]$ :

$$-\left(\ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) + \ln \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right) < x_1 < \ln \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right). \quad (4.4.28)$$

Если  $\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0} \gg \frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ , то в качестве  $x_1$  можно взять значение  $\ln \left(\frac{1-\alpha_1}{\alpha_0}\right)$ . Заметим, что при этом получается критерий, имеющий меньше, чем  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ , ошибки первого и второго рода. При этом, однако, время проведения испытаний в среднем несколько увеличится. В явном виде значение уровня  $x_1$  получить нельзя. Однако, используя технику дифференциально-разностных уравнений, можно получить трансцендентные уравнения, решением которых является  $x_1$ .

Ниже излагаются результаты работы [11]; см. также [15].

Случайный процесс  $x(t)$ , задаваемый формулой (4.4.14), является марковским. Это является простым следствием того, что отказы, которые могут возникнуть в будущем, не зависят от течения процесса  $x(t)$  в прошлом. В момент  $t=0$   $x(0)=0$ , однако мы рассмотрим сначала более общий случай, когда  $x(0)=x$ . Пусть  $P_\lambda(x)$  — вероятность принятия гипотезы  $H_1 = \{\lambda = \lambda_1\}$ , когда значение параметра равно  $\lambda$ ,  $x(0)=x$ . Другими словами,  $P_\lambda(x)$  равна вероятности того, что процесс пересечет уровень  $x_1$  раньше, чем уровень  $x_0$ . Вероятность ошибки первого рода  $\alpha_0 = P_{\lambda_0}(0)$ , а вероятность ошибки второго рода  $-\alpha_1 = 1 - P_{\lambda_1}(0)$ .

Граничные условия имеют вид

$$P_\lambda(x) = \begin{cases} 0, & x \leq x_0, \\ 1, & x \geq x_1. \end{cases} \quad (4.4.29)$$

Учитывая возможные изменения значений процесса  $x(t)$  за время  $(0, \Delta t)$ , для значений  $x$ ,  $x_0 < x < x_1$ , по формуле полных вероятностей имеем

$$P_\lambda(x) = (1 - N\lambda\Delta t) P_\lambda(x - c\Delta t) + N\lambda\Delta t P_\lambda(x + 1 - c\Delta t) + o(\Delta t). \quad (4.4.30)$$

Из уравнения (4.4.30), где  $|o(\Delta t)| < \lambda^2 (\Delta t)^2$ ,  $0 < \Delta t < N\lambda^{-1}$ , получаем, что  $P_\lambda(x)$  — непрерывная функция от  $x$  в интервале  $(x_0, x_1)$ . В точке  $x = x_1$  эта функция имеет разрыв, так как из (4.4.29)  $P_\lambda(x_1) = 1$ , а

$$P_\lambda(x_1 - \epsilon) \leq 1 - P \left\{ d \left( \frac{x_1 - x_0}{c} \right) = 0 \right\} = 1 - e^{-N\lambda \frac{x_1 - x_0}{c}}.$$

Учитывая это и переписывая уравнение (4.4.30) в виде

$$\frac{P_\lambda(x) - P_\lambda(x - c\Delta t)}{\Delta t} = -N\lambda P_\lambda(x - c\Delta t) + N\lambda P_\lambda(x + 1 - c\Delta t) + o(\Delta t), \quad (4.4.31)$$

получаем, что  $P_\lambda(x)$  дифференцируема в интервале  $(x_0, x_1)$ , за исключением одной точки  $x = x_1 - 1$  в том случае, когда  $x_0 < x_1 - 1$ . Из (4.4.31), переходя к пределу  $\Delta t \rightarrow 0$ , получаем дифференциально-разностное уравнение

$$c \frac{dP_\lambda(x)}{dx} + N\lambda P_\lambda(x) = N\lambda P_\lambda(x + 1), \quad (4.4.32)$$

где  $x_0 < x < x_1$ ,  $x \neq x_1 - 1$ . Решение (4.4.32) определяется интегрированием по кускам. Единственность обеспечивается выполнением условий:

(I)  $P_\lambda(x)$  непрерывна для значений  $x < x_1$ ,

(II)  $P_\lambda(x_0) = 0$ ,

(III)  $P_\lambda(x) = 1$ ,  $x > x_1$ .

Пусть  $n(x)$  — целое число, такое, что

$$x_1 - x - 1 \leq n(x) < x_1 - x.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением уравнения (4.4.32), удовлетворяющим указанному выше условию (4.4.1), является функция

$$P_\lambda(x) = 1 + ce^{-\frac{N\lambda}{c}x} \sum_{k=0}^{n(x)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[ (x_1 - x - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}} \right]^k. \quad (4.4.33)$$

Используя условие (II), получаем выражение для константы  $c$ :

$$c = -e^{\frac{N\lambda}{c}x_0} \left\{ \sum_{k=0}^{n(x_0)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[ (x_1 - x_0 - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}} \right]^k \right\}. \quad (4.4.34)$$

Таким образом, с учетом (4.4.33) и (4.4.34)  $P_\lambda(x) = g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, x\right)$ , где

$$g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, x\right) = 1 - e^{\frac{N\lambda}{c}(x_0 - x)} \frac{\sum_{k=0}^{n(x)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[ (x_1 - x - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}} \right]^k}{\sum_{k=0}^{n(x_0)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[ (x_1 - x_0 - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}} \right]^k}. \quad (4.4.35)$$

Значение  $x_0$  нам известно; вспомнив связь  $P_{\lambda_1}(0)$  с ошибками первого

и второго рода, получаем два трансцендентных уравнения, любое из которых можно использовать для нахождения  $x_1$ :

$$\left. \begin{aligned} g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda_0}{c}, 0\right) &= \alpha_0, \\ g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda_1}{c}, 0\right) &= 1 - \alpha_1. \end{aligned} \right\} \quad (4.4.36)$$

Полезно заметить, что  $\frac{N\lambda_0}{c} = N \left( \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_0} - 1 \right)^{-1}$ ,  $\frac{N\lambda_1}{c} = N \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_0} \times \times \left( 1 - \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^{-1}$ , откуда следует, что решение  $x_1$  уравнений (4.4.36) зависит от  $\lambda_0, \lambda_1$  только через их отношение  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ .

Если значение параметра  $\lambda \neq \lambda_i, i = 0, 1$ , то вероятность  $L(\lambda)$  принятия гипотезы  $H_0$ , называемая оперативной характеристикой, задается формулой

$$L(\lambda) = 1 - P_\lambda(0) = 1 - g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, 0\right). \quad (4.4.37)$$

Другой полезной характеристикой оптимального критерия является среднее время  $T_\lambda$  проведения испытаний, когда значение параметра равно  $\lambda$ . Мы уже показали, что для оптимального критерия при одинаковых ошибках первого и второго рода среднее время  $T_\lambda$  проведения испытаний не больше, чем у любого другого критерия для значений  $\lambda = \lambda_0$  и  $\lambda = \lambda_1$ . Если обозначить через  $T_\lambda(x)$  среднее время проведения испытаний при условии, что  $x(0) = x$ , то аналогичным образом можно вывести дифференциально разностное уравнение, которому удовлетворяет  $T_\lambda(x)$ . Это уравнение имеет вид

$$c \frac{dT_\lambda(x)}{dx} + N\lambda T_\lambda(x) = 1 + N_\lambda T_\lambda(x). \quad (4.4.38)$$

Решение уравнения (4.4.38) задается формулой

$$\begin{aligned} T_\lambda(x) &= \frac{n(x)+1}{N\lambda} + c' e^{-\frac{N\lambda}{c}x} \sum_{k=0}^{n(x)} \frac{(-1)^k}{k!} \left[ (x_1 - x - k) \frac{N\lambda}{c} e^{-\frac{N\lambda}{c}} \right]^k - \\ &- \frac{1}{N\lambda} e^{\frac{N\lambda}{c}(x_0 - x - 1)} \sum_{k=0}^{n(x)-1} e^{-\frac{N\lambda}{c}k} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!} \left[ (x_1 - x - k - 1) \frac{N\lambda}{c} \right]^j. \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Постоянная  $c'$  находится из условия  $T_\lambda(x_0) = 0$ . Введенная выше характеристика  $T_\lambda$ , равная среднему времени продолжения испытаний, легко выражается через  $T_\lambda(x)$ :

$$T_\lambda = T_\lambda(0). \quad (4.4.40)$$

В работе [15] даны таблицы функции  $g\left(x_0, x_1, \frac{N\lambda}{c}, 0\right)$  для различных значений  $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$ . Там же приведены значения функции  $h\left(x_0, x_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)$ . Средняя продолжительность испытаний

$$T_\lambda = \frac{1}{\lambda} h\left(x_0, x_1, \frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right). \quad (4.4.41)$$

Планы типа *Б*. Для случая планов типа *Б* достаточными статистиками являются число отказов  $d(t)$ , происшедших до момента  $t$ , и значение суммарной наработки  $S_B(t)$ , задаваемой формулой (4.4.3). Апостериорная вероятность  $\theta_0^t$  того, что верна гипотеза  $H_0 = [\lambda = \lambda_0]$ , как и для случая планов типа *В*, вычисляется по формуле (4.4.7), где  $p_t(\eta^t | \lambda)$  задается формулой (4.4.2). Таким образом,  $\theta_0^t$  зависит от значений  $S_B(t)$  и  $d(t)$ . Заметим, что  $\theta_0^t$  уже не является марковским процессом, как это было для планов типа *В*. Если предположить, что стоимостный коэффициент расходов  $c(\eta^t) = c(N - d(t))$ , то в соответствии с формулой (4.4.4) среднее значение риска для критерия  $\delta$  равно

$$r(\theta_0, \delta) = \sum_{i=0}^1 \theta_i [\alpha_i W_i + c M_i S_B(t_i)]. \quad (4.4.42)$$

Здесь мы воспользовались соотношением  $S_B(t) = \int_0^t [N - d(s)] ds$ .

Центральной задачей является отыскание оптимального критерия, для которого значение функции риска обращается в минимум. В настоящее время мы не можем дать полного решения этой задачи и только наметим пути ее решения. Как и раньше, в каждый из моментов времени  $t$  надо принимать одно из двух решений: либо прекращать испытания, либо продолжать их дальше. Для принятия оптимального решения надо из всех полученных данных знать только значение  $S_B(t)$  и  $d(t)$ . Введем две функции риска:  $\rho_{ост}(S, d)$  — минимальный риск от остановки испытаний и  $\rho_{пр}(S, d)$  — минимальный риск от продолжения испытаний, где  $S = S_B(t)$ ,  $d = d(t)$ . Фазовое пространство значений марковского процесса  $S_B(t)$ ;  $d(t)$  состоит из точек  $(x, y)$  лучей плоскости, где  $x \geq 0$ ,  $y = 0, 1, \dots, N$ . Если значение  $d$  фиксировано, а  $S_B(t)$  пробегает значения от 0 до  $+\infty$ , то значение апостериорной вероятности  $\theta_0^t$  возрастает от числа, равного  $\frac{\theta_0}{\theta_0 + \theta_1 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^d}$ , до 1.

Минимальный риск от остановки испытаний

$$\rho_{ост}(S, d) = \min [\theta_0^t W_0, \theta_1^t W_1]. \quad (4.4.43)$$



Пусть  $G$  — класс критериев  $\delta$ , для которых по достижении значений  $S_B(t) = S$  и  $d(t) = d$  принимается решение о продолжении испытаний; тогда

$$\rho_{\text{пр}}(S, d) = \inf_{\delta \in G} r(\theta_0^t(S, d), d). \quad (4.4.44)$$

Если значения этих рисков известны, то минимальный риск  $\rho(S, d)$  в общем случае удовлетворяет уравнению

$$\rho(S, d) = \min[\rho_{\text{ост}}(S, d), \rho_{\text{пр}}(S, d)]. \quad (4.4.45)$$

Структура оптимального критерия описывается следующей системой правил. Если до момента  $t_d$  появления  $d$  отказов принималось

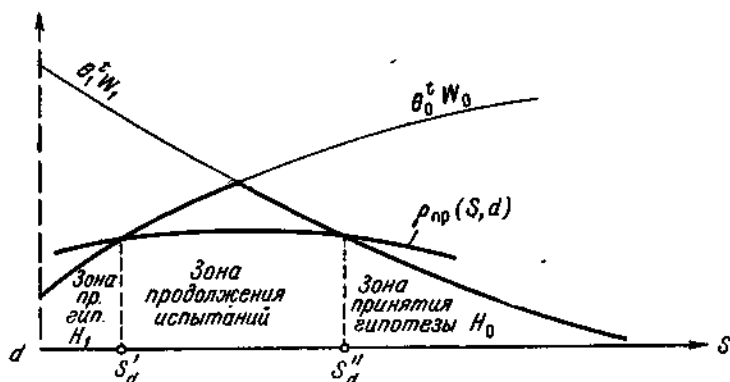


Рис. 4.4.3.

решение о продолжении испытаний, то в моменты  $t \geq t_d$  принимается решение о продолжении испытаний только в том случае, когда  $\rho_{\text{пр}}(S_B(t), d) < \rho_{\text{ост}}(S_B(t), d)$ . Решение об остановке испытаний принимается в момент  $t_d$ , как только  $\rho_{\text{пр}}(S_B(t_d), d) \geq \rho_{\text{ост}}(S_B(t), d)$ , или в момент  $t$ ,  $t_d < t < t_{d+1}$ , если впервые в этот момент  $\rho_{\text{пр}}(S_B(t), d) \geq \rho_{\text{ост}}(S_B(t), d)$ . Таким образом, все точки луча  $(S, d)$ ,  $S \geq 0$ , разбиваются на три зоны (рис. 4.4.3). Для значений  $S < S'$  испытания прекращаются и принимается гипотеза  $H_1$ , для значений  $S$ ,  $S_{d'} < S < S_{d''}$  испытания продолжаются и, наконец, для значений  $S > S''$  испытания также прекращаются и принимается гипотеза  $H_0$ . Рассчитав по значениям  $\alpha_i$ ,  $W_i$ ,  $c$ ,  $\theta_i$  функции рисков  $\rho_{\text{ост}}(S, d)$  и  $\rho_{\text{пр}}(S, d)$ , можно найти для значений  $d = 0, \dots, N-1$  пары критических точек  $S'_d, S''_d$ . Заметим, что в момент  $t_N$  отказа последнего элемента испытания надо прекращать; таким образом,  $S_N = S'_N = S''_N$ , т. е. критическая точка

одна,  $S_N$  находится из уравнения

$$\theta_0(S_B(t_N), N) W_0 = \theta_1(S_B(t_N), N) W_1, \quad (4.4.46)$$

являющегося следствием правил, определяющих критерий и уравнения (4.4.43).

На рис. 4.4.4 интервалы  $(S'_d, S''_d)$  выделены жирными открытыми отрезками. Пока траектория  $(S_B(t), d(t))$  проходит через точки интервалов  $(S'_d, S''_d)$ , испытания нужно продолжить. Если траектория пересекает правую границу, то принимается решение об остановке и принятии гипотезы  $H_0$ , если же происходит пересечение левой границы, то испытания прекращаются с принятием гипотезы  $H_1$ . Значения  $\rho_{np}(S, d)$  можно получить как решения системы дифференциальных уравнений. Например, рассматривая изменения  $S, d$  за время  $(t, t + \Delta t)$ , когда  $d = N - 1$ , получаем

$$\rho_{np}(S_0 N - 1) = \rho_{np}(S + \Delta t, N - 1) (1 - \lambda \Delta t) + \lambda \Delta t \rho_{ост}(S, N) + o(\Delta t). \quad (4.4.47)$$

Из (4.4.47) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\rho_{np}(s, N-1)}{ds} - \lambda \rho_{np}(s, N-1) + \lambda \rho_{ост}(s, N) = 0.$$

Аналогичным образом можно вывести и другие уравнения.

### § 4.5. Непараметрические методы оценки однородности статистического материала

Одной из существенных статистических задач теории надежности следует считать проверку однородности имеющегося в распоряжении исследователя материала (изготовленной продукции по качеству, отсутствия влияния испытательных установок на результаты испытаний, изменения технологического процесса на качество изделий и т. д.). При этом зачастую нас совсем не интересует, каково будет распределение вероятностей изучаемого показателя однородности; задача состоит лишь в *проверке гипотезы, что распределение остается неизменным*. Мы ограничимся здесь рассмотрением лишь простейших постановок задач, для которых

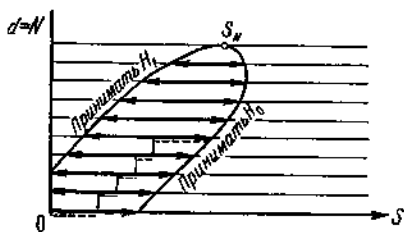


Рис. 4.4.4.

предложены достаточно простые и во многих случаях удачные способы решения.

Мы начнем с рассмотрения следующей классической задачи математической статистики: имеются две серии результатов независимых наблюдений

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

и

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Первая серия наблюдений произведена над случайной величиной с непрерывным распределением  $F_1(x)$ , а вторая — над случайной величиной с непрерывным распределением  $F_2(x)$ . Требуется выяснить: можно ли считать, что  $F_1(x) = F_2(x)$ ; не противоречат ли этой гипотезе результаты наблюдений? В точности так же ставится вопрос, когда желают выяснить, можно ли продукцию двух заводов считать одинаковой по качеству? Близкая постановка вопроса нередко возникает при выяснении влияния смены на качество продукции и во многих других случаях.

Для решения этой задачи предложено большое число методов, основанных на различных принципах; с некоторыми из них мы ознакомимся в настоящем параграфе.

**Критерий знаков.** Этот критерий очень прост в применении, но использует информацию, содержащуюся в результатах наблюдений, очень незначительно. Тем не менее во многих случаях он может оказаться весьма полезным для предварительной прикидки, поскольку он совсем не требует сколько-нибудь сложных вычислений. При использовании критерия знаков предполагается, что  $F_1(x) = F_2(x)$ . Строим разности

$$z_1 = x_1 - y_1, \quad z_2 = x_2 - y_2, \quad \dots, \quad z_n = x_n - y_n.$$

В силу независимости величин  $x_i$  и  $y_i$  каждая из разностей с вероятностью половина может принимать положительное и с вероятностью половина — отрицательное значение (значение 0 для непрерывной функции распределения может быть принято лишь с вероятностью, равной 0), если гипотеза  $F_1(x) = F_2(x)$  верна. Таким образом, мы находимся в условиях схемы Бернулли. Если наша гипотеза верна, то число положительных разностей будет сравнительно немного уклоняться от  $\frac{n}{2}$ . Таким образом, как большее число отрицательных, так и большее число положительных разностей должно наводить на мысль об ошибочности сделанной гипотезы.

Поскольку, согласно формуле Бернулли, вероятность того, что число положительных разностей окажется в наших наблюдениях

равным  $k$ , есть  $P_n(k) = C_n^k \frac{1}{2^n}$ , то мы можем построить такое правило: зададимся уровнем значимости  $\alpha$  (т. е. вероятность отбросить правильную гипотезу меньше или равна  $\alpha$ ). Станем отбрасывать гипотезу  $F_1(x) = F_2(x)$  всякий раз, как только число положительных разностей окажется большим числа  $r_\alpha$ , где  $r_\alpha$  — минимальное из чисел, для которых

$$\left[ C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \dots + C_n^n \right] \left( \frac{1}{2} \right)^n \leq \alpha.$$

Сформулированное правило представляет собой *односторонний критерий знаков*. Уровень значимости при нашем выборе  $r_\alpha$  не превышает  $\alpha$ .

С не меньшим правом, чем в случае излишне большого числа положительных разностей, можно отвергать проверяемую гипотезу и в том случае, когда велико число отрицательных разностей (т. е. число положительных разностей мало). Если для числа отрицательных разностей мы примем ту же границу  $r_\alpha$ , что и для положительных разностей, то *двусторонний критерий знаков* должен быть сформулирован так: гипотезу  $F_1(x) = F_2(x)$  мы отбрасываем каждый раз, как только число положительных разностей окажется большим  $r_\alpha$  или меньшим  $n - r_\alpha$ . Вероятность ошибочного отбрасывания гипотезы  $F_1(x) = F_2(x)$  при этом не превышает  $2\alpha$ , поскольку она равна

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^{n-r_\alpha-1} \right] + \left[ C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \dots + C_n^n \right] \right\} \frac{1}{2^n} = \\ & = 2 \left[ C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \dots + C_n^n \right] \frac{1}{2^n} \leq 2\alpha. \end{aligned}$$

Для  $n$  от 5 до 100 составлены границы критической области в случае  $1\%/_0$ ,  $2\%/_0$ ,  $5\%/_0$ -ных уровней значимости для двустороннего критерия знаков. Те же таблицы применимы и для одностороннего критерия знаков, но соответственно с  $0,5\%/_0$ ,  $1\%/_0$  и  $2,5\%/_0$ -м уровнями значимости. При  $n \geq 100$  с успехом может быть использована интегральная предельная теорема Муавра—Лалласа и записано приближенное равенство

$$\frac{1}{2^n} \left[ C_n^{r_\alpha+1} + C_n^{r_\alpha+2} + \dots + C_n^n \right] = P \{ \mu > r_\alpha \} \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2r_\alpha - n}{\sqrt{n}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dz = \alpha,$$

из которого с помощью таблиц нормального распределения легко для каждого  $n$  найти  $r_\alpha$ . Для примера, если  $n = 225$ , то для одностороннего критерия знаков при  $\alpha = 0,005$ ;  $0,01$ ;  $0,025$  следует соответственно выбрать  $r_\alpha = 131$ ;  $129$ ;  $127$ .

Для иллюстрации пользования критерием знаков приведем пример, заимствованный нами из книги И. В. Дунина-Барковского и Н. В. Смирнова [28]. На стр. 268 и 183 указанной книги приведены выборки по 20 штук изделий горизонтально-ковочной машины

Таблица 4.5.1

№№ колец в порядке обработки	1	2	3	4	5	6	7
За 6 марта	31,44	32,22	31,98	31,88	31,44	31,17	31,68
За 12 марта	32,17	32,61	32,68	32,29	32,36	32,25	32,28
Знак разности	—	—	—	—	—	—	—
№№ колец в порядке обработки	8	9	10	11	12	13	14
За 6 марта	31,28	31,72	31,58	31,87	32,12	31,04	31,87
За 12 марта	31,74	32,46	32,48	31,70	32,30	31,73	32,28
Знак разности	—	—	—	—	—	—	—
№№ колец в порядке обработки	15	16	17	18	19	20	
За 6 марта	31,62	31,73	31,48	31,88	31,96	31,49	
За 12 марта	31,60	32,47	32,74	32,26	32,92	32,63	
Знак разности	+	—	—	—	—	—	

и указаны размеры высоты последовательно отштампованных внутренних колец шарикоподшипников соответственно 6 и 12 марта 1951 г. Результаты приведены в таблице 4.5.1. Спрашивается: можно ли считать, что наладка штампа не изменилась с 6 по 12 марта?

Из таблицы 18 приложения видно, что гипотеза неизменности распределения высоты колец должна быть отброшена. Вероятность

того, что при этом мы отбросим правильную гипотезу, меньше 0,0003.

Заметим, что при применении критерия знаков никак нельзя забывать, что при подсчете числа знаков берутся неупорядоченные по величине результаты наблюдений. Поэтому, если мы наблюдаем, например, длительность жизни определенных изделий двух заводов и регистрируем последовательно длительности жизни изделий в порядке выхода их из строя для первой партии  $t_1, t_2, \dots, t_n$  и для второй партии  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ , то мы не можем к этим двум последовательностям применять критерий знаков. Однако небольшая «хитрость» позволяет критерий знаков использовать в случае плана  $[N, B, N]$ . Для этого мы заранее нумеруем изделия в произвольном порядке до постановки их на испытания и затем сравниваем результаты испытаний, записав обе последовательности испытаний в порядке этих номеров.

**Критерий Вилкоксона.** Простой в употреблении и одновременно весьма мощный критерий для проверки гипотезы, что одна случайная величина в среднем будет больше, чем другая, был предложен около двадцати лет назад Вилкоксоном и известен под его именем.

Пусть случайные величины  $\xi$  и  $\eta$  имеют соответственно непрерывные функции распределения  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$ . Мы скажем, что случайная величина  $\xi$  меньше, чем  $\eta$ , если при всех  $x$  выполняется неравенство  $F_1(x) > F_2(x)$ . Так как  $F_2(x)$  возрастает медленнее, чем  $F_1(x)$ , то это означает, что при каждом  $x$  у величины  $\eta$  остается большая вероятность превзойти  $x$ , чем у  $\xi$ . Эта задача представляет значительный интерес как для теории надежности, так и для других областей практики.

Имеются две последовательности взаимно независимых результатов наблюдений

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

и

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Спрашивается, можно ли считать, что  $F_1(x) = F_2(x)$ ?

Перемешаем обе последовательности наблюдений и расположим их в порядке возрастания величины. В результате получим последовательность неубывающих чисел (всего их  $m+n$ ). Если гипотеза  $F_1(x) = F_2(x)$  верна, то можно ждать, что числа обеих последовательностей хорошо перемешаются. Для оценки степени перемешивания в критерии Вилкоксона подсчитывается число *инверсий* членов первой последовательности относительно второй. Если в упорядоченной общей последовательности некоторому  $x$  предшествует  $y$ , то мы скажем, что имеет место одна инверсия. Если некоторому  $x$  предшествует  $k$  значений  $y$ , то это значение  $x$

имеет  $k$  инверсий. Общее число инверсий равно сумме числа инверсий всех  $x$ .

Согласно одностороннему критерию Вилкоксона гипотеза  $F_1(x) = F_2(x)$  отбрасывается, если наблюдаемое число инверсий  $U$  превосходит некоторую границу  $\bar{U}_\alpha$ .

В двустороннем критерии Вилкоксона гипотеза  $F_1(x) = F_2(x)$  отбрасывается как в том случае, когда число инверсий превосходит границу  $\bar{U}_\alpha$ , так и в том случае, когда число инверсий оказывается меньшим границы  $\underline{U}_\alpha$ .

Наша задача теперь состоит в определении этих границ. Оценим сначала математическое ожидание и дисперсию числа инверсий. Для каждой пары наблюдений  $x_i$  и  $y_j$  определим случайную величину  $z_{ij}$  следующим путем:

$$z_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } x_i > y_j, \\ 0, & \text{если } x_i < y_j. \end{cases}$$

Ясно, что  $\mathbf{P}\{x_i > y_j\} = \mathbf{P}\{x_i < y_j\}^1$  и что  $U = \sum z_{ij}$ , где суммирование производится по всем значениям  $i$  и  $j$ . Отсюда, поскольку  $\mathbf{M}z_{ij} = \frac{1}{2}$  и число всех слагаемых в сумме равно  $mn$ , находим, что

$$\mathbf{M}U = \frac{mn}{2}.$$

Несколько усложнив подсчеты, можно найти все центральные моменты величины  $U$ . В частности,

$$\mathbf{D}U = \frac{mn}{12}(m+n-1).$$

Доказано, что при  $\min(m, n) \rightarrow \infty$  имеет место предельное равенство

$$\mathbf{P}\left\{\frac{U - \mathbf{M}U}{\sqrt{\mathbf{D}U}} < x\right\} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

При этом выяснено, что эта теорема дает хорошее приближение уже при  $m+n \geq 20$  и  $\min(m, n) \geq 3$ .

<sup>1)</sup> Если величины  $\xi$  и  $\eta$  независимы и имеют непрерывную функцию распределения  $F(x)$ , то

$$\mathbf{P}\{\xi > \eta\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \int_{-\infty}^x dF(y) \right] dF(x) = \frac{1}{2}.$$

Если провести подсчеты для данных, приведенных в таблице 4.5.1, то окажется, что число инверсий  $U$  равно 40. В силу приведенного предельного соотношения можно написать цепочку равенств

$$P\{U \leq 40\} = P\left\{\frac{U-200}{\sqrt{60U}} < -\frac{160}{13,67}\right\} < P\left\{\frac{U-200}{\sqrt{60U}} < -4\right\} < 0,0001.$$

Отсюда мы заключаем, что и критерий Вилкоксона, как и критерий знаков, отвергает гипотезу о неизменности настройки штампа 6 и 12 марта.

При малых значениях  $m$  и  $n$  для критерия Вилкоксона составлены таблицы критических значений  $\underline{U}_\alpha$  и  $\overline{U}_\alpha$  с заданным уровнем значимости  $\alpha$ . Эти таблицы приведены нами в настоящей книге (см. таблицу 19 приложения).

Обратим внимание на то, что критерий Вилкоксона не учитывает значений, принимаемых случайной величиной при испытаниях № 1, № 2 и т. д. Для его применения нужно только знание упорядоченной по величине последовательности результатов наблюдений. Отсюда вытекает, что метод Вилкоксона хорошо приспособлен, в частности, для использования при сравнении однородности качества материалов двух серий на срок жизни при стеновых испытаниях типа  $[N, B, N]$ . При этом в каждой серии испытаний может быть различное число изделий.

По поводу критериев Вилкоксона и знаков мы сделаем одно замечание, которое покажет, что оба эти критерия, вообще говоря, не могут служить для сравнения гипотезы  $F_1(x) = F_2(x)$  с иной произвольной гипотезой. Простой пример покажет нам, что можно найти такой случай, в котором заведомо оба распределения  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  существенно различны, но как критерий знаков, так и критерий Вилкоксона приводит к хорошему согласию с гипотезой  $F_1(x) = F_2(x)$ . Вдобавок оказывается, что при увеличении числа наблюдений до  $\infty$  вероятность решения принять эту гипотезу будет стремиться к 1.

Пусть распределение  $F_1(x)$  таково:

$$F_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } x \leq a, \\ \frac{1}{2} & \text{при } a \leq x \leq b, \\ \psi(x) & \text{при } x \geq b; \end{cases}$$

Функции  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  — неубывающие, непрерывные, первая из них возрастает от 0 до  $\frac{1}{2}$ , вторая — от  $\frac{1}{2}$  до 1.



Распределение  $F_2(x)$  определяется равенствами

$$F_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq a, \\ \chi(x) & \text{при } a \leq x \leq b, \\ 1 & \text{при } x \geq b; \end{cases}$$

$\chi(x)$  — непрерывная функция, возрастающая от 0 до 1.

Легко понять, что для нашего примера число знаков в критерии знаков всегда будет вблизи от  $\frac{n}{2}$  и число инверсий вблизи от  $\frac{mn}{2}$ . Таким образом, оба критерия почти всегда будут приводить нас к ошибочному заключению. Конечно, наш пример специально придуман, и в реальной обстановке трудно предположить, чтобы встретились такие искусственные распределения. При беглом просмотре статистического материала разделение знаков на две группы, так же как и инверсий на две резко различные группы, бросается в глаза, и даже малоопытный исследователь не может ошибиться.

Критерий Н. В. Смирнова. Интересный (и притом состоятельный<sup>1)</sup>) критерий для проверки однородности статистического материала был предложен и разработан Н. В. Смирновым. Пусть по-прежнему имеются две последовательности взаимно независимых наблюдений, результаты которых

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$y_1, y_2, \dots, y_n.$$

Построим две эмпирические функции распределения

$$S_m(x) = \frac{k_1(x)}{m} \quad \text{и} \quad T_n(x) = \frac{k_2(x)}{n},$$

где  $k_1(x)$  и  $k_2(x)$  — соответственно числа  $x_i$  и  $y_j$ , оказавшиеся меньше, чем  $x$ . Построим величины

$$D_{mn}^+ = \sup_x [S_m(x) - T_n(x)] \quad \text{и} \quad D_{mn} = \sup_x |S_m(x) - T_n(x)|.$$

Как доказал Н. В. Смирнов, при  $\min(m, n) \rightarrow \infty$  имеют место предельные соотношения

$$\Phi_{mn}^+(z) = \mathbf{P} \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn}^+ < z \right\} \rightarrow 1 - e^{-2z^2} \quad \text{при } z \geq 0$$

<sup>1)</sup> Т. е. такой, для которого вероятность принять ложную гипотезу стремится к нулю с ростом числа испытаний до бесконечности.

и

$$\Phi_{mn}(z) = P \left\{ \sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn} < z \right\} \rightarrow K(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2}, \quad (z \geq 0)$$

При  $m = n$ , как было выяснено Б. В. Гвденко и В. С. Королюком, можно найти не только простые предельные закономерности, но и точные распределения для каждого  $n$ . Для каждого значения  $z$  определим целое число  $c$  по формуле

$$c = [z\sqrt{2n}].$$

Тогда если гипотеза  $F_1(x) = F_2(x)$  верна и функция  $F_1(x)$  непрерывна, то

$$\begin{aligned} \Phi_n^+(z) &= P \{ \sqrt{2n} D_{nn}^+ < z \} = 0 && \text{при } z \leq 0, \\ \Phi_n^+(z) &= 1 - \frac{C_{2n}^{n-c}}{C_{2n}^n} && \text{при } 0 < z \leq \sqrt{\frac{n}{2}}, \\ \Phi_n(z) &= 0 && \text{при } z < \frac{1}{\sqrt{2n}}, \\ \Phi_n(z) &= \sum_{k=-\lfloor \frac{n}{c} \rfloor}^{\lfloor \frac{n}{c} \rfloor} (-1)^k \frac{C_{2n}^{n-ck}}{C_{2n}^n} && \text{при } \frac{1}{\sqrt{2n}} < z \leq \sqrt{\frac{n}{2}}, \\ \Phi_n^+(z) &= \Phi_n(z) = 1 && \text{при } z > \sqrt{\frac{n}{2}}. \end{aligned}$$

Мы не приводим доказательства этой теоремы, чтобы не отвлекать внимание читателя от основной цели книги техническими деталями вывода.

Как и всякий статистический прием, предлагаемый метод действует тем лучше, чем больше произведено наблюдений. С вероятностью, не меньшей 0,95, следует говорить об изменении распределения, если при числе наблюдений  $n$  величина  $nD_n$  достигла или превзошла значения, указанные в таблице 4.5.2.

Таблица 4.5.2

$n$	9	10	12	15	20	25	30	35	50	75	100
$nD_n$	6	6	7	8	9	10	11	12	14	17	19

Приведенные данные показывают, что при малых  $n$  критерий Н. В. Смирнова малочувствителен. Заметим дополнительно, что для критерия Смирнова нельзя построить примеров, подобных построенному в связи с критериями знаков и Вилкоксона; этот критерий состоятелен. В таблице 21 приложения приведены значения вероятности

$$P\{n | S_n(x) - T_n(x) | \leq k\}$$

для целочисленных значений  $k$ .

Приведенные теоремы могут быть распространены на более сложную задачу, когда проверяется совпадение функций распределения  $F_1(x)$  и  $F_2(x)$  не во всей области их изменения, а только в отрезке от  $-\infty$  до того значения  $x$ , при котором  $F_1(x) = F_2(x) = \theta$ . Именно с таким положением дел приходится встречаться в испытаниях, проводящихся по плану  $[N, B, r]$ . Представим себе, что поставлены две серии испытаний указанного типа. В первой серии взято  $m$  изделий, во второй —  $n$ . В первом случае испытания проводятся до  $r$ -го отказа, во втором — до  $s$ -го отказа. Предположим далее, что  $m$  и  $n$  выбраны так, что  $\frac{r}{m} = \frac{s}{n} = \theta$ .

В предположении, что  $F_1(x) = F_2(x)$  и представляет собой непрерывную функцию, И. Д. Квит [21] доказал ряд предельных теорем относительно максимального отклонения двух эмпирических распределений на определенном интервале. Мы ограничимся частными случаями его результатов.

Обозначим

$$D_{mn}^+(\theta) = \sup_{x, F_1(x) \leq \theta} [S_m(x) - T_n(x)]$$

и

$$D_{mn}(\theta) = \sup_{x, F_1(x) \leq \theta} |S_m(x) - T_n(x)|.$$

Тогда при  $\min(m, n) \rightarrow \infty$

$$P\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn}^+(\theta) < z\right\} \rightarrow \Phi^+(z, \theta)$$

и

$$P\left\{\sqrt{\frac{mn}{m+n}} D_{mn}(\theta) < z\right\} \rightarrow \Phi(z, \theta),$$

где

$$\Phi^+(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-\infty}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du - e^{-2z^2} \int_{-\infty}^{a_1} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right]$$

и

$$\Phi(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \int_{-a}^a e^{-\frac{u^2}{2}} du + 2 \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2 z^2} \int_{a-k}^{a_k} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right].$$

Здесь

$$a = \frac{z}{\sqrt{\theta(1-\theta)}}, \quad a_k = \frac{1+k(1-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} z.$$

Для случая  $m = n$  Е. Л. Рвачева [25] нашла точные распределения для статистик  $D_{mn}^+(\theta)$  и  $D_{mn}(\theta)$ . Г. М. Маня были рассчитаны таблицы распределений  $\Phi^+(z, \theta)$  и  $\Phi(z, \theta)$  [22], [23].

---

## ГЛАВА 5 РЕЗЕРВИРОВАНИЕ БЕЗ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

### § 5.1. Введение

Резервирование является одним из основных методов повышения надежности, который позволяет, по крайней мере в принципе, безгранично повышать надежность систем.

Резервирование состоит в том, что к элементу (или блоку) системы мы присоединяем один или несколько резервных элементов (или блоков), которые по мере возникновения отказов последовательно подключаются на место основного элемента (или блока) и выполняют его функции.

В дальнейшем ради удобства мы будем говорить о резервировании элемента, понимая под словом «элемент» и элемент, как неразложимую часть системы, и блок, и даже всю систему в целом.

Совокупность основного и его резервных элементов мы будем в дальнейшем называть резервной группой.

В зависимости от того, в каком состоянии находятся резервные элементы до момента их включения в работу, резервирование элемента делится на несколько типов.

1°. *Нагруженный резерв.* Резервные элементы находятся в том же режиме, что и основной элемент, их надежность не зависит от того, в какой момент они включились на место основного.

Здесь и в дальнейшем в этой главе под *надежностью* мы будем понимать вероятность безотказной работы в течение заданного времени, а под *ненадежностью* — вероятность возникновения отказа за это же время.

2°. *Ненагруженный резерв.* Резервные элементы находятся в выключенном состоянии и по условию до момента их включения на место основного не могут отказать.

3°. *Облегченный резерв.* Резервные элементы находятся в облегченном режиме до момента их включения на место основного. Во время ожидания в резерве они могут отказать, но с вероятностью меньшей, чем вероятность отказа основного элемента. Очевидно, что облегченный резерв является наиболее общим типом

резервирования, тогда как первые два типа будут его крайними частными случаями.

В настоящей главе мы подробно рассмотрим эти три типа резерва, выведем точные и приближенные формулы, оценивающие надежность резервной группы, а также рассмотрим некоторые общие свойства зарезервированных систем. Задача об оптимальном резервировании системы в этой главе не рассматривается. Ниже мы будем предполагать, что замена отказавшего элемента резервным совершается мгновенно. Будем также считать, что отказавшие элементы не восстанавливаются (отсюда и название главы). Резервирование с восстановлением будет рассмотрено в главе 6.

### § 5.2. Нагруженный резерв

В случае нагруженного резерва элемент находится в одном и том же режиме и до и после включения в работу. Поэтому надежность каждого элемента не зависит от того, в какой момент он перешел в рабочее состояние, т. е. не зависит от моментов отказа других элементов. Мы считаем, что время, в течение которого отказавший элемент заменяется резервным, практически равно нулю, а переключающее устройство (если оно есть) абсолютно надежно.

Пусть у нас имеется один основной и  $n-1$  резервных элементов (рис. 5.2.1).

Обозначим через

$$p_1(t), p_2(t), \dots, p_n(t)$$

надежности соответствующих элементов, а их ненадежности — через

$$q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t) \quad (q_k = 1 - p_k).$$

Пусть  $P_n(t)$  — надежность резервированной группы, а  $Q_n(t)$  — ее ненадежность.

По условию отказ наступает в тот момент, когда выходит из строя последний из работающих элементов. Поэтому для того, чтобы в течение времени  $t$  отказала резервированная группа, нужно, чтобы в течение этого времени отказал каждый из  $n$  элементов. Так как все отказы независимы, то по теореме умножения вероятностей мы получаем

$$Q_n(t) = q_1(t) q_2(t) \dots q_n(t). \quad (5.2.1)$$

Если переписать это равенство для надежностей, то мы получим

$$P_n(t) = 1 - [1 - p_1(t)][1 - p_2(t)] \dots [1 - p_n(t)]. \quad (5.2.2)$$

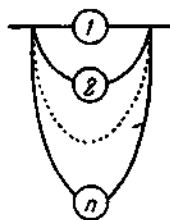


Рис. 5.2.1.

Из этих формул, между прочим, следует, что надежность резервной группы не зависит от порядка включения резервных элементов. Из них также следует, что надежность резервной группы определяется величинами надежности элементов в этот момент и совершенно не зависит от того, как менялись функции надежности элементов до данного момента.

Если все элементы имеют одинаковую надежность, т. е.

$$p_1(t) = p_2(t) = \dots = p_n(t) = p(t), \quad q(t) = 1 - p(t),$$

то формулы упрощаются:

$$Q_n(t) = q^n(t) \quad (5.2.3)$$

(т. е. ненадежность резервной группы равна ненадежности элемента, возведенной в степень, равную кратности резерва) и соответственно

$$P_n(t) = 1 - [1 - p(t)]^n. \quad (5.2.4)$$

Формула (5.2.3) очень проста и удобна. Она легко разрешается относительно каждой входящей в нее величины. Если, например, нам задана ненадежность элемента  $q(t)$  и требуется найти такое число резервных элементов, при котором ненадежность  $Q_n(t)$  не будет превосходить заданной величины  $Q$ , то из неравенства

$$q^n \leq Q$$

получим

$$n \geq \frac{\ln \frac{1}{Q}}{\ln \frac{1}{q}}.$$

Если же, наоборот, задавшись числом резервных элементов, определять, какой должна быть надежность каждого из них, то мы получим

$$q = \sqrt[n]{Q}.$$

Для случая экспоненциального закона

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t}$$

полезно заметить, что если надежности элементов близки к единице, то

$$q_k(t) = 1 - e^{-\lambda_k t} \approx \lambda_k t,$$

и тогда

$$Q_n \approx \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n t^n, \quad (5.2.1')$$

а для равнонадежных элементов

$$Q_n \approx (\lambda t)^n. \quad (5.2.3')$$

Относительная ошибка в формуле (5.2.1)' не превосходит величины

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{2} t.$$

Кроме того, правые части равенств (5.2.1') и (5.2.3') не только являются приближением, но и дают для ненадежности оценку сверху.

Из неравенства  $1 - e^{-x} \leq x$  следует, что  $q_k(t) \leq \lambda_k t$ ; откуда

$$Q_n \leq \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n t^n.$$

Формулы (5.2.1') и (5.2.3') удобны в том случае, когда нам заданы не надежности элементов, а соответствующие опасности отказа  $\lambda_k$ .

Среднее время работы резервной группы определяется из формулы

$$T_n = \int_0^{\infty} P_n(t) dt. \quad (5.2.5)$$

Если надежности элементов заданы аналитически, то среднее время во многих случаях вычисляется в конечном виде.

1) Экспоненциальный закон

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t},$$

$$\begin{aligned} T_n &= \int_0^{\infty} [1 - \prod_{k=1}^n (1 - e^{-\lambda_k t})] dt = \\ &= \int_0^{\infty} [\sum_k e^{-\lambda_k t} - \sum_{k < s} e^{-(\lambda_k + \lambda_s)t} + \sum_{k < s < l} e^{-(\lambda_k + \lambda_s + \lambda_l)t} - \dots] dt = \\ &= \sum_k \frac{1}{\lambda_k} - \sum_{k < s} \frac{1}{\lambda_k + \lambda_s} + \sum_{k < s < l} \frac{1}{\lambda_k + \lambda_s + \lambda_l} - \dots + (-1)^n \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}. \end{aligned}$$

Для случая равных надежностей

$$p(t) = e^{-\lambda t},$$

среднее время получается еще проще

$$T_n = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\lambda t})^n] dt.$$

Введем новую переменную

$$z = 1 - e^{-\lambda t}.$$



Тогда

$$T_n = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 \frac{1-z^n}{1-z} dz = \frac{1}{\lambda} \int_0^1 (1+z+z^2+\dots+z^{n-1}) dz = \\ = \frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

Так как среднее время работы одного элемента  $T_1 = \frac{1}{\lambda}$ , то

$$T_n = T_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right). \quad (5.2.6)$$

Если  $n$  велико, то среднее время можно вычислить приближенно по формуле  $T_n \approx T_1 \left(\ln n + C + \frac{1}{2n}\right)$ , где  $C = 9,57712\dots$  — постоянная Эйлера.

2) Закон Вейбулла. Ограничимся здесь и в следующем пункте случаем равных надежностей

$$p(t) = e^{-\lambda t^\alpha},$$

$$T_n = \int_0^\infty [1 - (1 - e^{-\lambda t^\alpha})^n] dt = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{k-1} \int_0^\infty e^{-\lambda k t^\alpha} dt = \\ = \sum_{k=1}^n C_n^k (-1)^{k-1} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha} + 1\right)}{\lambda^{\frac{1}{\alpha}} k^{\frac{1}{\alpha}}},$$

или

$$T_n = T_1 \sum_{k=1}^n C_n^k \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\frac{1}{\alpha}}}.$$

3) Степенной закон  $p(t) = \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\alpha}$  ( $\alpha > 1$ , иначе сред-

нее время не существует),

$$T_n = \int_0^\infty \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{t}{t_0}\right)^\alpha}\right)^n\right] dt = \frac{n! t_0}{\left(n - \frac{1}{\alpha}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} - t_0.$$

Если функция надежности  $p(t)$  задана графически или в ряде точек, то среднее время можно определить по формуле (5.2.5) численным интегрированием.

Пусть мы провели испытания  $N$  одинаковых элементов, доведя их до отказа последнего элемента, и в результате испытаний получили величины

$$0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_N$$

— случайные времена работы элементов, расположенные в порядке возрастания. Эмпирическая функция надежности  $\hat{P}(t) = 1 - \frac{k}{N}$ , где  $k$  — число отказов, происшедших до момента  $t$ . Подставив эту функцию в формулу (5.2.5), получим

$$T_n \approx \hat{T}_n = \int_0^{\infty} [1 - (1 - \hat{P}(t))^n] dt = \sum_{k=1}^N \frac{k^n - (k-1)^n}{N^n} \tau_k.$$

Таким образом, среднее время работы резервной группы по результатам испытаний можно определить непосредственно.

Написанное может вселить уверенность, что среднее время  $T_n$  можно легко вычислить либо по точным формулам, либо с достаточной точностью по результатам испытаний. Однако это не так, во всяком случае не совсем так. Дело в том, что величина среднего времени  $T_n$  определяется в основном поведением функции надежности  $p(t)$  при больших значениях времени, значительно превосходящих среднее время работы элемента. Чем быстрее убывает функция  $p(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ , тем меньше величина  $T_n$ , и наоборот, причем теоретически  $T_n$  может меняться в довольно широких пределах, а именно,

$$T_1 \leq T_n \leq nT_1.$$

В то же время функция надежности  $p(t)$  чаще всего известна нам лишь на ограниченном интервале времени, который или меньше, или, по крайней мере, соизмерим со средним временем работы одного элемента, ибо это среднее время часто измеряется десятками и сотнями тысяч часов, и мы физически не можем испытывать элементы такое время.

В том случае, когда надежность задается аналитически, эти соображения также сохраняют свою силу.

Действительно, говоря, например, что надежность подчиняется экспоненциальному закону, мы обычно понимаем под этим следующее: на интересующем нас участке времени опасность отказа  $\lambda(t) = \lambda$  постоянна. Что будет дальше, нам неизвестно, а это дальнейшее поведение  $\lambda(t)$  и определяет величину  $T_n$ .

Поэтому вышеприведенные формулы пригодны, вероятно, для довольно узкого класса элементов, а именно, для элементов, у которых хорошо изучен период «старости».

Для большинства элементов достаточно иметь простую, хотя и грубую оценку для среднего времени  $T_n$ . Выведем такую оценку. Предположим, что функция  $q(t)$  выпукла вверх

$$T_n = \int_0^{\infty} [1 - q^n(t)] dt.$$

Сделаем замену  $z = q(t)$ ,  $t = \psi(z)$ . Функция  $\psi(z)$  выпукла вниз. После замены интегрируем по частям

$$T_n = \int_0^1 (1 - z^n) d\psi(z) = n \int_0^1 z^{n-1} \psi(z) dz.$$

Далее,

$$\psi(z) \geq \psi(a) + \psi'(a)(z - a),$$

так как выпуклая вниз кривая лежит выше любой касательной к этой кривой.

Отсюда

$$T_n \geq n \int_0^1 z^{n-1} [\psi(a) + \psi'(a)(z - a)] dz = \psi(a) + \psi'(a) \left( \frac{n}{n+1} - a \right).$$

Так как число  $a$  произвольно, положим  $a = \frac{n}{n+1}$ . Получим

$$T_n \geq \psi \left( \frac{n}{n+1} \right) \quad \text{или} \quad q(T_n) \geq \frac{n}{n+1};$$

окончательно

$$p(T_n) \leq \frac{1}{n+1}. \quad (5.2.7)$$

Чтобы понять, насколько точно это неравенство, выведем аналогичную оценку снизу. Для этого предположим, что наш элемент стареющий, т. е. опасность отказа  $\lambda(t)$  монотонно возрастает. Тогда

$$p(t) = e^{-\int_0^t \lambda(t) dt} = e^{-\Lambda(t)},$$

причем функция  $\Lambda(t)$  выпукла вниз

$$T_n = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-\Lambda(t)})^n] dt.$$

Сделаем замену  $z = \Lambda(t)$ ,  $t = \varphi(z)$  и проинтегрируем по частям

$$T_n = \int_0^{\infty} [1 - (1 - e^{-z})^n] d\varphi(z) = n \int_0^{\infty} (1 - e^{-z})^{n-1} e^{-z} \varphi(z) dz.$$

Действуя как и в предыдущем случае, получим

$$T_n \leq \varphi(a) + \varphi'(a) \left[ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - a \right].$$

Положим

$$a = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Тогда

$$T_n \leq \varphi \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

или

$$\Lambda(T_n) \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Отсюда для надежности получается оценка

$$p(T_n) = e^{-\Lambda(T_n)} \geq e^{-\left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)}.$$

Легко показать, что разность

$$\ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right),$$

монотонно убывая, стремится к пределу, равному  $-C$ . Поэтому

$$(n+1)p(T_n) \geq e^{+\ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)} \geq e^{-C} = 0,56 \dots \quad (5.2.8)$$

Условия, при которых справедливы неравенства (5.2.7) и (5.2.8), можно ослабить. Достаточно, чтобы, начиная с некоторого  $t = t_0$ , касательные к графикам  $p(t)$  и  $\ln[p(t)]^{-1}$  лежали ниже этих кривых. Тогда, если  $T_n > t_0$ , справедливо неравенство

$$0,56 \approx e^{-C} \leq (n+1)p(T_n) \leq 1. \quad (5.2.9)$$

Это неравенство показывает, что для определения среднего времени работы резервной группы можно пользоваться приближенной формулой

$$p(T_n) = \frac{1}{n+1}. \quad (5.2.10)$$

При этом мы немного занижаем среднее время, т. е. истинная величина  $T_n$  будет несколько больше расчетной.

При выводе этой приближенной формулы мы предполагали, что функции  $q(t)$  и  $\Lambda(t) = \ln \frac{1}{p(t)}$  выпуклы вниз. Если эта выпуклость имеет место, начиная с некоторого  $t$ , то неравенство (5.2.9) будет иметь место, начиная с некоторого номера  $n$ .

Из формулы (5.2.10) видно, как растет среднее время с ростом кратности резервирования. Например, для закона Вейбулла

$$e^{-\lambda T_n^\alpha} \approx \frac{1}{n+1},$$

$$T_n \approx \left[ \frac{\ln(n+1)}{\lambda} \right]^{\frac{1}{\alpha}},$$

среднее время растет медленно.

Для степенного закона

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{T_n}{t_0}\right)^\alpha} = \frac{1}{n+1},$$

$$T_n = t_0 (n+1)^{\frac{1}{\alpha}} - t_0,$$

среднее время растет значительно быстрее.

При рассмотрении горячего резерва мы предполагали, что работает всегда один элемент, а остальные находятся в резерве. В некоторых случаях характер системы таков, что все  $n$  элементов одновременно выполняют некоторую функцию, причем для удовлетворительного выполнения этой функции необходимо, чтобы по меньшей мере  $m$  элементов из  $n$  было исправно. Значит, отказ резервной группы наступает в тот момент, когда происходит  $(n - m + 1)$ -й отказ.

Если предположить, что отказы элементов независимы, то надежность резервной группы может быть легко найдена. В общем случае, когда надежности элементов различны, рассмотрим многочлен

$$P(x) = (p_1x + q_1)(p_2x + q_2) \dots (p_nx + q_n) =$$

$$= P_{nn}x^n + P_{nn-1}x^{n-1} + \dots + P_{nk}x^k + \dots + P_{n0}.$$

Очевидно, что коэффициент  $P_{nk}$  есть вероятность того, что к данному моменту из  $n$  элементов останется в живых ровно  $k$ .

Отсюда

$$P_n = \sum_{k=m}^n P_{nk}. \quad (5.2.11)$$

Если все элементы равнонадежны, то

$$P_n = \sum_{k=m}^n C_n^k p^k q^{n-k}. \quad (5.2.12)$$

В заключение этого параграфа укажем на одну теоретико-вероятностную интерпретацию горячего резерва.

Пусть  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  — случайные времена работы основного и резервных элементов, которые мы считаем равнонадежными, а  $\tau^{(n)}$  — случайное время работы резервной группы. Тогда очевидно, что

$$\tau^{(n)} = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n).$$

Мы можем рассматривать величины  $\tau_k$  как независимые наблюдения случайной величины с законом распределения  $q(t)$ . Пусть

$$\tau'_1 < \tau'_2 < \dots < \tau'_n$$

— величины  $\tau_k$ , расположенные в порядке возрастания. Последовательность  $\tau'_k$  называется *вариационным рядом*. Легко заметить, что

$$\tau^{(n)} = \tau'_n.$$

Таким образом, момент отказа резервной группы является крайним членом вариационного ряда. Для последнего случая, описываемого формулой (5.2.12), момент отказа

$$\tau^{(n)} = \tau'_{n-m+1}.$$

Значит, при изучении горячего резерва мы можем применять хорошо развитую теорию распределения членов вариационного ряда [2].

### § 5.3. Схема гибели

Рассмотрим одну теоретико-вероятностную схему, которая может быть широко использована при изучении различных типов резервирования [3]. Для удобства мы будем описывать эту схему в терминах теории надежности, хотя она применима и в целом ряде других случаев (например, в биологии, медицине и т. д.). Пусть дана система, состоящая из некоторого числа элементов, и в этой системе происходят отказы элементов. Возникающий поток отказов подчиняется следующим условиям:

1. Если к моменту  $t$  произошел  $k-1$  отказ, то независимо от моментов возникновения этих отказов вероятность того, что на бесконечно малом участке  $(t, t + \Delta t)$  произойдет один отказ, равна

$$\lambda_k \Delta t + o(\Delta t),$$

а вероятность того, что на этом участке не произойдет отказа, равна

$$1 - \lambda_k \Delta t + o(\Delta t).$$

2. В момент, когда происходит  $n$ -й отказ, работа системы прекращается и никаких изменений в системе в дальнейшем не происходит. Поэтому  $\lambda_{n+1} = 0$ .

Эти два условия, как мы покажем, полностью определяют конечный поток отказов, и если они выполняются, то несущественно, какие элементы составляют систему, как они соединены в системе, какие из элементов отказывают и как влияют одни отказы на другие.

Заметим еще, что второе условие не очень существенно и связано со спецификой задач в теории резервирования—ведь резерв всегда конечен и, следовательно, до отказа резервной группы может произойти лишь конечное число отказов.

Если к моменту  $t$  произошел  $k-1$  отказ, то мы говорим, что наша система находится в состоянии  $k$ . Обозначим через  $\pi_k(t)$  вероятность того, что в момент  $t$  система находится в состоянии  $k$ . Тогда  $\pi_{n+1}(t) = Q_n(t)$  есть вероятность того, что система откажет к моменту  $t$ , т. е. ненадежность системы. Сравним состояния системы в два бесконечно близких момента  $t$  и  $t + \Delta t$ , по формуле полных вероятностей получим

$$\pi_k(t + \Delta t) = \pi_{k-1}(t) \lambda_{k-1} \Delta t + \pi_k(t) (1 - \lambda_k \Delta t) + o(\Delta t).$$

Отсюда при  $\Delta t \rightarrow 0$  получаем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \pi_1' &= -\lambda_1 \pi_1(t), \\ \pi_k' &= \lambda_{k-1} \pi_{k-1}(t) - \lambda_k \pi_k(t) \quad (k=2, 3, \dots, n), \\ \pi_{n+1}' &= \lambda_n \pi_n(t). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1)$$

Величины  $\pi_k(t)$  удовлетворяют начальным условиям  $\pi_1(0) = 1$ ,  $\pi_k(0) = 0$  при  $k > 1$ .

Чтобы получить решение этой системы в замкнутом виде, удобно использовать преобразование Лапласа.

Введем обозначение

$$a_k(p) = \int_0^{\infty} \pi_k(t) e^{-pt} dt.$$

Величины  $a_k(t)$  удовлетворяют соответствующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} -1 + pa_1(p) &= -\lambda_1 a_1(p), \\ pa_k(p) &= \lambda_{k-1} a_{k-1}(p) - \lambda_k a_k(p) \quad (k=2, 3, \dots, n), \\ pa_{n+1}(p) &= \lambda_n a_n(p). \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Разрешив эту систему, получим

$$\begin{aligned} a_1(p) &= \frac{1}{p + \lambda_1}, \quad a_k(p) = \frac{\lambda_{k-1}}{p + \lambda_k} a_{k-1}(p), \\ a_{n+1} &= \frac{\lambda_n}{p} a_n(p), \end{aligned}$$

откуда

$$a_{n+1}(p) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{p(p + \lambda_1) \dots (p + \lambda_n)}. \quad (5.3.3)$$

Применив формулу обращения преобразования Лапласа, мы находим искомую вероятность

$$\pi_{n+1}(t) = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{2\pi} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{e^{pt}}{p(p + \lambda_1) \dots (p + \lambda_n)} dp \quad (c > 0). \quad (5.3.4)$$

Вертикальный контур интегрирования мы можем заменить замкнутым контуром, обходящим в положительном направлении нули знаменателя. Тогда по основной теореме о вычетах

$$\pi_{n+1}(t) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k \omega'(-\lambda_k)} \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n, \quad (5.3.5)$$

где  $\omega(x) = (x + \lambda_1)(x + \lambda_2) \dots (x + \lambda_n)$ .

Эта формула годится только для случая, когда все числа  $\lambda_k$  различны. В противном случае формула несколько усложняется, и мы не будем ее выписывать. Отметим только частный случай  $\lambda_k = \lambda$ . Тогда

$$\pi_{n+1}(t) = \frac{\lambda^n}{2\pi i} \int_C \frac{e^{pt}}{p(p + \lambda)^n} dp.$$

Продифференцируем обе части равенства по  $t$ , тогда

$$\pi'_{n+1}(t) = \frac{\lambda^n}{2\pi i} \int_C \frac{e^{pt}}{(p + \lambda)^n} dp = \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}.$$

Отсюда

$$\pi_{n+1}(t) = \int_0^t \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} dt = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \quad (5.3.6)$$

Вычислять вероятность  $\pi_{n+1}(t)$  по формуле (5.3.5) не очень удобно. Дело в том, что эта вероятность обычно мала (напомним, что в наших задачах  $\pi_{n+1}(t)$  — ненадежность резервной группы), в то время как слагаемые в правой части (5.3.5) велики. Поэтому каждое слагаемое должно вычисляться с большим числом значащих цифр. Кроме того, из формулы (5.3.5) трудно усмотреть, какой качественный характер имеет зависимость  $\pi_{n+1}(t)$  от времени и параметров  $\lambda_k$ .

Поэтому целесообразно найти простые приближенные формулы для  $\pi_{n+1}(t)$ , каждая из которых годилась бы для определенного диапазона изменения времени и параметров  $\lambda_k$ .



Первая приближенная формула. Разложим функцию  $\pi_{n+1}(t)$  в ряд по степеням  $t$ .

Для этого подынтегральную функцию в формуле (5.3.4) разложим в ряд

$$\begin{aligned} \frac{e^{pt}}{p(p+\lambda_1)\dots(p+\lambda_n)} &= \frac{e^{pt}}{p^{n+1}\left(1+\frac{\lambda_1}{p}\right)\dots\left(1+\frac{\lambda_n}{p}\right)} = \\ &= \frac{e^{pt}}{p^{n+1}} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \frac{e^{pt}}{p^{n+2}} + (\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \dots \\ &\dots + \lambda_{n-1}\lambda_n + \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2) \frac{e^{pt}}{p^{n+3}} \mp \dots + (-1)^k \frac{e^{pt}}{p^{n+k+1}} S_k + \dots, \end{aligned}$$

где

$$S_k = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=k} \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}, \quad k_i \geq 0.$$

Возьмем в качестве контура интегрирования круг радиуса  $R > \max_{1 \leq k \leq n} \lambda_k$  и проинтегрируем этот ряд почленно. Получим

$$\pi_{n+1}(t) = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \sum_{k=0}^{\infty} S_k \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} (-1)^k. \quad (5.3.7)$$

Докажем, что этот ряд обладает следующим замечательным свойством, характерным для многих правильных знакопеременных рядов: при любых значениях  $t > 0$ ,  $n$  и  $\lambda_k > 0$  ошибка, возникающая при отбрасывании всех членов ряда, начиная с некоторого, имеет тот же знак, что и первый отброшенный член, а по абсолютной величине всегда меньше этого члена.

Рассмотрим для удобства функцию

$$f_n(t) = \frac{\pi_{n+1}(t)}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{pt}}{p(p+\lambda_1)\dots(p+\lambda_n)} dp.$$

Возьмем производную

$$f_n'(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{pt}(p+\lambda_n-\lambda_n)}{p(p+\lambda)\dots(p+\lambda_n)} dp = f_{n-1}(t) - \lambda_n f_n(t).$$

Отсюда в силу того, что  $f_n(t) \geq 0$ , получаем  $f_n'(t) \leq f_{n-1}(t)$  или

$$\begin{aligned} f_n(t) &\leq \int_0^t f_{n-1}(\tau) d\tau; \quad f_0(t) \equiv 1, \text{ следовательно, } f_1(t) \leq t, \quad f_2(t) \leq \\ &\leq \frac{t^2}{2}, \dots, \quad f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

Теперь будем искать оценку снизу

$$f'_n(t) \geq f_{n-1}(t) - \lambda_n \frac{t^n}{n!},$$

или

$$f_n(t) \geq \int_0^t f_{n-1}(\tau) d\tau - \lambda_n \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Отсюда

$$f_1(t) \geq t - \lambda_1 \frac{t^2}{2},$$

$$f_2(t) \geq \frac{t^2}{2} - (\lambda_1 + \lambda_2) \frac{t^3}{3!},$$

.....

$$f_n(t) \geq \frac{t^n}{n!} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{t^n}{n!} - S_1 \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Продолжая таким образом, мы получим искомую оценку

$$\sum_{k=0}^{2i+1} S_k \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} (-1)^k \leq f_n(t) \leq \sum_{k=0}^{2i} S_k \frac{t^{n+k}}{(n+k)!} (-1)^k. \quad (5.3.8)$$

При  $i=0$ , в частности, получим

$$\frac{t^n}{n!} - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \leq f_n(t) \leq \frac{t^n}{n!},$$

или

$$\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n \left[ 1 - \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n+1} t \right] \frac{t^n}{n!} \leq \pi_{n+1}(t) \leq \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n t^n}{n!}, \quad (5.3.9)$$

откуда следует, что для вероятностей  $\pi_{n+1}(t)$  справедлива приближенная формула

$$\pi_{n+1}(t) \approx \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{n!} t^n, \quad (5.3.10)$$

причем относительная ошибка этой формулы не превосходит величины

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n+1} t.$$

Как показывает неравенство (5.3.9), формулой (5.3.10) можно пользоваться даже тогда, когда относительная ошибка велика, ибо она дает для нашей вероятности оценку сверху. В случае необходимости можно взять и еще несколько членов ряда (5.3.7), так как этот ряд быстро сходится.

Как будет выяснено ниже, величины  $\lambda_k$  в задачах теории резервирования равны сумме опасностей отказа некоторых элементов,

составляющих систему. Формула (5.3.10) будет точна в том случае, когда величины  $\lambda_k t$  в среднем малы. Но если  $\lambda_k t$  малы, то

$$e^{-\lambda_k t} \approx 1 - \lambda_k t.$$

Поэтому  $\lambda_k t$  будут приближенно равны суммам ненадежностей соответствующих элементов.

Следовательно, приближенная формула (5.3.10) применима в задачах резервирования в тех случаях, когда надежности элементов, составляющих резервную группу, сравнительно близки к единице. В этом случае кратность резервирования бессмысленно делать большой.

Вторая приближенная формула. Можно добиться высокой надежности и другим путем — составлять резервную группу из большого числа ненадежных элементов. В этом случае формула (5.3.5) заведомо малопригодна. Не годится также приближенное равенство (5.3.10). Поэтому мы без вывода приведем вторую приближенную формулу, которая пригодна для случая, когда величины  $\lambda_k t$  конечны, а  $n$  велико.

Если  $\frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (\lambda_k t)^2 \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , то для больших  $n$  имеет место приближенная формула

$$p_{n+1}(t) \approx \frac{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n}{n!} t^n e^{-\sum_{k=1}^n \frac{\lambda_k}{n} t}, \quad (5.3.11)$$

причем главный член относительной ошибки равен

$$\frac{1}{2n^2} \sum_{k=1}^n (\lambda_k t)^2.$$

Выше мы изучали поведение вероятности  $p_{n+1}(t)$  главным образом для тех случаев, когда она мала. Рассмотрим теперь другой

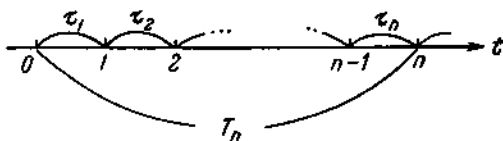


Рис. 5.3.1.

подход к схеме гибели, который даст нам возможность изучить поведение функции  $p_{n+1}(t)$  для больших значений времени. Обозначим через  $\tau_k$  случайное время, прошедшее между  $(k-1)$ -м и  $k$ -м отказом (рис. 5.3.1).

Тогда

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n$$

есть случайное время жизни нашей системы. В силу определения вероятность

$$\pi_{n+1}(t) = \mathbf{P} \{T_n < t\}$$

является законом распределения случайной величины  $T_n$ . Далее, из условий, сформулированных в начале этого параграфа следует, что величины  $\tau_k$  взаимно независимы и каждая из них распределена по экспоненциальному закону

$$\mathbf{P} \{\tau_k < t\} = 1 - e^{-\lambda_k t}.$$

Отсюда среднее время жизни системы равно

$$\mathbf{M}T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k}, \quad (5.3.12)$$

а дисперсия

$$\mathbf{D}T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^2}.$$

Распределение величины  $T_n$  как суммы независимых случайных величин с ростом номера  $n$  при определенных общих условиях должно стремиться к нормальному. Удобнее всего воспользоваться условиями Ляпунова: *если*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^3} / \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k^2} \right)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad (5.3.13)$$

то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ x_1 < \frac{T_n - \mathbf{M}T_n}{\sqrt{\mathbf{D}T_n}} < x_2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Отсюда для вероятностей  $\pi_{n+1}(t)$  мы получаем третью приближенную формулу.

Если выполняется условие (5.3.13), то при большом  $n$  для всех  $t$ , для которых отношение

$$\frac{t - \mathbf{M}T_n}{\sqrt{\mathbf{D}T_n}}$$

ограничено, имеет место приближенное равенство

$$\pi_{n+1}(t) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{t - \mathbf{M}T_n}{\sqrt{\mathbf{D}T_n}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx. \quad (5.3.14)$$

Проиллюстрируем применение схемы гибели на примере нагруженного резерва.

Пусть надежности наших элементов одинаковы и подчиняются экспоненциальному закону

$$p_k(t) = e^{-\lambda t}.$$

На участке времени до первого отказа работают все  $n$  элементов. Рассмотрим на этом участке бесконечно малый отрезок времени  $(t, t+h)$ . Вероятность того, что на этом участке данный элемент не откажет, равна  $e^{-\lambda h}$ , а вероятность того, что не откажет ни один из  $n$  элементов, равна

$$e^{-n\lambda h} = 1 - n\lambda h + o(h).$$

Так как вероятность появления двух или более отказов на этом участке имеет порядок  $h^2$ , то вероятность появления ровно одного отказа равна

$$n\lambda h + o(h).$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = n\lambda.$$

На участке между первым и вторым отказами работает  $(n-1)$ -й элемент, поэтому

$$\lambda_2 = (n-1)\lambda.$$

Вообще

$$\lambda_k = (n-k+1)\lambda \quad (k=1, 2, \dots, n),$$

$$\lambda_{n+1} = 0.$$

Далее, так как отказы элементов независимы и подчиняются экспоненциальному закону, появление отказа элемента на данном участке не зависит от того, сколько времени проработает данный элемент и когда произошли отказы других элементов. Следовательно, *наш поток отказов есть процесс типа гибели*.

Применяя формулы (5.3.5), мы получаем, что ненадежность нашей резервной группы равна

$$Q_n(t) = \pi_{n+1}(t) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{e^{-\lambda_k t}}{\lambda_k \omega'(\lambda_k)} = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{n! e^{-k\lambda t}}{k! (n-k)!} (-1)^{k-1} =$$

$$= \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^k e^{-k\lambda t} = (1 - e^{-\lambda t})^n.$$

Если надежности элементов для данного отрезка времени близки к единице, а  $n$  невелико, то согласно первой приближенной формуле

$$\pi_{n+1}(t) \approx \frac{n\lambda(n-1)\lambda \dots \lambda}{n!} t^n = (\lambda t)^n.$$

Вторая и третья приближенные формулы в этом случае несправедливы. Среднее время жизни резервной группы согласно (5.3.12) равно

$$MT_n = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \dots + \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right).$$

Мы получили формулы, которые выше были получены непосредственно.

Рассмотрим теперь более сложный случай нагруженного резерва, когда отказы одних элементов изменяют надежность других. Физически мы можем представить себе этот случай так: работают одновременно  $n$  элементов, выполняя одну и ту же функцию. Если один из элементов отказывает, то на долю остальных ложится большая нагрузка, меняются параметры их работы и поэтому изменяется надежность работающих элементов.

Предположим, что на каждом участке между соседними отказами опасность отказа элемента постоянна и зависит только от числа работающих элементов. Если к данному моменту не отказало  $k$  элементов, то опасность отказа каждого из них равна  $\mu_k$ .

В обозначениях схемы гибели получаем

$$\lambda_1 = n\mu_n, \dots, \lambda_k = (n - k + 1)\mu_{n-k+1}, \\ \lambda_{n+1} = 0.$$

Отсюда ненадежность нашей резервной группы можно вычислить по формуле (5.3.5). Если надежности всех элементов близки к единице, то первая приближенная формула дает

$$Q_n(t) = \pi_{n+1}(t) \approx \mu_1 \mu_2 \dots \mu_n t^n.$$

Среднее время жизни резервной группы

$$MT_n = \frac{1}{n\mu_n} + \frac{1}{(n-1)\mu_{n-1}} + \dots + \frac{1}{\mu_1}.$$

Рассмотрим частный случай

$$\mu_n = \mu_{n-1} = \dots = \mu_m = \lambda, \mu_{m-1} = \dots = \mu_1 = 0,$$

т. е. отказы одних элементов не изменяют надежности других, но резервная группа справляется со своими функциями, пока число работающих элементов не меньше  $m$ . В тот момент, когда число работающих элементов становится равным  $m-1$ , наступает отказ резервной группы. В этом случае

$$\lambda_1 = n\lambda, \lambda_2 = (n-1)\lambda, \dots, \lambda_{n-m+1} = m\lambda, \\ \lambda_{n-m+2} = 0$$

и ненадежность нашей резервной группы равна

$$Q_n(t) = \pi_{n-m+2}(t) = 1 - \sum_{k=m}^n \frac{e^{-\lambda t} n! (-1)^{k-m}}{(m-1)! k! (n-k)! (k-m)!}.$$

Преобразовав эту сумму, мы получим окончательно

$$Q_n(t) = \sum_{k=n-m+1}^n C_n^k (1 - e^{-\lambda t})^k e^{-(n-k)\lambda t},$$

что можно вывести и непосредственно.

Для случая высоких надежностей первая приближенная формула дает

$$Q_n(t) \approx C_n^{m-1} (\lambda t)^{n-m+1}.$$

Среднее время жизни резервной группы

$$MT_n = \frac{1}{n\lambda} + \frac{1}{(n-1)\lambda} + \dots + \frac{1}{m\lambda}.$$

Если  $m$  и  $n$  велики, то

$$MT_n \approx \frac{1}{\lambda} \ln \frac{n + \frac{1}{2}}{m - \frac{1}{2}},$$

причем ошибка имеет порядок  $\frac{1}{24\lambda} \left( \frac{1}{m^3} - \frac{1}{n^3} \right)$ .

### § 5.4. Ненагруженный резерв

В случае ненагруженного резерва будем предполагать, что резервный элемент не может отказать, находясь в нерабочем состоянии, и что пребывание резервного элемента в нерабочем состоянии не изменяет его надежности в рабочем состоянии. Кроме того, как и выше, мы считаем, что время, в течение которого отказавший элемент заменяется резервным, практически равно нулю и переключающее устройство абсолютно надежно.

Пусть у нас имеется один основной и  $n-1$  резервных элементов. Обозначим через  $p_k(t)$  надежность  $k$ -го по порядку элемента, а через  $q_k(t)$  — его ненадежность.

Основной элемент, проработав некоторое случайное время  $\tau_1$ , выходит из строя и на его место становится первый резервный элемент, который работает случайное время  $\tau_2$ , и т. д. Последний резервный элемент, проработав случайное время  $\tau_n$ , выйдет из строя, а с ним выйдет из строя и вся резервная группа. Таким

образом, случайное время жизни резервной группы  $T_n$  равно

$$T_n = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n. \quad (5.4.1)$$

Величины  $\tau_k$  независимы и

$$P\{\tau_k < t\} = q_k(t).$$

Обозначим через  $Q_n(t)$  ненадежность резервной группы. Функция  $Q_n(t)$ , как закон распределения суммы  $n$  независимых слагаемых, определяется из формул

$$Q_n(t) = \int_0^t q_n(t-\tau) Q_{n-1}'(\tau) d\tau, \quad (5.4.2)$$

$$Q_1(t) = q_1(t).$$

Последовательно применяя эту формулу для  $n=2, 3, \dots$ , мы можем вычислить точно или приближенно величину  $Q_n(t)$ .

Очень просто определяется среднее время жизни резервной группы

$$T_{\text{ср}}^{(n)} = MT_n = \sum_{k=1}^n M\tau_k = \sum_{k=1}^n t_{\text{ср}}^{(k)}. \quad (5.4.3)$$

В частности, если все элементы равнонадежны, то

$$T_{\text{ср}}^{(n)} = n \cdot t_{\text{ср}}. \quad (5.4.4)$$

Пусть теперь надежности наших элементов подчинены экспоненциальному закону

$$p_k(t) = e^{-\lambda_k t}.$$

Согласно предыдущему параграфу

$$Q_n(t) = \pi_{n+1}(t).$$

Следовательно, для вычисления ненадежности  $Q_n(t)$  можно использовать формулы (5.3.4), (5.3.5), (5.3.7) и приближенные формулы (5.3.10), (5.3.11) и (5.3.14).

Отметим особо приближенную формулу (5.3.10)

$$Q_n(t) \approx \frac{\lambda_1 t \lambda_2 t \dots \lambda_n t}{n!}.$$

Величины  $\lambda_k t \approx 1 - e^{-\lambda_k t} = q_k(t)$ , так как эта формула справедлива, когда  $\lambda_k t$  малы. Следовательно, мы можем записать ее в виде

$$Q_n(t) \approx \frac{q_1(t) q_2(t) \dots q_n(t)}{n!}. \quad (5.4.5)$$

Эта формула дает ясное представление о выигрыше, которого мы добиваемся, применяя ненагруженный резерв (ср. с (5.2.1)).



Если ненадежности всех элементов равны

$$p_k(t) = e^{-\lambda t},$$

то по формуле (5.3.6)

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}.$$

Хр

Подставив в это равенство единицу в форме

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

мы получим формулу

$$Q_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad (5.4.6)$$

более удобную для вычислений. Исходя из этого ряда, можно вывести простую и очень точную приближенную формулу

$$Q_n(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left[ 1 + \frac{\lambda t}{n+1} + \frac{(\lambda t)^2}{(n+1)(n+2)} + \dots \right] \approx$$

$$\approx \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \left[ 1 + \frac{\lambda t}{n+1} + \frac{(\lambda t)^2}{(n+1)^2} + \dots \right] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left( 1 - \frac{\lambda t}{n+1} \right)^{-1} e^{-\lambda t},$$

или

$$Q_n(t) \approx \frac{(\lambda t)^n}{n!} \left( 1 - \frac{\lambda t}{n+1} \right)^{-1} e^{-\lambda t}. \quad (5.4.7)$$

При этом относительная ошибка имеет порядок

$$\frac{(\lambda t)^2}{(n+1)^2(n+2)}.$$

Если  $\lambda t \ll 1$ , то можно пользоваться и совсем простой приближенной формулой

$$Q_n(t) \approx \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \quad (5.4.8)$$

которая является частным случаем (5.3.10).

Величина  $Q_n(t)$  вычисляется и в случае, когда надежности элементов подчиняются нормальному закону

$$p_k(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_k} \int_t^{\infty} e^{-\frac{(x-a_k)^2}{2\sigma_k^2}} dx \quad (\sigma_k \ll a_k).$$

Случайное время жизни резервной группы  $T_n$  будет суммой независимых нормальных величин  $\tau_k$  и поэтому само будет распределено по нормальному закону со средним значением

$$a = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

и дисперсией

$$\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2.$$

Следовательно,

$$Q_n(t) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \Phi\left(\frac{t-a}{\sigma}\right).$$

(Так как  $\sigma \ll a$ , то можно пренебречь частью интеграла от  $-\infty$  до нуля.)

Наконец, функцию  $Q_n(t)$  легко вычислить для случая, когда надежности всех элементов равны и частота отказов выражается формулой

$$q'(t) = \frac{\lambda^\alpha t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$Q_n(t) = \frac{\lambda^{n\alpha} t^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\lambda t}.$$

В большинстве случаев величина  $Q_n(t)$  не вычисляется в конечном виде. Поэтому особый интерес приобретают различные приближенные формулы и оценки надежности в этом случае. Докажем предварительно простое утверждение, позволяющее находить такие оценки.

Пусть  $q_1(t), q_2(t), \dots, q_n(t)$  — ненадежности основного и резервных элементов и пусть существуют монотонно неубывающие функции  $\underline{q}_1(t), \underline{q}_2(t), \dots, \underline{q}_n(t)$  и  $\bar{q}_1(t), \bar{q}_2(t), \dots, \bar{q}_n(t)$  такие, что на рассматриваемом участке времени

$$\underline{q}_k(t) \leq q_k(t) \leq \bar{q}_k(t) \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Пусть, далее, функции  $\underline{Q}_n(t)$  и  $\bar{Q}_n(t)$  определяются соответственно через функции  $\underline{q}_k(t)$  и  $\bar{q}_k(t)$  так же, как функция  $Q_n(t)$  определяется через функции  $q_k(t)$  (см. (5.4.2)).

Тогда на данном участке времени

$$\underline{Q}_n(t) \leq Q_n(t) \leq \bar{Q}_n(t). \quad (5.4.9)$$

Докажем эти неравенства по индукции. При  $n=1$  они очевидны. Предположим, что (5.4.9) справедливо для номера  $n=k$ .

Тогда

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(t) &= \int_0^t q_{k+1}(t-\tau) Q'_k(\tau) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \bar{q}_{k+1}(t-\tau) Q'_k(\tau) d\tau = \int_0^t Q_k(\tau) \bar{q}'_{k+1}(t-\tau) d\tau \leq \\ &\leq \int_0^t \bar{Q}_k(\tau) \bar{q}'_{k+1}(t-\tau) d\tau = \int_0^t \bar{q}_{k+1}(t-\tau) \bar{Q}'_k(\tau) d\tau = \bar{Q}_{k+1}(t), \end{aligned}$$

или

$$Q_{k+1}(t) \leq \bar{Q}_{k+1}(t).$$

Аналогично доказывается и левое неравенство. Используем теперь полученные неравенства.

1) Пусть ненадежности элементов удовлетворяют на данном участке времени неравенствам

$$\underline{\lambda}_k t \leq q_k(t) \leq \bar{\lambda}_k t.$$

Легко показать, что

$$\underline{Q}_n(t) = \frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{n!} t^n \quad \text{и} \quad \bar{Q}_n(t) = \frac{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n}{n!} t^n,$$

откуда

$$\frac{\lambda_1 \dots \lambda_n}{n!} t^n \leq Q_n(t) \leq \frac{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n}{n!} t^n. \quad (5.4.10)$$

2) Пусть опасности отказов наших элементов удовлетворяют на данном интервале времени неравенствам

$$\underline{\lambda}_k \leq \lambda_k(t) \leq \bar{\lambda}_k. \quad (5.4.11)$$

Тогда

$$1 - e^{-\underline{\lambda}_k t} \leq q_k(t) = 1 - e^{-\int_0^t \lambda_k(\tau) d\tau} \leq 1 - e^{-\bar{\lambda}_k t} \quad (5.4.12)$$

и мы в качестве оценок можем использовать формулы (5.3.5), (5.3.6) и (5.3.7), подставляя в них соответственно  $\underline{\lambda}_k$  и  $\bar{\lambda}_k$ . Кроме того, из (5.4.12) следует, что

$$q_k(t) \leq 1 - e^{-\bar{\lambda}_k t} < \bar{\lambda}_k t,$$

откуда вытекает неравенство

$$Q_n(t) < \frac{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n}{n!} t^n.$$

3) Обобщая случай 1), мы можем предположить, что наши ненадежности удовлетворяют неравенствам

$$\underline{\lambda}_k t^{\alpha_k} \leq q_k(t) \leq \bar{\lambda}_k t^{\alpha_k}.$$

Такой случай имеет место, например, когда надежности элементов подчиняются закону Вейбулла

$$p(t) = e^{-\lambda t^2}.$$

Тогда  $q(t) = 1 - e^{-\lambda t^2} < \lambda t^2$ . Нетрудно показать, последовательно интегрируя по формуле (5.4.2), что

$$\frac{\lambda_1 \dots \lambda_n \Gamma(\alpha_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_n + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + 1)} t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \leq Q_n(t) \leq \frac{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n \Gamma(\alpha_1 + 1) \dots \Gamma(\alpha_n + 1)}{\Gamma(\alpha_1 + \dots + \alpha_n + 1)} t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}. \quad (5.4.13)$$

Между прочим, в этом случае можно показать, что если  $\alpha_k \geq 1$ , то

$$Q_n(t) \leq \frac{\bar{\lambda}_1 \dots \bar{\lambda}_n}{n!} t^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} = \frac{\bar{q}_1 \dots \bar{q}_n}{n!}.$$

4) Предположим теперь, что наши элементы стареющие, т. е. опасности отказа

$$\lambda_k(t) = \frac{q'_k(t)}{1 - q_k(t)}$$

монотонно не возрастают. Обозначим через  $\Lambda_k(t) = \int_0^t \lambda_k(\tau) d\tau$ .

Функции  $\Lambda_k(t)$  выпуклы вниз, поэтому на участке  $(0, t)$  имеют место неравенства

$$\Lambda_k(\tau) \leq \frac{\tau}{t} \Lambda_k(t).$$

Следовательно,

$$q_k(\tau) = 1 - e^{-\Lambda_k(\tau)} \leq 1 - e^{-\frac{\tau}{t} \Lambda_k(t)},$$

так что для оценки сверху функции  $Q_n(t)$  можно использовать формулу (5.3.7), подставив в нее вместо  $\lambda_k$  величины  $\frac{\Lambda_k(t)}{t}$ . Усилив неравенство, мы можем написать, что

$$Q_n(t) \leq \frac{\Lambda_1(t) \dots \Lambda_n(t)}{n!}. \quad (5.4.14)$$

1) Это естественно, так как если бы  $\alpha_k$  были меньше единицы, то опасность отказа была бы в нуле неограниченной.

В частности, если надежности всех элементов одинаковы,  $\Lambda_k(t) = \Lambda(t)$ , то

$$Q_n(t) \leq 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Lambda^k(t)}{k!} e^{-\Lambda(t)}. \quad (5.4.15)$$

В результате проведенных выше оценок мы приходим к очень важному выводу: почти во всех случаях величина

$$\frac{q_1(t) \dots q_n(t)}{n!}$$

либо является хорошим приближением для функции  $Q_n(t)$ , либо дает для нее оценку сверху. Заметим, что, завышая ненадежность  $Q_n(t)$ , мы завышаем тем самым и ненадежность всей системы. Поэтому наши прогнозы будут несколько хуже действительности. Все эти соображения дают нам право пользоваться приближенной формулой (5.4.5), во всяком случае тогда, когда ненадежности  $q_k(t)$  достаточно малы. Удобство этой приближенной формулы состоит, между прочим, еще и в том, что для определения по ней надежности резервной группы нам достаточно знать значения надежностей элементов только в конечный момент времени  $t$ , в то время как при использовании точной формулы (5.4.2) мы должны знать поведение функций надежности на всем интервале  $(0, t)$ .

В заключение сравним между собой нагруженный и ненагруженный резервы. Пусть

$$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$$

— случайные времена работы основного и резервных элементов. Тогда случайное время работы резервной группы для нагруженного резерва равно

$$T_n^{(1)} = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n),$$

а для ненагруженного резерва равно

$$T_n^{(2)} = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n.$$

Но ясно, что

$$T_n^{(1)} = \max(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) \leq \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_n = T_n^{(2)}.$$

Отсюда мы делаем вывод: ненагруженный резерв в любом случае выгоднее нагруженного<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Напомним, что мы считаем пока переключатели абсолютно надежными.

Чтобы сравнить количественно эти два типа резерва, выпишем для случая нагруженного резерва точную формулу

$$Q_n^{(1)}(t) = q_1(t) q_2(t) \dots q_n(t)$$

и приближенную формулу для случая ненагруженного резерва

$$Q_n^{(2)}(t) \approx \frac{q_1(t) q_2(t) \dots q_n(t)}{n!}.$$

Последняя, как мы показали, верна, если на интересующем нас участке времени функции  $q_k(t)$  приблизительно линейны.

Отсюда

$$\frac{Q_n^{(1)}(t)}{Q_n^{(2)}(t)} \approx n!,$$

т. е. при переходе к ненагруженному резерву ненадежность уменьшается в  $n!$  раз. Посмотрим, наконец, как увеличивается среднее время. Предположим, что все элементы имеют одинаковую надежность, подчиненную экспоненциальному закону.

Тогда для нагруженного резерва

$$T_{\text{ср}}^{(1)} = t_{\text{ср}} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) \approx t_{\text{ср}} (\ln n + C),$$

а для ненагруженного резерва  $T_{\text{ср}}^{(2)} = nt_{\text{ср}}$ . Отсюда

$$\frac{T_{\text{ср}}^{(1)}}{T_{\text{ср}}^{(2)}} = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}}{n} \approx \frac{\ln n + C}{n}.$$

Чем больше кратность резервирования, тем больше выигрыш в среднем времени. Например, при  $n = 2$

$$\frac{T_{\text{ср}}^{(2)}}{T_{\text{ср}}^{(1)}} = \frac{4}{3} \approx 1,3,$$

а при  $n = 10$

$$\frac{T_{\text{ср}}^{(2)}}{T_{\text{ср}}^{(1)}} \approx 3,4.$$

### § 5.5. Облегченный резерв

Во многих случаях нам невыгодно применять нагруженный резерв, так как из-за отказов резервных элементов он не дает желаемого выигрыша в надежности. Вместе с тем мы не можем использовать и ненагруженный резерв, ибо от момента включения элемента до момента, когда он становится работоспособным,

проходит некоторое время — элемент «разогревается», а условия эксплуатации не допускают перерыва в работе нашей системы.

В подобных случаях часто применяют так называемый *облегченный резерв*, суть которого в том, что резервный элемент до момента включения в работу находится в облегченном режиме, а после включения начинает работать в нормальном рабочем режиме. При этом элемент может отказать, находясь в нерабочем состоянии, однако, вообще говоря, с меньшей вероятностью.

Пусть резервная группа состоит из одного основного и  $n-1$  резервных элементов. Обозначим через  $p_k^{(H)}(t)$  надежность  $k$ -го элемента в нерабочем состоянии и через  $p_k^{(P)}(\tau, t)$  — условную вероятность того, что  $k$ -й резервный элемент не откажет, находясь в рабочем состоянии на участке времени  $(\tau, t)$  при условии, что он не отказал на участке  $(0, \tau)$ , находясь в нерабочем состоянии ( $\tau$  — момент включения элемента). Каждый резервный элемент включается в тот момент, когда откажет последний (по времени, а не по номеру) из предыдущих элементов.

Обозначим через

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots, \tau_n$$

случайные времена работы основного и резервных элементов; пусть

$$T_k = \max_{1 \leq i \leq k} \tau_i.$$

Очевидно, что в момент  $T_k$  происходит включение в рабочее состояние очередного  $(k+1)$ -го элемента.

Рассмотрим функции

$$Q_k(t) = P\{T_k < t\}.$$

Ясно, что  $Q_1(t)$  — это ненадежность основного элемента, а  $Q_k(t)$  — ненадежность резервной группы из основного и  $(k-1)$ -го резервного элемента.  $Q_n(t)$  — искомая ненадежность нашей резервной группы. Заметим еще, что случайные времена  $\tau_k$  зависят друг от друга, так как время жизни резервного элемента зависит от того, в какой момент он перешел в рабочее состояние, т. е. зависит от предыдущих времен  $\tau_i$ .

Выведем формулу, связывающую две последовательные функции  $Q_k(t)$  и  $Q_{k+1}(t)$ ,

$$\begin{aligned} Q_{k+1}(t) &= P\{T_{k+1} < t\} = P\{T_k < t, \tau_{k+1} < t\} = \\ &= \int_0^t P\{\tau < T_k < \tau + dt, \tau_{k+1} < t\} = \\ &= \int_0^t P\{\tau_{k+1} < t | T_k = \tau\} dQ_k(\tau). \end{aligned}$$

Вероятность

$$\begin{aligned} P\{\tau_{k+1} < t \mid T_k = \tau\} &= 1 - P\{\tau_{k+1} > t \mid T_k = \tau\} = \\ &= 1 - p_{k+1}^{(n)}(\tau) p_{k+1}^{(p)}(\tau, t), \end{aligned}$$

откуда

$$Q_{k+1}(t) = \int_0^t [1 - p_{k+1}^{(n)}(\tau) p_{k+1}^{(p)}(\tau, t)] dQ_k(\tau). \quad (5.5.1)$$

Так как  $Q_1(t)$  — ненадежность основного элемента — нам известна, то по этой формуле мы можем последовательно определить все функции  $Q_k(t)$ . Однако использование этой формулы затрудняет то обстоятельство, что нам обычно неизвестна функция  $p_k^{(p)}(\tau, t)$ . Ее опытное определение требует огромной статистики, так как эта функция зависит от двух аргументов. Поэтому в качестве первого приближения мы можем предположить, что пребывание элемента в облегченном режиме не изменяет его надежности в рабочем состоянии. Тогда

$$p_k^{(p)}(\tau, t) = p_k^{(p)}(t - \tau).$$

Заметим еще, что нагруженный и ненагруженный резервы являются частными случаями облегченного резерва.

Для нагруженного резерва в обозначениях, принятых выше,

$$p_k^{(n)}(\tau) = p_k(\tau), \quad p_k^{(p)}(\tau, t) = \frac{p_k(t)}{p_k(\tau)},$$

а для ненагруженного резерва

$$p_k^{(n)}(\tau) \equiv 1, \quad p_k^{(p)}(\tau, t) = p_k(t - \tau).$$

Чтобы получить эффективные формулы для надежности резервной группы в случае облегченного резерва, предположим, что надежности элементов и в рабочем и в нерабочем состоянии подчиняются экспоненциальному закону и надежность элемента в рабочем состоянии не зависит от времени пребывания в нерабочем состоянии. Сначала разберем тот случай, когда надежность всех элементов одинаковы. Пусть  $\lambda$  — опасность отказа элемента в облегченном режиме,  $\Lambda$  — опасность отказа элемента в рабочем режиме. Если к данному моменту времени отказал  $(k-1)$  элемент, то один из неотказавших элементов находится в рабочем режиме, а  $(n-k)$  в облегченном режиме. Поэтому суммарная опасность отказа

$$\lambda_k = \Lambda + (n-k)\lambda.$$

Ясно, что наш процесс является частным случаем процесса гибели и мы можем применить все выведенные ранее формулы.





При рассмотрении этого случая мы не можем уже воспользоваться схемой гибели, ибо суммарная опасность отказа зависит не только от числа происшедших к данному моменту отказов, но и от того, какие элементы отказали. Для определения надежности резервной группы воспользуемся общей формулой для облегченного резерва.

В нашем случае

$$p_k^{(n)}(\tau) = e^{-\lambda_k \tau}, \quad p_k^{(p)}(\tau, t) = e^{-\Lambda_k(t-\tau)}.$$

Подставляя эти величины в формулу (5.5.1), получим

$$\left. \begin{aligned} Q_k(t) &= \int_0^t [1 - e^{-\lambda_k \tau - \Lambda_k(t-\tau)}] dQ_{k-1}(\tau), \\ Q_1(t) &= 1 - e^{-\Lambda_1 t}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.4)$$

Отсюда можно было бы вычислить функции  $Q_k(t)$ , так как все интегралы легко берутся. Однако еще удобнее использовать преобразование Лапласа. Пусть

$$a_k(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} Q_k'(t) dt.$$

Продифференцировав равенство (5.5.4), получим

$$Q_k'(t) = Q_{k-1}'(t) - e^{-\lambda_k t} Q_{k-1}'(t) + \int_0^t \Lambda_k e^{-\lambda_k \tau - \Lambda_k(t-\tau)} Q_{k-1}'(\tau) d\tau.$$

Умножив это равенство на  $e^{-pt}$  и проинтегрировав по  $t$ , получаем

$$\left. \begin{aligned} a_k(p) &= a_{k-1}(p) - \frac{p}{p + \Lambda_k} a_{k-1}(p + \lambda_k), \\ a_1(p) &= \frac{\Lambda_1}{\Lambda_1 + p}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5.5)$$

Отсюда мы определяем  $a_n(p)$ , которая, как легко заметить, будет рациональной дробью с известными нулями знаменателя

$$a_n(p) = \frac{A(p)}{B(p)} = \frac{A(p)}{(p + \rho_1) \cdots (p + \rho_n)}.$$

Обратное преобразование Лапласа дает формулу

$$Q_n(t) = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{A(-\rho_k)}{\rho_k B'(-\rho_k)} e^{-\rho_k t}. \quad (5.5.6)$$

(Можно было бы получить и явную формулу для  $Q_n(t)$ , однако она очень громоздка.) Из формулы (5.5.5) легко определяется среднее время работы резервной группы.

Пусть  $T_{\text{ср}}^{(k)}$  — среднее время работы резервной группы, составленной из  $k$  первых элементов нашей большой резервной группы. Очевидно, что

$$T_{\text{ср}}^{(k)} = \int_0^{\infty} t Q_k'(t) dt = -a_k'(0).$$

Дифференцируя (5.5.6) и подставляя  $p=0$ , получим

$$\left. \begin{aligned} T_{\text{ср}}^{(k)} &= T_{\text{ср}}^{(k-1)} + \frac{1}{\Lambda_k} a_{k-1}(\lambda_k), \\ T_{\text{ср}}^{(1)} &= \frac{1}{\Lambda_1}, \end{aligned} \right\} \quad (5.5.7)$$

откуда мы можем определить величину  $T_{\text{ср}}^{(n)}$ . Выведем теперь приближенную формулу для  $Q_n(t)$ , предполагая, что надежности резервных элементов близки к единице. Это означает, что малы опасности отказа  $\lambda_k$  и  $\Lambda_k$ . Мы можем выбрать большую единицу времени, чтобы величины  $\lambda_k$  и  $\Lambda_k$  не были малы. Тогда, очевидно, будет мал тот интервал времени, на котором мы рассматриваем нашу резервную группу.

Поэтому, выводя нашу приближенную формулу, мы можем принять такую схему: величины  $\lambda_k$ ,  $\Lambda_k$  и  $n$  фиксированы, а время  $t \rightarrow 0$ .

Разложим функции  $Q_k(t)$  в ряд по степеням  $t$

$$Q_k(t) = A_k t^k + B_k t^{k+1} + \dots$$

(Разложение начинается с  $t^k$ , так как для того, чтобы за малое время  $t$  отказали первые  $k$  элементов в нашей резервной группе, должно произойти, по крайней мере,  $k$  отказов, вероятность каждого отказа имеет порядок  $t$ , а вероятность  $k$  отказов имеет порядок  $t^k$ .)

Тогда величины  $a_k(p)$  будут иметь разложение

$$a_k(p) = \frac{A_k k!}{p^k} + \frac{B_k (k+1)!}{p^{k+1}} + \dots$$

Подставляя его в формулу (5.5.5) и сравнивая коэффициенты при старших степенях, получим

$$A_k = \frac{A_{k-1} [\Lambda_k + (k-1) \lambda_k]}{k},$$

откуда

$$A_n = \frac{\Lambda_1 (\Lambda_2 + \lambda_2) (\Lambda_3 + 2\lambda_3) \dots [\Lambda_n + (n-1) \lambda_n]}{n!}.$$

Так как время  $t \rightarrow 0$ , то, беря в разложении по степеням  $t$  первый член, мы получим искомую приближенную формулу

$$Q_n(t) \approx \frac{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \lambda_2) (\Lambda_1 + 2\lambda_3) \dots [\Lambda_n + (n-1) \lambda_n]}{n!} t^n. \quad (5.5.8)$$

(Сравните ее с (5.5.3).)

Используя эту формулу, поставим и решим такую задачу: *В каком порядке нужно расположить данные резервные элементы, чтобы надежность резервной группы была наибольшей?* Интересно заметить, что в случае нагруженного и ненагруженного резервов надежность резервной группы не зависит от порядка элементов. Предположим, что порядок является оптимальным. Тогда перестановка любых двух соседних элементов может только увеличить функцию  $Q_n(t)$ .

Поэтому

$$Q_n(t) = \frac{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \lambda_2) \dots [\Lambda_k + (k-1) \lambda_k] (\Lambda_{k+1} + k\lambda_{k+1}) \dots [\Lambda_n + (n-1) \lambda_n]}{n!} t^n < \\ < \bar{Q}_n(t) = \frac{\Lambda_1 (\Lambda_1 + \lambda_2) \dots [\Lambda_k + k\lambda_k] [\Lambda_{k+1} + (k-1) \lambda_{k+1}] \dots [\Lambda_n + (n-1) \lambda_n]}{n!} t^n,$$

где  $\bar{Q}_n(t)$  — ненадежность резервной группы, в которой поменялись местами  $k$ -й и  $(k+1)$ -й элементы.

Сокращая на общие множители, получим

$$[\Lambda_k + (k-1) \lambda_k] (\Lambda_{k+1} + k\lambda_{k+1}) \leq (\Lambda_k + k\lambda_k) [\Lambda_{k+1} + (k-1) \lambda_{k+1}],$$

или, после преобразований,

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\Lambda_{k+1}} \leq \frac{\lambda_k}{\Lambda_k},$$

откуда следует, что в случае наиболее выгодного расположения элементов должны выполняться неравенства

$$\frac{\lambda_2}{\Lambda_2} \geq \frac{\lambda_1}{\Lambda_1} \geq \dots \geq \frac{\lambda_n}{\Lambda_n}. \quad (5.5.9)$$

Нетрудно дать и физическое истолкование этих условий: если у двух элементов надежности в рабочем состоянии равны, то сначала нужно использовать тот из них, который в облегченном режиме менее надежен, ибо тогда с большей вероятностью успевают поработать оба элемента; наоборот, если два элемента равнонадежны в облегченном режиме, то на первое место нужно поставить тот элемент, который более надежен в рабочем состоянии, так как у первого элемента больше шансов быть использованным, чем у последующего, который к моменту, когда до него дойдет очередь, может отказать с большей вероятностью. Неравенства (5.5.9) количественно уточняют эти соображения.

Хотя облегченный резерв включает в себя как крайние частные случаи и нагруженный и ненагруженный резервы, не следует думать, что он является наиболее общей схемой резервирования элемента.

Можно было бы попытаться чисто умозрительным путем построить такую общую схему, однако вряд ли в этом имеется потребность. Рассмотрим лучше две конкретные схемы, которые покажут некоторые пути для такого рода обобщений.

1) Предположим, что имеется один основной и  $n - 1$  резервных элементов (рис. 5.5.1). На промежутке между двумя соседними отказами опасность отказа каждого элемента постоянна и зависит только от того места, которое занимает данный элемент в ряду неотказавших элементов.

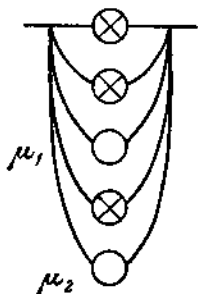


Рис. 5.5.1.

Пусть  $\mu_1$  — опасность отказа работающего в данный момент элемента,  $\mu_2$  — опасность отказа следующего из неотказавших элементов и т. д. Грубо говоря, каждый элемент по мере приближения своей очереди в ряду не отказавших элементов разогревается все сильнее и сильнее. На рис. 5.5.1 из пяти элементов не отказали два.

Если к моменту  $t$  произошел  $(k - 1)$ -й отказ, то суммарная опасность отказа равна

$$\lambda_k = \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{n-k},$$

и мы снова приходим к схеме гибели.

2) Иной характер носит вторая схема [4]. В некоторых радиоэлектронных системах различают два типа отказов — обрыв и замыкание. Если в последовательной цепи произошло замыкание, то данный элемент не работает, но ток через него идет и поэтому работа остальных элементов не нарушается. Наоборот, если происходит обрыв, то вся цепь перестает работать.

В случае параллельного соединения элементов замыкание приводит к отказу всех элементов, так как сопротивление элемента, в котором произошло замыкание, становится практически равным нулю и через остальные элементы ток не идет. В то же время обрыв одного элемента не приводит к отказу других.

Таким образом, замыкание резервируется последовательным соединением, а обрыв — параллельным, и для того, чтобы застраховаться от этих двух типов отказов, мы применяем последовательно параллельное соединение. В каждой последовательной цепочке  $n$  элементов, а таких цепочек  $m$  штук (рис. 5.5.2). Для решения задачи предположим, что обрывы и замыкания не изменяют надежности тех элементов, которые продолжают работать. Будем также считать, что если произошел обрыв данного элемента, то не может произойти его замыкание, и наоборот.

Чтобы определить надежность всей резервной группы, введем следующие события.  $A_{ij}$  — исправная работа на данном участке времени  $i$ -го элемента  $j$ -й цепочки,  $B_{ij}$  — обрыв этого элемента,  $C_{ij}$  — его замыкание.  $A_j$  — исправная работа  $j$ -й цепочки; это событие наступит в том случае, если не будет ни одного обрыва и если по крайней мере в одном элементе не произойдет замыкания.  $B_j$  — обрыв  $j$ -й цепочки, который происходит в том случае, когда наступает обрыв хотя бы одного из элементов цепочки.  $C_j$  — замыкание  $j$ -й цепочки, которое наступает, когда происходит замыкание всех элементов цепочки.

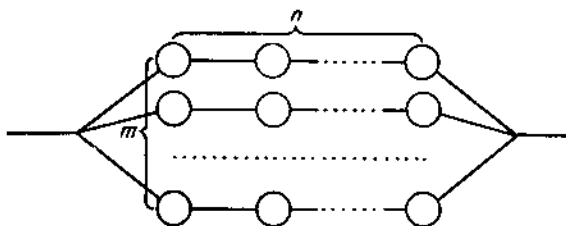


Рис. 5.5.2.

Наконец,  $A$  — исправная работа всей резервной группы. Эти события связаны между собой так:

$$A_j = \frac{\prod_{i=1}^n (A_{ij} + C_{ij}) - \prod_{i=1}^n C_{ij}}{\prod_{i=1}^n (A_{ij} + C_{ij})}$$

$$B_j = \prod_{i=1}^n (A_{ij} + C_{ij}),$$

$$C_j = \prod_{i=1}^n C_{ij},$$

$$A = \prod_{j=1}^m (A_j + B_j) - \prod_{j=1}^m B_j.$$

Отсюда можно найти искомую надежность. Пусть

$$p = \mathbf{P}(A_{ij}), \quad q = \mathbf{P}(B_{ij}), \quad r = \mathbf{P}(C_{ij}).$$

Тогда

$$\mathbf{P}(A_j) = (p + r)^n = r^n,$$

$$\mathbf{P}(B_j) = 1 - (p + r)^n,$$

а ненадежность резервной группы

$$P_{mn} = \mathbf{P}(A) = (1 - r^n)^m - [1 - (p + r)^n]^m. \quad (5.5.10)$$

Исходя из этой формулы можно, например, рассчитать при заданном числе резервных элементов  $N = mn$  оптимальную длину цепочек, для которой надежность  $P_{mn}$  будет наибольшей.

Совершенно аналогично изучается схема, в которой параллельно соединенные группы элементов образуют последовательную цепочку. Конечно, мы рассмотрели простейший и поэтому не очень реальный вариант нашей задачи. Здесь возможны различного рода усложнения; разумно, например, считать, что после обрыва не может быть замыкания, а после замыкания может быть обрыв и притом с другой вероятностью; естественно также предположить, что замыкания в цепочке меняют надежность элементов в цепочке, а обрыв всей цепочки меняет надежность элементов других цепочек.

### § 5.6. Учет ненадежности переключателей

Чтобы отключить отказавший элемент и включить на его место в системе очередной резервный элемент, необходимо некоторое устройство, которое мы будем в дальнейшем называть *переключателем*. Конечно, иногда роль такого «переключателя» может играть человек, однако в этом случае, как правило, требуется значительное время, чтобы найти неисправность и заменить отказавший элемент. Там, где такие перерывы в работе системы недопустимы или нежелательны, ставят автоматические переключатели, которые в момент отказа очередного элемента мгновенно включают следующий элемент. До сих пор при расчете надежности резервной группы мы считали, что переключатели абсолютно надежны, и поэтому не принимали их во внимание. Однако в действительности могут отказывать и сами переключатели. Сейчас мы займемся вычислением надежности резервной группы с учетом этого фактора.

Сначала будем решать задачу в простейших предположениях. Будем считать, что переключатель может отказаться только в момент включения и вероятность этого отказа не зависит ни от номера включаемого резервного элемента, ни от времени работы предыдущих резервных элементов. Наконец, предположим, что переключатель срабатывает и в том случае, когда к моменту своего включения резервный элемент вышел из строя. Далее можно рассмотреть два случая.

В первом случае резервная группа выходит из строя, как только отказывает переключатель (это будет, например, тогда, когда на все резервные элементы ставится один переключатель, или же в том случае, когда отказ одного переключателя не дает возможности сработать другим переключателям).

Во втором случае у каждого резервного элемента есть свой переключатель. Если какой-то переключатель не сработал, то вступает в действие следующий переключатель.

Рассмотрим эти случаи отдельно для нагруженного и ненагруженного резервов. Будем ради простоты принимать, что все элементы равнонадежны, и обозначим через  $p(t)$  их надежность, а через  $q(t)$  — ненадежность.

а) Нагруженный резерв, первый случай. Резервная группа состоит из одного основного элемента,  $n-1$  резервных и  $n-1$  переключателей.

Пусть  $A_k$  — событие, заключающееся в том, что первым откажет  $k$ -й переключатель, а  $A_n$  — событие, заключающееся в том, что сработают все переключатели. Если  $\alpha$  — вероятность отказа переключателя, то

$$P\{A_k\} = \alpha(1-\alpha)^{k-1}, \quad P\{A_n\} = (1-\alpha)^{n-1}.$$

Если произошло событие  $A_k$ , то в нашей резервной группе будут работать основной и  $(k-1)$ -й резервный.

Поэтому согласно формуле полных вероятностей ненадежность резервной группы

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n-1} (1-\alpha)^{k-1} \alpha q^k + (1-\alpha)^{n-1} q^n = \frac{q\alpha + pq^n(1-\alpha)^n}{p + \alpha q}. \quad (5.6.1)$$

С ростом числа  $n$  наша ненадежность стремится к пределу, отличному от нуля,

$$Q_n \rightarrow \frac{q\alpha}{p + \alpha q}.$$

Это и есть та минимальная ненадежность, которой мы можем достигнуть в данном случае.

Если  $p(t) = e^{-\lambda t}$ , то из формулы (5.6.1) можно вычислить среднее время

$$T_{ср}^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{(1-\alpha)^{k-1}}{k}.$$

б) Нагруженный резерв, второй случай. Пусть  $A_k$  — событие, заключающееся в том, что за время работы резервной группы из  $n-1$  переключателей сработало  $k$  переключателей,

$$P\{A_k\} = C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1}.$$

Тогда ненадежность резервной группы

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} q^{k+1} = q[(1-\alpha)q + \alpha]^{n-1}. \quad (5.6.2)$$

В этом случае  $Q_n(t)$  стремится к нулю с ростом номера  $n$  и, значит, увеличивая число резервных элементов, мы можем добиться сколь угодно высокой надежности резервной группы.



Если  $p(t) = e^{-\lambda t}$ , то среднее время работы резервной группы равно

$$T_{\text{ср}}^{(n)} = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1-\alpha^k}{k} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{1-\alpha^n}{n(1-\alpha)}.$$

в) Ненагруженный резерв, первый случай. Пусть события  $A_k$  имеют тот же смысл, что и в пункте а). Обозначим через  $\tilde{Q}_k(t)$  ненадежность группы из  $k$  элементов с абсолютно надежными переключателями. Тогда по формуле полных вероятностей

$$Q_n(t) = \sum_{k=1}^n P(A_k) \tilde{Q}_k(t) = \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(1-\alpha)^{k-1} \tilde{Q}_k(t) + (1-\alpha)^{n-1} \tilde{Q}_n(t). \quad (5.6.3)$$

Исходя из этой формулы, нетрудно вычислить среднее время работы резервной группы  $T_{\text{ср}}^{(n)}$ . Если  $t_{\text{ср}}$  — среднее время работы элемента, то

$$T_{\text{ср}}^{(n)} = \left[ \sum_{k=1}^{n-1} \alpha(1-\alpha)^{k-1} k + n(1-\alpha)^{n-1} \right] t_{\text{ср}} = \frac{1-(1-\alpha)^n}{\alpha} t_{\text{ср}}. \quad (5.6.4)$$

Наибольшее среднее время, которого мы можем добиться, увеличивая неограниченно число резервных элементов, равно

$$T_{\text{ср}}^{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} T_{\text{ср}}^{(n)} = \frac{t_{\text{ср}}}{\alpha}.$$

Если надежности элементов подчинены экспоненциальному закону

$$p(t) = e^{-\lambda t},$$

то ненадежность  $Q_n(t)$  вычисляется в конечном виде. Для этого случая

$$\tilde{Q}_k(t) = \int_0^{\lambda t} \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x} dx = 1 - \sum_{s=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^s}{s!} e^{-\lambda t}.$$

Подставляя эти величины в формулу (5.6.3) и преобразуя полученную сумму, мы приходим к окончательному выражению

$$P_n(t) = 1 - Q_n(t) = \sum_{s=0}^{n-1} \frac{[\lambda t (1-\alpha)]^s}{s!} e^{-\lambda t}. \quad (5.6.5)$$

С ростом числа  $n$  надежность стремится к пределу

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(t) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{[\lambda t (1-\alpha)]^s}{s!} e^{-\lambda t} = e^{-\alpha \lambda t}.$$

$\alpha$  - Вер. отказа при этом случае.

Это равенство показывает, что в случае ненадежных переключателей первого типа надежность не может быть сделана сколь угодно высокой.

Если  $\lambda t \ll 1$ , то можно пользоваться приближенной формулой

$$Q_n(t) \approx \alpha \lambda t + \frac{[\lambda t (1-\alpha)]^n}{n!}. \quad (5.6.6)$$

Из нее, между прочим, следует, что число резервных элементов нецелесообразно брать слишком большим. Если

$$\frac{[\lambda t (1-\alpha)]^n}{n!} \ll \alpha \lambda t,$$

то присоединение дополнительных резервных элементов уже несущественно увеличивает надежность. Например, если  $\lambda t = 0,1$ ;  $\alpha = 0,01$ , то нецелесообразно иметь более двух резервных элементов, так как

$$\frac{(0,1)^3}{3!} < 0,001.$$

г) Неагруженный резерв, второй случай. Пусть события  $A_k$  те же, что и в пункте б), а  $\tilde{Q}_k(t)$ , как и выше, — надежность группы из  $k$  элементов с абсолютно надежными переключателями. Тогда

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} \tilde{Q}_{k+1}(t). \quad (5.6.7)$$

Можно показать, что в отличие от предыдущего случая

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(t) \equiv 1.$$

Значит, увеличивая число резервных элементов, можно добиться сколь угодно высокой надежности резервной группы. Из формулы (5.6.7) легко определяется среднее время работы резервной группы

$$T_{\text{ср}}^{(n)} = t_{\text{ср}} \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} (k+1) = t_{\text{ср}} [1 + (n-1)(1-\alpha)]. \quad (5.6.8)$$

Для случая экспоненциального закона  $p(t) = e^{-\lambda t}$  формула (5.6.7) принимает вид

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (1-\alpha)^k \alpha^{n-k-1} \int_0^{\lambda t} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx \quad (5.6.9)$$

и далее не упрощается.

Однако из нее можно получать простые приближенные формулы. Например, если  $\lambda t \ll 1$ , то интегралы можно заменить приближенно так:

$$\int_0^{\lambda t} \frac{x^k}{k!} e^{-x} dx \approx \frac{(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!},$$

а если вероятность  $\alpha$  мала, то можно в сумме (5.6.9) оставить только последние одно-два слагаемых.

Рассмотренные выше задачи, конечно, не описывают всех случаев, которые могут встретиться при резервировании с ненадежными переключателями.

Во-первых, переключатели могут отказывать не только в момент переключения, но и в другие моменты. Во-вторых, иногда переключатель может сработать в случайный момент времени и переключить работу с одного резервного элемента на следующий тогда, когда в этом нет еще необходимости. Такое событие мы назовем ложным переключением.

Оказывается, что можно решить задачу, т. е. найти надежность резервной группы, и с учетом этих двух факторов.

Будем рассматривать ненагруженный резерв. Мы предположим, что резервная группа состоит из основного элемента и  $n$  резервных, надежности которых подчиняются экспоненциальному закону

$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

Далее мы предположим, что отказ переключателя не восстанавливаемый, т. е. после его отказа работа резервной группы заканчивается тогда, когда выходит из строя тот резервный, во время работы которого отказал переключатель.

Как уже было сказано выше, отказ переключателя может быть двух типов. Это, во-первых, отказ «постепенный», происходящий во время работы одного из элементов. Мы будем считать, что время до этого отказа распределено по экспоненциальному закону с параметром  $\mu$ . Во-вторых, переключатель может отказать и в момент переключения. Вероятность этого события обозначим через  $\alpha$ .

Мы считаем, что отказы этих двух типов независимы. Кроме того, предположим независимость появления отказов в моменты переключений. Предположим далее, что поток ложных переключений пуассоновский с параметром  $\gamma$  и ложные переключения могут возникать до тех пор, пока работает переключатель. Будем, наконец, считать, что отказы элементов, отказ переключателя и ложные переключения независимы.

Построим марковский процесс, описывающий работу нашей резервной группы, составим соответствующую ему систему диффе-

ренциальных уравнений и, решив ее, найдем искомую надежность резервной группы.

Занумеруем элементы: основной обозначим номером 0, а резервные — номерами 1, 2, 3, ...,  $n$ .

Введем следующие состояния, характеризующие работу резервной группы:

$$(k, 1), k=0, 1, \dots, n,$$

— работает  $k$ -й элемент и переключатель исправен;

$$(k, 0), k=0, 1, \dots, n,$$

— работает  $k$ -й элемент и переключатель неисправен; (0) — резервная группа не работает. Вероятность этих состояний в момент  $t$  обозначим соответственно

$$p_{k1}(t), p_{k0}(t), p_0(t).$$

Очевидно, что  $p_0(t)$  есть искомая ненадежность резервной группы. За бесконечно малый промежуток времени  $\Delta t$  возможны следующие переходы из одного состояния в другое:

$$1) \quad (k, 1) \rightarrow (k+1, 1), k < n,$$

— произошел или отказ  $k$ -го элемента или ложное переключение и при этом переключатель сработал. Вероятность этого события равна  $(\lambda + \nu)(1 - \alpha)\Delta t + 0(\Delta t)$ .

$$2) \quad (k, 1) \rightarrow (k, 0)$$

— отказал переключатель. Вероятность этого события равна  $\mu\Delta t + 0(\Delta t)$ .

$$3) \quad (k, 1) \rightarrow (0)$$

— произошел отказ элемента или ложное переключение и переключатель не сработал. Вероятность этого события равна  $(\lambda + \nu)\alpha\Delta t + 0(\Delta t)$ .

$$4) \quad (k, 1) \rightarrow (k, 1)$$

— состояние системы не изменилось. Вероятность этого события равна  $1 - (\lambda + \mu + \nu)\Delta t + 0(\Delta t)$ .

$$5) \quad (n, 1) \rightarrow (n, 0)$$

— отказал переключатель. Вероятность равна  $\mu\Delta t + 0(\Delta t)$ .

$$6) \quad (n, 1) \rightarrow (0)$$

— последний элемент отказал или произошло ложное переключение. Вероятность составляет  $(\lambda + \nu) \Delta t + 0 (\Delta t)$ .

$$7) \quad (n, 1) \rightarrow (n, 1)$$

— состояние системы не изменилось.

$$8) \quad (k, 0) \rightarrow (0), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

— произошел отказ элемента. Вероятность события равна  $\lambda \Delta t + 0 (\Delta t)$ .

$$9) \quad (k, 0) \rightarrow (0)$$

— изменений не произошло. Вероятность этого равна  $1 - \lambda \Delta t + 0 (\Delta t)$ .

$$10) \quad (0) \rightarrow (0)$$

имеет вероятность, равную единице.

Отсюда мы легко составляем систему дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} p'_{01} &= -(\lambda + \mu + \nu) p_{01}, \\ p'_{k1} &= (\lambda + \nu) (1 - \alpha) p_{k-1, 1} - (\lambda + \mu + \nu) p_{k1}, \\ & \quad k = 1, 2, \dots, n, \\ p'_{k0} &= \mu p_{k1} - \lambda p_{k0}, \quad k = 0, 1, \dots, n, \\ p'_0 &= \sum_{k=0}^{n-1} p_{k1} (\lambda + \nu) \alpha + p_{n1} (\lambda + \nu) + \sum_{k=0}^n p_{k0} \lambda. \end{aligned} \right\} \quad (5.6.10)$$

Начальные условия

$$\begin{aligned} p_{01}(0) &= 1, & p_{k1}(0) &= 0, & k &\rightarrow 0, \\ p_{k0}(0) &= 0, & p_0(0) &= 0. \end{aligned}$$

Используем для решения этой системы преобразование Лапласа и введем функции

$$\begin{aligned} a_{k1}(z) &= \int_0^{\infty} p_{k1}(t) e^{-zt} dt, \\ a_{k0}(z) &= \int_0^{\infty} p_{k0}(t) e^{-zt} dt, \\ a_0(z) &= \int_0^{\infty} p_0(t) e^{-zt} dt. \end{aligned}$$

Тогда с учетом начальных условий наша система для этих функций запишется в виде

$$\begin{aligned} -1 + za_{01} &= -(\lambda + \mu + \nu) a_{01}, \\ za_{k1} &= (\lambda + \nu)(1 - \alpha) a_{k-1, 1} - (\lambda + \mu + \nu) a_{k1}, \\ za_{k0} &= \mu a_{k1} - \lambda a_{k0}, \\ za_0 &= \alpha(\lambda + \nu) \sum_{k=0}^{n-1} a_{k1} + a_{ni}(\lambda + \nu) + \lambda \sum_{k=0}^n a_{k0}. \end{aligned}$$

Решение этой системы упрощается из-за того, что она разбивается на три подсистемы. Решая первую, мы находим  $a_{k1}$ , подставляя их во вторую группу уравнений, находим  $a_{k0}$ , а подставляя все эти величины в последнее уравнение, находим  $a_0(z)$ . В результате вычислений получается

$$\begin{aligned} a_{k1}(z) &= \frac{[(\lambda + \nu)(1 - \alpha)]^k}{(z + \lambda + \mu + \nu)^{k+1}} = \frac{\lambda_2^k}{(z + \lambda_1)^{k+1}}, \\ a_{k0} &= \frac{\mu}{z + \lambda} a_{k1} = \frac{\mu}{z + \lambda} \frac{\lambda_2^k}{(z + \lambda_1)^{k+1}}, \end{aligned}$$

где  $\lambda_1 = \lambda + \mu + \nu$  и  $\lambda_2 = (\lambda + \nu)(1 - \alpha)$ . Отсюда

$$za_0 = \left[ \alpha(\lambda + \nu) + \frac{\lambda\mu}{z + \lambda} \right] \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_2^k}{(z + \lambda_1)^{k+1}} + \frac{\lambda_2^{n+1}}{(z + \lambda_1)^{n+1}}. \quad (5.6.11)$$

Делая обратное преобразование Лапласа, можно получить явное выражение для  $p_0(t)$  в виде громоздкой суммы слагаемых пуассоновского вида. Впрочем, для небольших  $n$  эта сумма может быть вычислена без труда. Исходя из (5.6.11), можно определить среднее время работы резервной группы

$$T_n = \left( 1 + \frac{\mu}{\lambda} \right) \frac{1 - \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (5.6.12)$$

Из этой формулы при необходимости нетрудно усмотреть, как влияют на надежность резервной группы параметры  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\alpha$ .

### § 5.7. Некоторые принципиальные вопросы резервирования системы

**Масштаб резервирования.** При резервировании системы мы можем резервировать либо отдельные элементы системы, либо блоки, входящие в систему, либо всю систему в целом. Уровень, на котором производится резервирование системы, мы будем называть *масштабом резервирования*. Чем большая часть системы

резервируется как единое целое, тем крупнее масштаб резервирования.

Докажем, что как для нагруженного, так и для ненагруженного резерва любое укрупнение масштаба резервирования уменьшает надежность системы. Всякое укрупнение масштаба резервирования можно представить себе так:

Имеется  $m$  частей системы и каждая часть имеет  $n$  подобных себе резервных частей (рис. 5.7.1). Эти части образуют в системе некоторый блок. Объединяя все первые резервные части и т. д., мы получим  $n$  резервных блоков, подобных нашему.

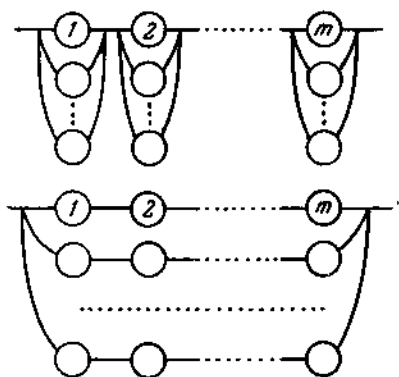


Рис. 5.7.1.

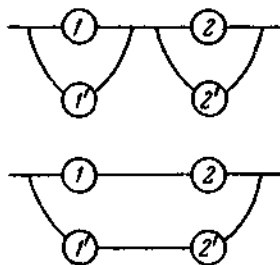


Рис. 5.7.2.

*Мы хотим доказать, что надежность системы при таком объединении резерва уменьшается.*

Всякое объединение резерва частей системы можно представить как последовательное объединение резерва пар частей; например, мы объединяем резерв первой и второй частей, получаем новую часть системы, ее резерв объединяем с резервом третьей части системы и т. д. Поэтому при доказательстве нашего утверждения мы можем ограничиться рассмотрением случая, когда объединяются резервы двух частей системы. Далее, объединение резерва этих двух частей можно рассматривать последовательно как объединение всех первых резервных элементов, потом всех вторых и т. д. Отсюда следует, что при доказательстве нашего утверждения можно ограничиться случаем, когда каждая из двух частей системы имеет по одной резервной части (рис. 5.7.2). Итак, рассмотрим две задублированные части системы. Каждую из этих четырех частей будем называть ниже привычным словом элемент.

Пусть  $\tau_1, \tau_1', \tau_2, \tau_2'$  — случайные времена работы этих элементов и их резервных элементов. Мы сравниваем два способа резервирования и хотим показать, что во втором случае надежность этой группы из четырех элементов будет не больше, чем в первом.

Рассмотрим отдельно случаи нагруженного и ненагруженного резерва.

Нагруженный резерв. Время работы группы для первой схемы выражается в виде

$$T_1 = \min [\max (\tau_1, \tau'_1), \max (\tau_2, \tau'_2)],$$

для второй схемы —

$$T_2 = \max [\min (\tau_1, \tau_2), \min (\tau'_1, \tau'_2)].$$

Но очевидно, что

$$T_2 \leq \max (\tau_1, \tau'_1)$$

и

$$T_2 \leq \max (\tau_2, \tau'_2).$$

Следовательно,

$$T_2 \leq \min [\max (\tau_1, \tau'_1), \max (\tau_2, \tau'_2)] = T_1.$$

Но неравенство

$$T_2 \leq T_1$$

означает, что вторая схема имеет не большую надежность, чем первая.

Ненагруженный резерв. Случайные времена работы нашей группы выражаются так:

$$T_1 = \min [(\tau_1 + \tau'_1), (\tau_2 + \tau'_2)],$$

$$T_2 = \min (\tau_1, \tau_2) + \min (\tau'_1, \tau'_2).$$

Но очевидно, что

$$T_2 \leq \tau_1 + \tau'_1 \quad \text{и} \quad T_2 \leq \tau_2 + \tau'_2.$$

Следовательно,

$$T_2 \leq \min [(\tau_1 + \tau'_1), (\tau_2 + \tau'_2)] = T_1,$$

и мы вновь приходим к тому же результату. Интересно заметить, что этот вывод совершенно не зависит от закона надежности элемента. Итак, *чем крупнее масштаб резервирования, тем меньше надежность.*

Скользящий резерв. Обычно в системе имеются группы одинаковых элементов. В этом случае вместо того, чтобы резервировать каждый элемент в отдельности, можно объединить все резервные элементы и устроить так называемый *скользящий резерв* (рис. 5.7.3).



При таком способе резервирования имеются группа одинаковых (или взаимозаменяемых) основных элементов и одна группа резервных элементов. При отказе одного из основных элементов он заменяется очередным резервным. Отказ всей резервной группы наступает в момент первого отказа одного из основных элементов, после того, как кончились все резервные элементы (т. е. были использованы или отказали в резерве).

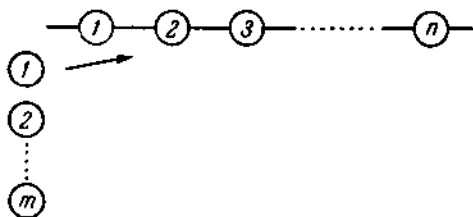


Рис. 5.7.3.

Нетрудно рассчитать надежность резервной группы при скользящем резерве.

Будем предполагать, что надежности всех элементов, основных и резервных, одинаковы и равны  $p(t)$ , а ненадежности равны  $q(t)$ . Рассмотрим

отдельно случаи нагруженного и ненагруженного резервов.

**Нагруженный резерв.** Пусть  $n$  — число основных элементов, а  $m$  — число резервных. Очевидно, что наша резервная группа не откажет за время  $t$  тогда и только тогда, когда за это время произойдет не более  $m$  отказов элемента.

Следовательно, надежность резервной группы

$$P_{nm}(t) = \sum_{k=0}^m C_{m+n}^k q^k(t) p^{n+m-k}(t). \quad (5.7.1)$$

Если надежность подчиняется экспоненциальному закону

$$p(t) = e^{-\lambda t},$$

то легко находится среднее время (см. § 5.3)

$$T_{nm} = \frac{1}{\lambda(m+n)} + \frac{1}{\lambda(m+n-1)} + \dots + \frac{1}{\lambda n}. \quad (5.7.2)$$

**Ненагруженный резерв.** Для общего случая надежность выражается весьма сложно через интегралы типа сверток и даже среднее время работы имеет сложный вид. Поэтому предположим, что надежность подчиняется экспоненциальному закону

$$p(t) = e^{-\lambda t}.$$

В этом случае нетрудно подсчитать, что надежность резервной группы

$$P_{mn}(t) = \int_{n\lambda t}^{\infty} \frac{x^m}{m!} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^m \frac{(n\lambda t)^k}{k!} e^{-n\lambda t}, \quad (5.7.3)$$

так как суммарная интенсивность отказа равна  $n\lambda$  и работа резервной группы заканчивается в момент  $(m+1)$ -го отказа. Среднее время работы

$$T_{nm} = \frac{m+1}{n\lambda}. \quad (5.7.4)$$

В заключение этого параграфа рассмотрим такой общий вопрос: пусть имеются две группы со скользящим резервом, в одной  $n_1$  основных и  $m_1$  резервных, а в другой  $n_2$  основных и  $m_2$  резервных. Мы объединяем эти две группы, и, таким образом, в объединенной группе у нас будет  $n_1 + n_2$  основных и  $m_1 + m_2$  резервных элементов. Увеличивается ли в результате такого объединения надежность системы?

Докажем для случая, когда все элементы, входящие в эти группы, имеют одинаковую надежность, что *объединение резервов этих групп всегда увеличивает надежность системы*.

Пусть  $\tau'_1, \tau'_2, \tau'_3, \dots$  — последовательные моменты отказов элементов (основных и резервных) первой группы,  $\tau''_1, \tau''_2, \dots$  — последовательные моменты отказов элементов второй группы. Тогда первая группа отказывает в момент  $t' = \tau'_{m_1+1}$ , а вторая группа — в момент  $t'' = \tau''_{m_2+1}$ . Следовательно, группа, составленная из этих двух групп, отказывает в момент  $t_1 = \min(t', t'')$ . Будем откладывать отказы обеих групп на одной оси и обозначим моменты отказов объединенной группы

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$$

Если мы объединяем резервы этих групп, то отказ объединенной группы наступает в момент  $t_2 = \tau_{m_1+m_2+1}$ . Пусть для определенности

$$\tau'_{m_1+1} < \tau''_{m_2+1}.$$

Тогда к моменту  $\tau'_{m_1+1}$  произошло не более  $m_2$  отказов второй группы и, следовательно,

$$t_1 = \tau'_{m_1+1} = \tau_k \leq \tau_{m_1+m_2+1} = t_2.$$

Значит, отказ объединенной группы с общим резервом наступает не раньше, чем отказ этой группы с разделенными резервами. Можно оценить выигрыш при объединении резервов и количественно сравнивая средние времена работы в том и другом случае. Если надежность элементов подчиняется экспоненциальному закону  $p(t) = e^{-\lambda t}$ , то для отдельных резервов среднее время работы равно

$$T_1 = \frac{1}{\lambda(n_1+n_2)} \sum_{s=0}^{m_2} \sum_{k=0}^{m_1} C_{k+s}^k \frac{n_1^k n_2^s}{(n_1+n_2)^{k+s}},$$

а в случае общего резерва —

$$T_2 = \frac{m_1 + m_2}{\lambda (n_1 + n_2)}.$$

Для конкретных случаев по этим формулам можно оценить тот выигрыш, который даст объединение резерва. Из них также следует, что наименьший выигрыш будет тогда, когда

$$\frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2}.$$

Это нетрудно понять и физически, — ведь в этом случае обе группы отказывают в среднем в один и тот же момент и поэтому объединение резерва почти ничего не дает.

Скользкий резерв дает большой выигрыш в надежности, однако, применяя его, следует иметь в виду и другую, чисто техническую сторону этого вопроса: если замену отказавшего элемента резервным осуществляет не человек, а автоматическое устройство, то в случае скользящего резерва требуется огромное количество соединений и переключателей, ведь каждый резервный элемент должен быть соединен с каждым рабочим элементом. Это обстоятельство в значительной мере обесценивает идею скользящего резерва.

---

## ГЛАВА 6 РЕЗЕРВИРОВАНИЕ С ВОССТАНОВЛЕНИЕМ

### § 6.1. Введение

В предыдущей главе, изучая системы с резервом, мы предполагали, что отказавшие элементы не восстанавливаются. На практике, однако, часто прибегают к восстановлению для повышения надежности системы, увеличения срока ее службы. Естественно, что для количественного описания работы таких систем понадобилось создать соответствующие математические модели и методы. При этом оказалось, что системы, в которых происходит восстановление, хорошо описываются методами теории массового обслуживания. Обнаружилось, что многие задачи, возникшие в теории надежности, математически тождественны известным задачам из теории массового обслуживания. Выяснилось, что многие задачи массового обслуживания можно перевести на язык надежности, если, например, слово «требование» заменить словом «отказ», а слово «обслуживание» заменить словом «ремонт».

Связь, установленная между теорией надежности и теорией массового обслуживания, обогатила обе эти науки. В теории надежности были использованы методы и готовые решения задач теории массового обслуживания. С другой стороны, в самой теории массового обслуживания появились новые идеи, новые постановки задач из теории надежности.

Изучая резервные системы с восстановлением, обычно предполагают, что *время жизни распределено по показательному закону*. При этих условиях работа нашей системы всегда описывается однородным марковским процессом с конечным (а иногда и со счетным) числом состояний. Чаще всего ограничиваются изучением процесса только в установившемся режиме, и тогда задача описания работы системы сводится к решению системы алгебраических уравнений.

Во многих задачах такого рода с успехом используется так называемый *процесс гибели и размножения*, который ранее применялся в теории массового обслуживания, биологии, медицине и т. п.

В настоящей главе этот процесс будет подробно изучен и применен к ряду задач теории надежности. Выше уже говорилось, что при описании систем с восстановлением обычно предполагают, что все законы распределения — показательные. По-видимому, для большинства систем эти предположения неверны; так, например, время восстановления почти никогда не распределено, хотя бы приближенно, по показательному закону. Тем не менее и сейчас почти все задачи в теории надежности решаются в предположениях экспоненциальности всех законов. Делается это не от хорошей жизни — если отказаться от экспоненциальности законов, то все задачи резко усложнятся. В последние годы в теории массового обслуживания решен целый ряд задач, в которых часть законов распределения или даже все законы произвольны. Выработаны методы решения таких задач (метод вложенных цепей Маркова, метод интегро-дифференциальных уравнений, метод, использующий тождество Спизера, и т. п.).

К сожалению, эти методы слабо используются в теории надежности. Причина этого не только в том, что эти методы сложны и малодоступны для инженеров, но также и в том, что решение таких задач приводит к громоздким формулам, малоприменимым для вычислений.

По-видимому, единственный путь, способный устранить этот разрыв между теорией, давшей решение многих задач, и практикой, которая не может использовать эти решения, заключается в поисках приближенных формул, в доказательстве ряда асимптотических теорем, из которых можно вывести приближенные формулы.

Выводу простых приближенных формул в настоящей главе уделено большое внимание. Отдельно рассмотрен случай дублирования, когда резервная группа состоит из двух элементов. Все задачи, возникающие в этом случае, решаются при весьма общих предположениях.

## § 6.2. Дублирование с восстановлением<sup>1)</sup>

Мы рассмотрим сначала простейший случай резервирования — дублирование, когда к рабочему элементу присоединен один резервный, который в случае отказа рабочего элемента заменяет его. Резервную группу, состоящую из двух элементов — основного и резервного, мы будем коротко называть *парой*.

В теории резервирования без восстановления не имело особого смысла выделять этот случай. Сейчас, когда мы начали рассматривать резервные системы, в которых происходит восстановление отказавших элементов, разумно отдельно рассмотреть случай дубли-

<sup>1)</sup> Результаты этого параграфа принадлежат в основном Б. В. Гнеденко.

рования, так как это позволит решить нам целый ряд задач в предположениях максимальной общности [1] — [4].

1°. Предположим сначала, что время жизни элемента подчиняется показательному закону, а время восстановления (или ремонта) распределено произвольно. Рассмотрим общий случай облегченного резерва. Пусть  $\lambda$  — опасность отказа рабочего элемента,  $\lambda_1$  — опасность отказа резервного элемента, а  $G(t)$  — закон распределения времени ремонта. Очевидно, что при  $\lambda_1 = 0$  мы получим случай холодного резерва, а при  $\lambda = \lambda_1$  — случай горячего резерва. Мы считаем, что оба элемента, основной и резервный, одинаковы, но в резервном состоянии опасность отказа меньше, чем в рабочем. Когда отказывает основной элемент, на его место мгновенно становится резервный, а основной начинает восстанавливаться и после восстановления становится в резерв. В этот момент основной и резервный элементы меняются ролями. Расстояние между соседними моментами восстановлений мы назовем циклом. Ясно, что все циклы независимы и одинаково распределены. Отказ нашей пары наступает тогда, когда на каком-нибудь цикле во время восстановления одного элемента отказывает другой.

Обозначим через  $p(t)$  вероятность безотказной работы пары до момента  $t$ . Нетрудно составить интегральное уравнение для вероятности  $p(t)$ . Событие, заключающееся в безотказной работе пары на  $(0, t)$ , распадается на следующие несовместные события:

1) Первый отказ наступает после момента  $t$ . Вероятность этого события равна  $e^{-(\lambda+\lambda_1)t}$ .

2) Первый отказ наступает до момента  $t$ , но первый цикл заканчивается после момента  $t$ . Резервный элемент, включившийся в работу в момент отказа, работает безотказно до момента  $t$ . Вероятность этого события равна

$$\int_0^t (\lambda + \lambda_1) e^{-(\lambda+\lambda_1)x} [1 - G(t-x)] e^{-\lambda(t-x)} dx.$$

3) Первый цикл заканчивается до момента  $t$ , во время первого восстановления второй элемент работает безотказно и на оставшемся до момента  $t$  участке времени пара работает безотказно. Вероятность такого события равна

$$\int_0^t p(t-x) dx \int_0^x (\lambda + \lambda_1) e^{-(\lambda+\lambda_1)z - \lambda(x-z)} g(x-z) dz,$$

где  $g(x) = G'(x)$ .

Складывая эти три вероятности, мы получим, очевидно, искомую вероятность

$$p(t) = e^{-(\lambda+\lambda_1)t} + e^{-\lambda t} (\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-\lambda_1 x} [1 - G(t-x)] dx + \\ + \int_0^t p(t-x) e^{-\lambda x} (\lambda + \lambda_1) dx \int_0^x e^{-\lambda_1 z} g(x-z) dz. \quad (6.2.1)$$

Мы получили интегральное уравнение вида

$$p(t) = A(t) + \int_0^t p(t-x) B(x) dx,$$

где

$$A(t) = e^{-(\lambda+\lambda_1)t} + e^{-\lambda t} (\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-\lambda_1 x} [1 - G(t-x)] dx,$$

$$B(t) = e^{-\lambda t} (\lambda + \lambda_1) \int_0^t e^{-\lambda_1 z} g(t-z) dz.$$

Отсюда можно получить представление вероятности  $p(t)$  в виде ряда

$$p(t) = B_0(t) + B_1(t) + B_2(t) + \dots + B_n(t) + \dots, \quad (6.2.2)$$

где

$$B_0(t) = A(t), \quad B_{n+1}(t) = \int_0^t B_n(t-x) B(x) dx.$$

Если время  $t$  мало по сравнению со средней длительностью цикла, то этот ряд можно использовать для вычисления вероятности  $p(t)$ , так как он быстро сходится и первые два-три слагаемых дают достаточно точно сумму ряда. Если же время велико, то ряд (6.2.2) практически бесполезен. На практике как раз интересен тот случай, когда вероятность отказа пары на одном цикле, равная

$$\alpha = 1 - \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} dG(t) = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) dG(t),$$

мала и, следовательно, среднее время жизни пары во много раз больше средней длительности цикла. Чтобы исследовать асимптотическое поведение вероятности  $p(t)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , применим преобразование Лапласа. Введем обозначения

$$a(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} A(t) dt, \quad c(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dG(t), \\ b(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} B(t) dt, \quad \varphi(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p(t) dt.$$

Нетрудно вычислить функции  $a(s)$  и  $b(s)$ :

$$a(s) = \frac{s + \lambda + (\lambda + \lambda_1) [1 - c(s + \lambda)]}{(s + \lambda + \lambda_1)(s + \lambda)}, \quad b(s) = \frac{(\lambda + \lambda_1) c(s + \lambda)}{\lambda + \lambda_1 + s}.$$

Из уравнения (6.2.1) получаем

$$\varphi(s) = \frac{a(s)}{1 - b(s)} = \frac{s + \lambda + (\lambda + \lambda_1) [1 - c(s + \lambda)]}{(s + \lambda) [\lambda + \lambda_1 + s - (\lambda + \lambda_1) c(\lambda + s)]}. \quad (6.2.3)$$

Если  $\tau$  — случайное время жизни пары, то

$$P\{\tau > t\} = p(t).$$

Отсюда среднее время жизни пары

$$\begin{aligned} T_0 &= \int_0^{\infty} p(t) dt = \varphi(0) = \frac{\lambda + (\lambda + \lambda_1) [1 - c(\lambda)]}{\lambda (\lambda + \lambda_1) [1 - c(\lambda)]} = \\ &= \frac{\lambda + (\lambda + \lambda_1) \alpha}{\lambda (\lambda + \lambda_1) \alpha} = \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{(\lambda + \lambda_1) \alpha}. \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Если бы не было восстановления элементов, то среднее время жизни пары равнялось бы

$$T'_0 = \frac{1}{\lambda + \lambda_1} + \frac{1}{\lambda}.$$

Отсюда выигрыш в среднем времени, который дает восстановление, равен

$$\frac{T_0}{T'_0} = \frac{\lambda + \lambda_1}{2\lambda + \lambda_1} + \frac{\lambda}{(2\lambda + \lambda_1) \alpha}. \quad (6.2.5)$$

Чем меньше вероятность  $\alpha$  отказа пары на одном цикле, тем больше выигрыш.

Изучим теперь асимптотическое поведение вероятности  $p(t)$ . Для этого заметим, что при  $\alpha \rightarrow 0$

$$T_0 = M\tau \sim \frac{1}{(\lambda + \lambda_1) \alpha}.$$

Естественно поэтому ожидать, что распределение нормированной величины  $\alpha t$  будет при этом сходиться к некоторому предельному распределению. Нетрудно найти распределение величины

$$P\{\alpha t > t\} = p\left(\frac{t}{\alpha}\right).$$

Преобразование Лапласа для этой функции

$$\int_0^{\infty} e^{-st} p\left(\frac{t}{\alpha}\right) dt = \alpha \varphi(\alpha s) = \alpha \frac{\alpha s + \lambda + (\lambda + \lambda_1) [1 - c(\alpha s + \lambda)]}{(\alpha s + \lambda) [\lambda + \lambda_1 + \alpha s - (\lambda + \lambda_1) c(\alpha s + \lambda)]}.$$



Пусть теперь параметры  $\lambda$  и  $\lambda_1$  фиксированы, а закон распределения  $G(t)$  меняется так, что

$$\alpha = \int_0^{\infty} [1 - e^{-\lambda t}] dG(t) \rightarrow 0.$$

Сделаем вспомогательную оценку

$$\begin{aligned} c(\lambda) - c(\alpha s + \lambda) &= \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} (1 - e^{-\alpha s t}) dG(t) \leq \\ &\leq \alpha s \int_0^{\infty} t e^{-\lambda t} dG(t) \leq \frac{\alpha s}{\lambda} \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) dG(t) = \frac{\alpha^2 s}{\lambda}, \end{aligned}$$

т. е.

$$c(\lambda) - c(\alpha s + \lambda) = \frac{\alpha^2 s}{\lambda} \theta, \quad \text{где } 0 < \theta < 1.$$

Отсюда при  $\alpha \rightarrow 0$  равномерно на любом конечном отрезке изменения  $s$

$$\alpha \varphi(\alpha s) = \alpha \frac{\alpha s + \lambda + (\lambda + \lambda_1) \left( \alpha + \frac{\alpha^2 s}{\lambda} \theta \right)}{(\alpha s + \lambda) \left[ \alpha s + (\lambda + \lambda_1) \left( \alpha + \frac{\alpha^2 s}{\lambda} \theta \right) \right]} \rightarrow \frac{1}{s + \lambda + \lambda_1}.$$

Итак, доказано следующее утверждение:

Если  $\lambda$  и  $\lambda_1$  фиксированы, а

$$\alpha = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) dG(t) \rightarrow 0,$$

то

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{P} \{ \alpha \tau > t \} = e^{-(\lambda + \lambda_1) t}. \quad (6.2.6)$$

Отсюда следует, что при малом  $\alpha$  вероятность безотказной работы пары в течение времени  $t$  выражается приближенной формулой

$$p(t) \approx e^{-(\lambda + \lambda_1) \alpha t}. \quad (6.2.7)$$

Более детальное исследование показывает, что лучше использовать другую приближенную формулу

$$p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_0}}, \quad (6.2.8)$$

где  $T_0$  берется из (6.2.4).

Если формула (6.2.7) имеет относительную погрешность порядка  $\alpha$ , то формула (6.2.8) имеет относительную погрешность

порядка  $\alpha^2$ . Некоторое неудобство этих формул заключается в том, что для их использования нужно знать величину  $\alpha$ . Если при  $\alpha \rightarrow 0$  закон  $G(t)$  меняется так, что

$$\frac{\int_0^{\infty} (\lambda t)^2 dG(t)}{\int_0^{\infty} \lambda t dG(t)} = \frac{\lambda^2 M \tau_{\text{рем}}^2}{\lambda M \tau_{\text{рем}}} \rightarrow 0 \quad (6.2.9)$$

( $\tau_{\text{рем}}$  — случайное время ремонта), то, как нетрудно видеть,

$$\alpha = \int_0^{\infty} (1 - e^{-\lambda t}) dG(t) = \int_0^{\infty} \left[ \lambda t - \theta \frac{(\lambda t)^2}{2} \right] dG(t) = \lambda M \tau_{\text{рем}} - \theta_1 \frac{\lambda^2}{2} M \tau_{\text{рем}}^2,$$

где  $0 < \theta$ ,  $\theta_1 < 1$ , и тогда из (6.2.9) следует, что

$$\frac{\lambda M \tau_{\text{рем}}}{\alpha} \rightarrow 1.$$

Таким образом, если  $\alpha$  мало, а

$$\lambda^2 M \tau_{\text{рем}}^2 \ll \lambda M \tau_{\text{рем}},$$

то  $\lambda M \tau_{\text{рем}} \approx \alpha$  и имеет место приближенная формула

$$p(t) \approx e^{-(\lambda + \lambda_1) \lambda T_1 t}, \quad (6.2.10)$$

где

$$T_1 = M \tau_{\text{рем}}.$$

Это означает, что асимптотически закон распределения времени жизни пары не зависит от закона распределения времени восстановления  $G(t)$ , а зависит только от среднего времени восстановления  $T_1$ . Заметим еще, что условие (6.2.9) легко проверяется статистически.

2°. Выше мы рассмотрели дублирование с восстановлением для случая, когда времена жизни рабочего и резервного элементов распределены по показательному закону. В ряде случаев это допущение неверно, и приходится рассматривать общий случай, когда времена жизни и времена восстановления распределены произвольно. Рассмотрим сначала случай ненагруженного резерва.

Пусть  $F(t)$  — закон распределения времени жизни элемента, а  $G(t)$  — закон распределения времени восстановления элемента. Мы предполагаем, что элемент, находящийся в резерве, не отказывает и не стареет, а ремонт полностью восстанавливает исходные свойства элемента. Работа нашей пары происходит следующим образом:

основной элемент, проработав случайное время  $\tau_0$  (рис. 6.2.1), отказывает и затем восстанавливается за случайное время  $\xi_1$ . В момент его отказа резервный элемент мгновенно включается и работает случайное время  $\tau_1$ . После отказа резервный элемент восстанавливается за случайное время  $\xi_2$ , а восстановленный основной



Рис. 6.2.1.

элемент работает случайное время  $\tau_2$ , и т. д. В силу наших предположений величины  $\tau_i$  и  $\xi_j$  независимы и

$$P\{\tau_i < t\} = F(t) \quad \text{и} \quad P\{\xi_j < t\} = G(t).$$

Отказ пары наступает тогда, когда к моменту отказа одного элемента второй не успевает восстановиться. Обозначим через  $\tau$  случайное время работы пары. Очевидно, что  $\tau$  может быть записано в виде

$$\tau = \tau_0 + \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\nu,$$

где  $\nu$  — случайный номер того периода, в конце которого наступает отказ. Для удобства рассмотрим сначала величину

$$\tau' = \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_\nu.$$

Иными словами, мы рассматриваем работу нашей пары с момента  $\tau_0$ , принимая его за начальный. Обозначим закон распределения  $\tau'$  через  $\Phi_1(t)$ ,

$$\Phi_1(t) = P\{\tau' < t\}.$$

Событие, состоящее в безотказной работе пары до момента  $t$ , разбивается на следующие несовместные события:

1) Первый период  $\tau_1$  закончится после момента  $t$ . Вероятность этого события равна

$$1 - F(t).$$

2) Первый период  $\tau_1$  закончится до момента  $t$ ; в конце этого периода элемент, стоящий в резерве, успеет восстановиться и на оставшемся до момента  $t$  участке времени наша пара не откажет. Вероятность этого события равна

$$\int_0^t [1 - \Phi_1(t-x)] G(x) dF(x).$$

Складывая эти две вероятности, мы получим вероятность безотказной работы пары  $1 - \Phi_1(t)$ ,

$$1 - \Phi_1(t) = 1 - F(t) + \int_0^t [1 - \Phi_1(t-x)] G(x) dF(x). \quad (6.2.11)$$

Если обозначить закон распределения  $\tau = \tau_0 + \tau'$  через  $\Phi(t)$ , то

$$\Phi(t) = \int_0^t \Phi_1(t-x) dF(x). \quad (6.2.12)$$

Решая интегральное уравнение (6.2.11) методом последовательных приближений, можно получить для функции  $\Phi_1(t)$ , а потом и для  $\Phi(t)$  представление в виде ряда, подобного ряду (6.2.2). Однако этот ряд по причинам, изложенным выше, практически бесполезен. На практике в первую очередь интересен тот случай, когда вероятность отказа пары на одном периоде

$$\alpha = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dF(t)$$

мала. Это значит, что время восстановления элемента в среднем значительно меньше времени безотказной работы элемента. Чтобы изучить асимптотическое поведение вероятности  $\Phi(t)$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , воспользуемся, как и выше, преобразованием Лапласа. Пусть

$$a(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dF(t), \quad b(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} G(t) dF(t),$$

$$A_1(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Phi_1(t), \quad A(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} d\Phi(t).$$

Тогда из (6.2.11) мы получим

$$A_1(s) = \frac{a(s) - b(s)}{1 - b(s)},$$

а из (6.2.12) находим, что

$$A(s) = a(s) A_1(s) = a(s) \frac{a(s) - b(s)}{1 - b(s)}. \quad (6.2.13)$$

Отсюда среднее время безотказной работы пары

$$T_0 = -A'(0) = T_1 + \frac{T_1}{1 - b(0)} = T_1 + \frac{T_1}{\alpha}, \quad (6.2.14)$$

где  $T_1 = \int_0^{\infty} t dF(t)$  — среднее время жизни элемента. Формула (6.2.14)

дает возможность оценить тот выигрыш, который мы получаем в результате восстановления элементов. Если бы восстановления не было, то среднее время жизни пары равнялось бы

$$T'_0 = 2T_0.$$

Отсюда выигрыш равен

$$\frac{T_0}{T'_0} = \frac{1+\alpha}{2\alpha}.$$

Чем меньше вероятность  $\alpha$  отказа на одном периоде, тем больше выигрыш.

Переходя к изучению асимптотического поведения вероятности  $\Phi(t)$ , мы предположим, что закон распределения времени жизни элемента  $F(t)$  фиксирован, а закон распределения времени восстановления  $G_n(t)$  меняется по некоторой последовательности таким образом, что

$$\alpha_n = \int_0^{\infty} [1 - G_n(t)] dF(t) \rightarrow 0.$$

Соответственно этому снабдим индексом законы и преобразования Лапласа  $\Phi_n(s)$ ,  $A_n(s)$ ,  $b_n(s)$ . Введем обозначение

$$c_n(s) = a(s) - b_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} [1 - G_n(t)] dF(t).$$

Очевидно,  $c_n(0) = \alpha_n$ . Рассмотрим разность

$$\begin{aligned} \alpha_n - c_n(\alpha_n s) &= \int_0^{\infty} (1 - e^{-\alpha_n s t}) [1 - G_n(t)] dF(t) \leq \\ &\leq \alpha_n s \int_0^{\infty} t [1 - G_n(t)] dF(t) \leq \\ &\leq \alpha_n s \left[ A_n \int_0^{\infty} [1 - G_n(t)] dF(t) + \int_{A_n}^{\infty} t dF(t) \right]. \end{aligned}$$

Если положить  $A_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n}}$ , то оба слагаемых в квадратной скобке будут стремиться к нулю, и мы приходим к следующему утверждению:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c_n(\alpha_n s)}{\alpha_n} = 1 \quad (6.2.15)$$

*равномерно на любом конечном отрезке изменения  $s$ .*

Рассмотрим нормированную случайную величину  $\alpha_n \tau$ . Ее закон распределения

$$P\{\alpha_n \tau < t\} = \Phi_n\left(\frac{t}{\alpha_n}\right).$$

Преобразование Лапласа для этого закона

$$\int_0^{\infty} e^{-st} d\Phi_n\left(\frac{t}{\alpha_n}\right) = A_n(\alpha_n s).$$

Тогда, используя (6.2.15), мы получим, что при  $\alpha_n \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} A_n(\alpha_n s) &= a(\alpha_n s) \frac{c_n(\alpha_n s)}{1 - a(\alpha_n s) + c_n(\alpha_n s)} = \\ &= a(\alpha_n s) \frac{\frac{c_n(\alpha_n s)}{\alpha_n}}{\frac{1 - a(\alpha_n s)}{\alpha_n} + \frac{c_n(\alpha_n s)}{\alpha_n}} \rightarrow \frac{1}{1 + sT_1} \end{aligned}$$

равномерно на любом конечном отрезке изменения  $s$ . Отсюда следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\{\alpha_n \tau < t\} = 1 - e^{-\frac{t}{T_1}}. \quad (6.2.16)$$

Это предельное соотношение означает, что, когда вероятность отказа пары на периоде

$$\alpha = \int_0^{\infty} [1 - G(t)] dF(t)$$

мала, вероятность безотказной работы пары в течение времени  $t$  выражается приближенной формулой

$$P\{\tau > t\} = 1 - \Phi(t) \approx e^{-\frac{\alpha t}{T_1}}. \quad (6.2.17)$$

Эта формула и дает практически приемлемое решение нашей задачи.

3°. Рассмотрим теперь случай нагруженного резерва, предполагая, как и в предыдущей задаче, что законы распределения времени жизни и восстановления элементов  $F(t)$  и  $G(t)$  произвольны. Предположим, что каждый элемент работает и восстанавливается независимо от состояния другого и отказ наступает тогда, когда отказывают оба элемента. В § 2.4 рассматривалась система, состоящая из  $n$  элементов, которые работают и восстанавливаются независимо от состояния других элементов. Система отказывает, если отказывает хотя бы один элемент. Были найдены точное распределение времени работы системы и средние времена работы и простоя системы в стационарном режиме. При этом оказалось,

что средние времена выражаются теми же формулами, какие получаются в случае экспоненциальных законов времени жизни и восстановления элементов. Если в этой задаче мы поменяем роли участка работы и участка простоя, то мы получим систему, которая отказывает, когда отказывают все входящие в нее элементы, т. е. получим резервную группу для случая нагруженного резерва. Замеченная двойственность в постановке задач позволяет сразу написать формулы, дающие решение нашей задачи в общем случае, когда резервная группа состоит из  $n$  элементов.

Пусть  $T_1 = \int_0^{\infty} t dF(t)$  — среднее время жизни элемента, а  $T_2 = \int_0^{\infty} t dG(t)$  — среднее время восстановления элемента. Тогда среднее время безотказной работы резервной группы из  $n$  элементов (включая и основной) в стационарном режиме выражается так:

$$T_0 = \frac{T_2}{n} \left[ \left( 1 + \frac{T_1}{T_2} \right)^n - 1 \right]. \quad (6.2.18)$$

Конечно, первый период безотказной работы резервной группы, в начале которого все элементы исправны, будет иметь другое, несколько большее среднее время, но если величина  $\left( 1 + \frac{T_1}{T_2} \right)^n$  велика, то это различие несущественно. Более того, из общих соображений следует, что, когда  $\left( 1 + \frac{T_1}{T_2} \right)^n \gg 1$ , закон распределения случайного времени безотказной работы резервной группы должен быть достаточно близок к экспоненциальному. Иными словами, должна иметь место приближенная формула: *вероятность безотказной работы резервной группы в течение времени  $t$*

$$P\{\tau > t\} = p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_0}}, \quad (6.2.19)$$

где  $T_0$  выражается по формуле (6.2.18).

### § 6.3. Процесс гибели и размножения

Если задача о дублировании с восстановлением может быть решена при весьма общих предположениях о законах распределения времени жизни и времени восстановления элементов, то при переходе к случаю, когда число элементов в системе произвольно, задача резко усложняется. В этом случае для эффективного решения задачи мы вынуждены предположить, что времена жизни и восстановления элементов распределены по показательному закону.

При таком предположении описание системы с восстановлением сводится к изучению некоторого однородного марковского процесса с конечным или счетным числом состояний. Одним из таких процессов является процесс гибели и размножения [5], который с успехом применяется не только в теории надежности, но и в теории массового обслуживания, в биологии, экономике и т. п.

Рассмотрим однородный марковский процесс с конечным или счетным числом состояний, которые мы будем обозначать числами  $0, 1, 2, 3, \dots$ . Если в момент  $t$  наш процесс находится в состоянии  $k$ , то за бесконечно малое время  $\Delta t$  он с вероятностью  $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$  перейдет в состояние  $(k+1)$ , с вероятностью  $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$  перейдет в состояние  $(k-1)$  и с вероятностью  $1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t + o(\Delta t)$  останется в состоянии  $k$ . Из начального состояния  $0$  он может перейти в состояние  $1$  с вероятностью  $\lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$  и остаться в состоянии  $0$  с вероятностью  $1 - \lambda_0 \Delta t + o(\Delta t)$ . Если число состояний конечно и равно  $n$ , то из состояния  $n$  процесс может перейти в состояние  $(n-1)$  с вероятностью  $\mu_n \Delta t + o(\Delta t)$  и остаться в прежнем состоянии с вероятностью  $1 - \mu_n \Delta t + o(\Delta t)$ . Определенный таким образом процесс и называется *процессом гибели и размножения*. Обозначим через  $p_k(t)$  вероятность того, что в момент  $t$  процесс находится в состоянии  $k$ . Сравнивая состояние процесса в два бесконечно близких момента времени  $t$  и  $t + \Delta t$ , мы по формуле полных вероятностей получим

$$p_k(t + \Delta t) = p_{k-1}(t) [\lambda_{k-1} \Delta t + o(\Delta t)] + \\ + p_k(t) [1 - (\lambda_k + \mu_k) \Delta t + o(\Delta t)] + p_{k+1}(t) [\mu_{k+1} \Delta t + o(\Delta t)] + o(\Delta t).$$

Перенесем член  $p_k(t)$  в левую часть, разделим обе части равенства на  $\Delta t$  и устремим  $\Delta t$  к нулю. В пределе мы получим уравнение

$$p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t).$$

Аналогично выводится уравнение для случая  $k=0$

$$p_0'(t) = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t).$$

Если процесс имеет конечное число состояний, то последнее уравнение имеет вид

$$p_n'(t) = \lambda_{n-1} p_{n-1}(t) - \mu_n p_n(t).$$

Положим  $\mu_0 = \lambda_{-1} = 0$ , а в случае конечного числа состояний  $\lambda_n = 0$ . Тогда для любого  $k$  уравнения будут иметь одинаковый вид

$$p_k'(t) = \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \quad (6.3.1) \\ k = 0, 1, 2, \dots$$







процесса

$$k_{\text{ср}} = \sum_{k=0}^n k p_k = \frac{\sum_{k=0}^n k \theta_k}{\sum_{k=0}^n \theta_k} \quad (6.3.8)$$

Перейдем теперь к изучению процесса гибели и размножения с бесконечным числом состояний. Такой процесс уже не обязан всегда иметь стационарное распределение. Для этого параметры  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  должны удовлетворять некоторым условиям. Чтобы найти такие условия, предположим, что стационарное распределение существует. Тогда финальные вероятности  $p_k$  должны удовлетворять системе

$$\begin{aligned} 0 &= -\lambda_0 p_0 + \mu_1 p_1, \\ &\dots \dots \dots \\ 0 &= \lambda_{k-1} p_{k-1} - (\lambda_k + \mu_k) p_k + \mu_{k+1} p_{k+1}, \\ & \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Предположим для простоты, что  $\mu_k \neq 0$  при  $k > 0$ .

Решая, как показано выше, эту систему, мы получим

$$p_k = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} p_0 = \theta_k p_0.$$

Вероятности  $p_k$  должны в сумме давать единицу, поэтому

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k p_0 = 1.$$

Так как  $p_0 \neq 0$  (в противном случае и все  $p_k = 0$ ), то ряд  $\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty$ ,

и мы получаем первое условие, необходимое для существования стационарного распределения. Вывод второго условия потребует несколько больших усилий. Мы можем мыслить наш процесс как ступенчатую случайную функцию  $v(t)$ , которая в каждый момент  $t$  принимает значение  $k$ , равное состоянию процесса в этот момент.

Пусть в какой-то момент времени наш процесс находится в состоянии  $k$ . Случайное время, протекшее до момента первого прихода процесса в состояние  $l$ , обозначим через  $\tau_{kl}$ , а его среднее — через  $T_{kl}$ . Обозначим еще  $\tau_{0l} = \tau_l$ ,  $T_{0l} = T_l$ . Пусть в начальный момент процесс находился в состоянии 0. Чтобы найти  $T_n$ , заметим прежде всего, что

$$T_n = T_{0n} = T_{01} + T_{12} + \dots + T_{n-1,n}.$$

Для определения величины  $T_{k, k+1}$  рассмотрим процесс гибели и размножения с конечным числом состояний, равным  $k+1$ , у которого параметры  $\lambda_i$  и  $\mu_i$  при  $i \leq k$  совпадают с параметрами нашего процесса, а  $\lambda_{k+1} = 0$ . Случайные периоды, на которых процесс находится в состоянии  $(k+1)$ , чередуются с периодами, на которых процесс находится в состояниях, меньших  $(k+1)$ . В силу однородности процесса все первые периоды распределены одинаково по закону  $1 - e^{-\mu_{k+1}t}$ . Отсюда средняя длительность этого периода равна  $T^{(1)} = \frac{1}{\mu_{k+1}}$ . Все периоды, на которых процесс находится в состояниях, меньших  $(k+1)$ , исключая, конечно, начальный период, также распределены одинаково, и так как в начале этого периода процесс находится в состоянии  $k$ , а в конце периода приходит в состояние  $(k+1)$ , то средняя длительность периода равна  $T^{(2)} = T_{k, k+1}$ . Кроме того, в силу марковости процесса и первые и вторые периоды независимы. Вероятность пребывания процесса в состоянии  $(k+1)$  в стационарном режиме равна (см. главу 2, § 3)

$$\frac{T^{(1)}}{T^{(1)} + T^{(2)}}.$$

С другой стороны, эта вероятность равна  $\bar{p}_{k+1}$ , где  $\bar{p}_i$  — финальные вероятности вспомогательного процесса. Итак, мы получили равенство

$$\bar{p}_{k+1} = \frac{T^{(1)}}{T^{(1)} + T^{(2)}},$$

из которого без труда находим  $T^{(1)} = T_{k, k+1}$ ,

$$T_{k, k+1} = \frac{1 - \bar{p}_{k+1}}{\bar{p}_{k+1}} = \frac{\sum_{i=0}^k \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \frac{\sum_{i=0}^k p_i}{\lambda_k p_k}. \quad (6.3.9)$$

Отсюда искомое среднее время перехода из нулевого состояния в  $n$ -е равно

$$T_n = T_{0n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{i=0}^k \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{i=0}^k p_i}{\lambda_k p_k}. \quad (6.3.10)$$

Вернемся теперь к нашему процессу с бесконечным числом состояний. Последовательность  $T_n$  монотонно возрастает и, следовательно, либо стремится к бесконечности, либо имеет конечный предел.

Предположим, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = T_0 < \infty$ . Тогда из неравенства Чебышева следует, что

$$\mathbf{P}\{\tau_n < AT_0\} > 1 - \frac{T_n}{AT_0} \geq 1 - \frac{1}{A}.$$

Это неравенство означает, что процесс за конечное время с вероятностью единица уйдет в бесконечность. В этом случае нет смысла говорить о стационарном распределении, так как наш процесс обрывается. Поэтому вторым необходимым условием существования стационарного распределения будет условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = \infty.$$

Итак, для существования стационарного распределения необходимо выполнение условий

$$\left. \begin{array}{l} \text{(I)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty, \\ \text{(II)} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{i=0}^k \theta_i}{\lambda_k \theta_k} = \infty, \end{array} \right\} \quad (6.3.11)$$

где

$$\theta_n = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_n}, \quad \theta_0 = 1.$$

Можно доказать, что эти условия являются также и *достаточными* [6] для существования стационарного распределения. Заметим, что наиболее существенным из этих двух условий является первое и при выполнении этого условия второе практически почти всегда выполняется. Если стационарное распределение существует, то стационарные вероятности выражаются формулами

$$p_k = \frac{\theta_k}{\sum_{i=0}^{\infty} \theta_i}. \quad (6.3.12)$$

## § 6.4. Изучение нестационарного периода

1°. В предыдущем параграфе мы рассмотрели процесс гибели и размножения в стационарном режиме. Интересно, однако, исследовать наш процесс на начальном периоде времени, когда вероятности состояний существенно зависят от времени. Такое исследование позволит, во-первых, установить, насколько быстро вероятности  $p_k(t)$  стремятся к своим финальным значениям, и тем самым определить, начиная с какого момента процесс можно с достаточной точностью считать стационарным. Во-вторых, в приложениях к теории надежности нас часто интересует поведение процесса гибели и размножения только на начальном участке времени, на котором процесс заведомо не успевает войти в стационарный режим.

Рассмотрим сначала случай конечного числа состояний. Он описывается системой (6.3.1'). Чтобы найти решение этой системы в замкнутом виде, удобно использовать преобразование Лапласа. Введем функции

$$a_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_k(t) dt.$$

Умножив каждое уравнение (6.3.1') на  $e^{-st}$  и проинтегрировав его по  $t$ , получим алгебраическую систему

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + s) a_0(s) - \mu_1 a_1(s) &= 1, \\ -\lambda_{k-1} a_{k-1}(s) + (\lambda_k + \mu_k + s) a_k(s) - \mu_{k+1} a_{k+1}(s) &= 0, \\ k &= 1, 2, \dots, n-1, \\ -\lambda_{n-1} a_{n-1}(s) + (\mu_n + s) a_n(s) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1)$$

Мы, как и выше, предполагаем, что в начальный момент процесс находится в состоянии 0. Решая эту систему по правилу Крамера, найдем явное выражение для функций  $a_k(s)$ :

$$a_k(s) = \frac{\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)}, \quad (6.4.2)$$

где

$$\Delta_{n+1}(s) = \Delta(s, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda_0 + \mu_0 + s & -\mu_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_0 & \lambda_1 + \mu_1 + s & -\mu_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda_1 & \lambda_2 + \mu_2 + s & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -\lambda_{n-2} & \lambda_{n-1} + \mu_{n-1} + s & -\mu_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\lambda_{n-1} & \lambda_n + \mu_n + s & 0 \end{vmatrix}. \quad (6.4.3)$$

а

$$\Delta_{nk}(s) = \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1} \Delta(s, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n, \mu_{k+1}, \dots, \mu_n). \quad (6.4.4)$$

Если, пользуясь известными правилами, разложить определитель  $\Delta_{n+1}(s)$  по последнему столбцу и последней строке, то мы получим рекуррентное соотношение

$$\begin{aligned} \Delta(s, \lambda_0, \dots, \lambda_n, \mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) &= \\ &= (s + \lambda_n + \mu_n) \Delta(s, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-1}, \mu_0, \dots, \mu_{n-1}) - \\ &\quad - \mu_n \lambda_{n-1} \Delta(s, \lambda_0, \dots, \lambda_{n-2}, \mu_0, \dots, \mu_{n-2}), \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

или, короче,

$$\Delta_{n+1}(s) = (s + \lambda_n + \mu_n) \Delta_n(s) - \mu_n \lambda_{n-1} \Delta_{n-1}(s), \quad (6.4.6)$$

причем

$$\Delta_0(s) = 1, \quad \Delta_1(s) = s + \lambda_0 + \mu_0.$$

(Во избежание недоразумений заметим, что формулы (6.4.2) — (6.4.6) справедливы для любых  $\lambda_n$  и  $\mu_n$ , но в нашем случае  $\mu_0 = 0$  и  $\lambda_n = 0$ .)

Из рекуррентных соотношений (6.4.5) и (6.4.6) можно определить многочлены  $\Delta_{n+1}(s)$  и  $\Delta_{nk}(s)$  и, подставив их в равенство (6.4.2), получить представление  $a_k(s)$  в виде некоторой правильной рациональной дроби.

По известной формуле обращения вероятности  $p_k(t)$  выразятся контурным интегралом

$$p_k(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{st} \Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)} ds, \quad (6.4.7)$$

где контур  $s$  охватывает все нули знаменателя. Для вычисления этого интеграла необходимо знать корни многочлена  $\Delta_{n+1}(s)$ . Используя уравнение (6.4.6), можно показать, что корни этих многочленов обладают следующими свойствами [9]:

1. Если  $\lambda_k$  положительны, то все корни  $\Delta_k(s)$  различны и отрицательны.

2. Корни соседних многочленов  $\Delta_{k-1}(s)$  и  $\Delta_k(s)$  чередуются, т. е. между каждой парой корней многочлена  $\Delta_{k-1}(s)$  (в том числе и между нулем и наименьшим по модулю корнем), лежит один корень многочлена  $\Delta_k(s)$ .

3. Сумма корней  $\Delta_k(s)$  равна

$$-A_k = -(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{k-1} + \mu_0 + \mu_1 + \dots + \mu_{k-1}),$$

откуда следует, что наибольший по модулю корень лежит правее  $-A_k$ .

4. Если  $\lambda_k > 0$  при  $k < n$  и  $\lambda_n = 0$ , то все предыдущие свойства сохраняются, но один из корней равен нулю. (Свойства 1 и 2 доказываются в теории ортогональных многочленов.)

Перечисленные выше свойства позволяют вычислять корни многочлена  $\Delta_k(s)$ , если известны корни предыдущего многочлена. Действительно, пусть  $-\beta_1, -\beta_2, \dots, -\beta_{k-1}$  суть корни  $\Delta_{k-1}(s)$ . Тогда в каждом из интервалов

$$(-A_k, -\beta_{k-1}), (-\beta_{k-1}, -\beta_{k-2}), \dots, (-\beta_1, 0)$$

лежит по одному корню многочлена  $\Delta_k(s)$ . В этом случае корни легко вычисляются, например, методом «вилки», что особенно удобно делать с применением вычислительной техники.

Итак, пусть  $0, -\alpha_1, \dots, -\alpha_n$  — известные корни многочлена  $\Delta_{n+1}(s)$ . Тогда  $\Delta_{n+1}(s) = s(s + \alpha_1) \dots (s + \alpha_n)$  и мы можем разложить рациональную дробь  $\frac{\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)}$  на простейшие дроби

$$\frac{\Delta_{nk}(s)}{\Delta_{n+1}(s)} = \frac{A_{k0}}{s} + \sum_{l=1}^n \frac{A_{kl}}{s + \alpha_l}, \quad (6.4.8)$$

где

$$A_{ki} = \frac{\Delta_{nk}(-\alpha_i)}{\Delta'_{n+1}(-\alpha_i)}.$$

Подставляя это выражение в интеграл (6.4.7) и пользуясь известными формулами обращения, мы получим

$$p_k(t) = A_{k0} + \sum_{i=1}^n A_{ki} e^{-\alpha_i t}.$$

Эта формула и дает решение системы (6.4.2).

Так как  $\lim p_k(t) = p_k = A_{k0}$ , то равенство можно записать и так:

$$p_k(t) = p_k + \sum_{i=1}^n A_{ki} e^{-\alpha_i t}. \quad (6.4.9)$$

Оценивая сумму, стоящую в правой части этого равенства, мы можем оценить, насколько быстро стремятся вероятности к своим финальным значениям.

Отметим еще один чисто вычислительный момент. При малых  $t$  и  $k > 0$   $p_k(t)$  мала, а слагаемые в правой части (6.4.9) велики. Поэтому при вычислении вероятности  $p_k(t)$  с заданной относительной погрешностью слагаемые в правой части приходится вычислять с большим числом значащих цифр.

2°. В случае бесконечного числа состояний процесс описывается бесконечной системой дифференциальных уравнений (6.3.1). Решение этой системы в замкнутом виде получено лишь для нескольких частных случаев. Мы рассмотрим здесь два примера, которые интересны для теории надежности, и на них продемонстрируем наиболее эффективные методы решения бесконечных систем вида (6.3.1).

а)  $\lambda_n = \lambda$ ,  $\mu_n = \mu$ ,  $\lambda < \mu$ . Предположим, что в начальный момент процесс находится в нулевом состоянии, т. е.

$$p_0(0) = 1, \quad p_n(0) = 0 \quad \text{при } n > 0.$$

Для решения системы (6.3.1) используем преобразование Лапласа. Пусть

$$a_n(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_n(t) dt.$$

Тогда из (6.3.1) мы получим

$$\left. \begin{aligned} -1 &= -(\lambda + s) a_0(s) + \mu a_1(s), \\ \mu a_{n+1}(s) - (\lambda + \mu + s) a_n(s) + \lambda a_{n-1}(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.4.10)$$

при  $n > 0$ .



Как мы видим, последовательность  $a_n(s)$  удовлетворяет линейному однородному рекуррентному уравнению с постоянными коэффициентами. Решение этого уравнения имеет вид

$$a_n(s) = C_1 z_1^n + C_2 z_2^n,$$

где  $z_1$  и  $z_2$  — корни квадратного уравнения

$$\mu z^2 - (\lambda + \mu + s)z + \lambda = 0;$$

$$z_1 = \frac{\lambda + \mu + s}{2\mu} - \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu + s}{2\mu}\right)^2 - \lambda},$$

$$z_2 = \frac{\lambda + \mu + s}{2\mu} + \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu + s}{2\mu}\right)^2 - \lambda}.$$

Определим постоянные  $C_1$  и  $C_2$ .

Во-первых, из того, что  $p_n(t) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , следует, что  $a_n(s) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если  $s > 0$ . Но нетрудно проверить, что при  $s > 0$   $z_1 < 1$ , а  $z_2 > 1$ .

Отсюда  $C_2 = 0$ .

Далее,  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) = 1$  (так как соблюдается второе из условий (6.3.11)). Значит,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(s) = \frac{C_1}{1 - z_1} = \frac{1}{s},$$

откуда

$$C_1 = \frac{1 - z_1}{s}.$$

Итак,

$$a_n(s) = \frac{(1 - z_1)z_1^n}{s}.$$

По формуле обращения преобразования Лапласа искомые вероятности  $p_n(t)$  выразятся интегралом

$$p_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \frac{(1 - z_1)z_1^n}{s} ds, \quad a > 0. \quad (6.4.11)$$

Исходя из интеграла (6.4.11), можно выразить вероятности  $p_n(t)$  через бесселевы функции, но мы не будем этого делать. Вместо вывода громоздких и бесполезных формул для  $p_n(t)$  сделаем более полезную работу — оценим, насколько быстро приближаются вероятности  $p_n(t)$  к своим финальным значениям, которые, как нетрудно подсчитать, равны

$$p_n = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right). \quad (6.4.12)$$

Для этого в интеграле (6.4.11) переместим вертикальный контур  $(a - i\infty, a + i\infty)$  в левую полуплоскость. При этом выделится вычет в точке  $s=0$ , равный финальной вероятности  $p_n$ ,

$$p_n(t) = p_n + \frac{1}{2\pi i} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{st} \frac{(1-z_1)z_1^n}{s} ds, \quad a < 0.$$

Функция  $z_1 = z_1(s)$  регулярна и однолистка вне отрезка  $[-(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu})^2, -(\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2]$ , а в бесконечности стремится к нулю. Поэтому мы можем преобразовать вертикальный контур в замкнутый контур, идущий по верхней и нижней сторонам этого отрезка. Легко подсчитать, что на таком контуре

$$|z_1(s)| = \sqrt{\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Тогда обычная оценка интеграла по максимуму модуля дает

$$|p_n(t) - p_n| \leq \frac{2 \left( \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} + 1 \right)}{\pi \left( \sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - 1 \right)^2} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{\frac{n}{2}} e^{-(\sqrt{\mu} - \sqrt{\lambda})^2 t}. \quad (6.4.13)$$

Это неравенство позволяет довольно точно оценить скорость вхождения процесса в стационарный режим.

б) В качестве второго примера рассмотрим процесс, для которого

$$\lambda_n = \lambda, \quad \mu_n = n\mu.$$

Пусть, как и выше, в начальный момент процесс находился в состоянии 0, т. е.  $p_0(0) = 1$ ,  $p_n(0) = 0$  при  $n > 0$ . Система (6.4.1) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_0(t) &= -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ \dot{p}_n(t) &= \lambda p_{n-1}(t) - (\lambda + n\mu) p_n(t) + (n+1)\mu p_{n+1}(t), \\ & n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Для решения этой системы удобнее всего использовать метод производящих функций, который в применении к таким системам приводит обычно к некоторому линейному уравнению в частных производных. Пусть

$$P(t, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t) z^n.$$

Умножим  $n$ -е уравнение на  $z^n$  и просуммируем по всем  $n$ . Мы получим

$$\frac{\partial P(t, z)}{\partial t} + \mu(z-1) \frac{\partial P(t, z)}{\partial z} = \lambda(z-1) P(t, z). \quad (6.4.14)$$

Из теории известен способ решения этого уравнения. Составляем сопряженную с нашим уравнением систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dt}{1} = \frac{dz}{\mu(z-1)} = \frac{dP}{\lambda P(z-1)},$$

решение которой дает нам два интеграла

$$(z-1)e^{-\mu t} = C_1, \quad Pe^{-\frac{\lambda}{\mu}z} = C_2.$$

Тогда общее решение уравнения (6.4.14) имеет вид  $C_2 = f(C_1)$ , или

$$Pe^{-\frac{\lambda}{\mu}z} = f[(z-1)e^{-\mu t}], \quad (6.4.15)$$

где  $f(x)$  — произвольная функция. Для определения этой функции используем начальные условия

$$P(0, z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(0) z^n = 1.$$

Подставляя в (6.4.15)  $t=0$ , получим

$$e^{-\frac{\lambda}{\mu}z} = f(z-1), \quad \text{т. е.} \quad f(x) = e^{-\frac{\lambda}{\mu}(x+1)}.$$

Окончательно

$$P(t, z) = e^{\frac{\lambda}{\mu}(z-1)(1-e^{-\mu t})}.$$

Разложив эту функцию по степеням  $z$ , мы найдем искомые вероятности

$$p_n(t) = \frac{|a(t)|^n}{n!} e^{-a(t)}, \quad (6.4.16)$$

где  $a(t) = \frac{\lambda}{\mu}(1-e^{-\mu t})$ . При  $t \rightarrow \infty$   $a(t) \rightarrow \frac{\lambda}{\mu}$  и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p_n(t) = p_n = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n}{n!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}.$$

Из этих формул легко усматривается скорость вхождения процесса в стационарный режим.

3°. Задача о первом пересечении высокого уровня. В приложениях важное значение имеет следующая задача: для процесса гибели и размножения с конечным или счетным числом состояний требуется найти вероятность того, что в течение заданного времени  $t$  наш процесс ни разу не достигнет заданного уровня  $n$ , т. е. в любой момент  $t' < t$   $v(t') < n$ .

Дадим сначала точное решение этой задачи. Предположим ради простоты, что в начальный момент процесс находится в состоянии 0. Рассмотрим вспомогательный процесс гибели и размножения, который отличается от данного процесса только тем, что состояние  $m$  является для него поглощающим. Это значит, что, если первоначальный процесс характеризовался параметрами  $(\lambda_k, \mu_k)$ , то параметры вспомогательного процесса  $(\bar{\lambda}_k, \bar{\mu}_k)$  определяются так:

$$\bar{\lambda}_k = \lambda_k, \quad \bar{\mu}_k = \mu_k \quad \text{при} \quad k < m, \\ \bar{\lambda}_m = \bar{\mu}_m = 0.$$

До момента первого прихода в состояние  $m$  оба процесса ведут себя одинаково; но вспомогательный процесс, попав в состояние  $m$ , навсегда останется в нем. Поэтому вероятность того, что исходный процесс хотя бы раз до момента  $t$  побывает в состоянии  $m$ , равна вероятности того, что в момент  $t$  вспомогательный процесс находится в состоянии  $m$ . Но эта вероятность  $p_m(t)$  может быть найдена из системы уравнений

$$\begin{aligned} p_0'(t) &= -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t), \\ p_k'(t) &= \lambda_{k-1} p_{k-1}(t) - (\lambda_k + \mu_k) p_k(t) + \mu_{k+1} p_{k+1}(t), \\ &\quad k = 1, 2, \dots, m-1, \\ p_{m-1}'(t) &= \lambda_{m-2} p_{m-2}(t) - (\lambda_{m-1} + \mu_{m-1}) p_{m-1}(t), \\ p_m'(t) &= \lambda_{m-1} p_{m-1}(t). \end{aligned} \quad (6.4.17)$$

Используем, как и выше, преобразование Лапласа. Пусть

$$a_k(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} p_k(t) dt, \\ k = 0, 1, \dots, m.$$

Тогда из формулы (6.4.2) легко получаем

$$a_m(s) = \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}{s \Delta_m(s)},$$

где многочлены  $\Delta_k(s)$  удовлетворяют рекуррентному уравнению (6.4.6). Отсюда искомая вероятность

$$p_m(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{st} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}{s \Delta_m(s)} ds. \quad (6.4.18)$$

В § 6.3 мы рассматривали величины  $\tau_n$  — случайное время, в течение которого процесс переходит из состояния 0 в состояние  $n$ . Применительно к нашей задаче  $\tau_m$  — тот случайный момент, когда процесс первый раз приходит в состояние  $m$ . Отсюда следует, что

вероятность  $p_m(t) = \mathbf{P}\{\tau_m < t\}$  есть закон распределения величины  $\tau_m$ . Формула (6.4.18) дает точное решение нашей задачи, и при малых  $m$  ее можно использовать для вычисления вероятности  $p_m(t)$  так, как это делалось в начале параграфа. При больших  $m$  эта формула малоэффективна и поэтому желательно иметь простое, хотя и приближенное, выражение для нашей вероятности. Такое решение задачи разумно еще и потому, что процесс гибели и размножения в большинстве приложений сам является лишь грубой, приближенной, моделью реальных процессов. Задача о первом пересечении данного уровня ставится обычно либо для стационарных процессов, либо для процессов, которые быстро входят в стационарный режим. Пересечение данного уровня в реальных процессах означает некоторое нежелательное событие, катастрофу, и поэтому сам уровень выбирается достаточно «высоким». Это значит, что вероятность достичь или превзойти этот уровень в данный момент очень мала. Отсюда ясно, что приближенное решение нашей задачи должно заключаться в определении асимптотического поведения случайной величины  $\tau_m$  при  $m \rightarrow \infty$ . Грубые вероятностные соображения позволяют понять, каким должно быть асимптотическое распределение величины  $\tau_m$ . Если уровень  $m$  велик, то и величина  $\tau_m$  в среднем велика и можно считать, что наш процесс на рассматриваемом участке времени стационарный (предполагается, что стационарное распределение существует). Обозначим через  $P(t)$  вероятность того, что на участке длины  $t$  процесс ни разу не достигнет уровня  $m$ . В силу стационарности эта вероятность не зависит от положения участка. Рассмотрим два соседних участка времени длины  $t_1$  и  $t_2$ . Пусть  $A_1$  — событие, состоящее в том, что уровень  $m$  не будет достигнут на первом участке, а  $A_2$  — соответствующее событие для второго участка. Если уровень  $m$  очень высок, то, как подсказывает интуиция, события  $A_1$  и  $A_2$  практически независимы. Отсюда следует, что

$$P(t_1 + t_2) = \mathbf{P}\{A_1 A_2\} \approx \mathbf{P}\{A_1\} \mathbf{P}\{A_2\} = P(t_1) P(t_2),$$

или

$$P(t_1 + t_2) \approx P(t_1) P(t_2).$$

Из этого функционального уравнения следует (см. § 2.2), что

$$P(t) \approx e^{-\lambda t}.$$

Но по определению вероятности  $P(t)$

$$P(t) = 1 - p_m(t) = \mathbf{P}\{\tau_m > t\},$$

поэтому

$$\frac{1}{\lambda} = \mathbf{M}\tau_m = T_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^k \theta_l}{\lambda_k \theta_k}.$$

Следовательно,

$$P(t) \approx e^{-\frac{t}{T_m}}.$$

Итак, из наших грубых вероятностных соображений следует, что величина  $\tau_m$  при некоторых естественных условиях должна быть асимптотически распределена по показательному закону.

Для строгого доказательства этого факта [10] рассмотрим нормированную случайную величину

$$\xi_m = \frac{\tau_m}{T_m}.$$

Ее закон распределения равен

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \xi_m < x \} &= p_m(T_m x) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sx} \lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}{s \Delta_m \left( \frac{s}{T_m} \right)} ds = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{sx}}{s \bar{\Delta}_m \left( \frac{s}{T_m} \right)} ds, \end{aligned} \quad (6.4.19)$$

где  $\bar{\Delta}_m(s) = \frac{\Delta_m(s)}{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{m-1}}$ . Из этого равенства следует, что для того, чтобы величина  $\tau_m$  с ростом  $m$  асимптотически была распределена по показательному закону, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{P} \{ \xi_m < x \} = 1 - e^{-x},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \bar{\Delta}_m \left( \frac{s}{T_m} \right) = 1 + s \quad (6.4.20)$$

равномерно по  $s$  в любой конечной области. Как следует из (6.4.6), нормированные многочлены  $\bar{\Delta}_m(s)$  удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$\bar{\Delta}_{n+1}(s) = \left( 1 + \frac{\mu_n}{\lambda_n} + \frac{s}{\lambda_n} \right) \bar{\Delta}_n(s) - \frac{\mu_n}{\lambda_n} \bar{\Delta}_{n-1}(s), \quad (6.4.21)$$

$$n = 1, 2, \dots,$$

$$\bar{\Delta}_0(s) = 1, \quad \bar{\Delta}_1(s) = 1 + \frac{s}{\lambda_0}.$$

Запишем это соотношение в виде

$$[\bar{\Delta}_{n+1}(s) - \bar{\Delta}_n(s)] - \frac{\mu_n}{\lambda_n} [\bar{\Delta}_n(s) - \bar{\Delta}_{n-1}(s)] = \frac{s}{\lambda_n} \bar{\Delta}_n(s)$$

и разрешим его относительно разности  $\bar{\Delta}_{n+1}(s) - \bar{\Delta}_n(s)$ . После ряда выкладок мы получим

$$\bar{\Delta}_{n+1}(s) - \bar{\Delta}_n(s) = s \frac{\sum_{k=0}^n \bar{\Delta}_k(s) \theta_k}{\lambda_n \theta_n}. \quad (6.4.22)$$

Нетрудно показать из (6.4.21), что  $\Delta_n(0) = 1$ . Пусть

$$\bar{\Delta}_n(s) = 1 + c_{n1}s + c_{n2}s^2 + \dots + c_{nn}s^n.$$

Из неравенства (6.4.22) мы легко получаем рекуррентные соотношения для коэффициентов  $c_{nl}$

$$c_{n+1,l} - c_{nl} = \frac{\sum_{k=0}^n c_{kl} \theta_{l-k}}{\lambda_n \theta_n}. \quad (6.4.23)$$

Из него, в частности, следует, что первый коэффициент

$$c_{n1} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\sum_{l=0}^k \theta_l}{\lambda_k \theta_k} = T_n$$

равен среднему времени до первого прихода процесса в состояние  $n$ . Обозначим еще  $c_{n+1,l} - c_{nl} = b_{nl}$ . Из (6.4.23) мы видим, что все коэффициенты  $c_{nl}$  положительны и монотонно возрастают по номеру  $n$ . Следовательно,

$$c_{n+1,l} - c_{nl} \leq c_{n,l-1} (c_{n+1,1} - c_{n1}) \leq c_{n+1,l-1} c_{n+1,1} - c_{n,l-1} c_{n1}. \quad (6.4.24)$$

Суммируя эти неравенства по номеру  $n$ , мы получим

$$c_{nl} \leq c_{n,l-1} c_{n1}.$$

С другой стороны, используя неравенство (6.4.24), докажем по индукции, что

$$c_{nl} \leq \frac{c_{n1}^l}{l!}. \quad (6.4.25)$$

При  $l=1$  это неравенство тривиально. Пусть оно доказано для некоторого  $l$ . Тогда

$$\begin{aligned} c_{n+1,l+1} - c_{n,l+1} &\leq c_{nl} (c_{n+1,1} - c_{n1}) \leq \\ &\leq \frac{c_{n1}^l}{l!} (c_{n+1,1} - c_{n1}) \leq \frac{c_{n+1,1}^{l+1} - c_{n1}^{l+1}}{(l+1)!}. \end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что при  $b > a > 0$

$$a^l (b-a) \leq \int_a^b x^l dx = \frac{b^{l+1} - a^{l+1}}{l+1}.$$

Суммируя неравенство

$$c_{n+1,l+1} - c_{n,l+1} \leq \frac{c_{n+1,1}^{l+1} - c_{n1}^{l+1}}{(l+1)!}$$

по номеру  $n$ , получим

$$c_{n,l+1} \leq \frac{c_{n1}^{l+1}}{(l+1)!}.$$

Итак, неравенство (6.4.25) доказано.

Рассмотрим теперь многочлены

$$\bar{\Delta}_m \left( \frac{s}{T_m} \right) = \bar{\Delta}_m \left( \frac{s}{c_{m1}} \right) = 1 + s + a_{m2}s^2 + \dots + a_{mm}s^m.$$

Очевидно, что  $a_{ml} = \frac{c_{ml}}{c_{m1}^l}$ , и поэтому из неравенств (6.4.24) и (6.4.25) следуют неравенства

$$\left. \begin{aligned} a_{ml} &\leq a_{m,l-1}, \\ a_{ml} &\leq \frac{1}{l!}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.26)$$

Теперь мы в состоянии доказать теорему:

*Для того чтобы выполнялось условие (6.4.20), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m2} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_{m2}}{c_{m1}^2} = 0. \quad (6.4.27)$$

**Доказательство.** Необходимость условия (6.4.27) очевидна. Пусть это условие выполнено. Рассмотрим произвольную конечную область  $D$  в комплексной плоскости  $s$ , и пусть

$$R = \sup_D |s|.$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем  $l_0$  так, чтобы

$$\sum_{l=l_0+1}^{\infty} \frac{R^l}{l!} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Зафиксировав номер  $l_0$ , выберем число  $m_0$  так, чтобы при  $m > m_0$

$$a_{m2} < \frac{\varepsilon}{2l_0 R^{l_0}}.$$

Тогда, используя неравенства (6.4.26), мы получим, что при  $m > m_0$  и  $s \in D$

$$\begin{aligned} \left| \bar{\Delta}_m \left( \frac{s}{c_{m1}} \right) - 1 - s \right| &\leq \sum_{l=2}^{l_0} a_{ml} R^l + \sum_{l=s_0+1}^m a_{ml} R^l \leq \\ &\leq a_{m2} l_0 R^{l_0} + \sum_{l=l_0+1}^{\infty} \frac{R^l}{l!} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$



равномерно по  $s \in D$ , т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \Delta_m \left( \frac{s}{c_{m1}} \right) = 1 + s.$$

Теорема доказана. Тем самым мы доказали, что условие (6.4.27) необходимо и достаточно для того, чтобы случайная величина  $\xi_m = \frac{\tau_m}{c_{m1}} = \frac{\tau_m}{T_m}$  асимптотически была распределена по экспоненциальному закону. Докажем еще одно полезное предложение:

*Если процесс гибели и размножения с течением времени устанавливается, т. е. выполняются условия (6.3.11), то выполняется и условие (6.4.27), т. е. величина  $\tau_m$  асимптотически распределена по экспоненциальному закону.*

Доказательство. Пусть выполнены условия (6.3.11)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \theta_k < \infty, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sum_{l=0}^k \theta_l}{\lambda_k \theta_k} = \infty.$$

Из соотношений (6.4.23) следует, что

$$c_{m2} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^k c_{l1} \theta_l}{\lambda_k \theta_k} \leq \sum_{l=0}^{m-1} c_{l1} \theta_l \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\lambda_k \theta_k} < c_{m1} \sum_{l=0}^{m-1} c_{l1} \theta_l,$$

откуда

$$a_{m2} = \frac{c_{m2}}{c_{m1}^2} < \frac{\sum_{l=0}^{m-1} c_{l1} \theta_l}{c_{m1}}.$$

Возьмем произвольное  $\varepsilon > 0$  и выберем  $l_0$  так, чтобы  $\sum_{l=l_0+1}^{\infty} \theta_l < \frac{\varepsilon}{2}$ .

Затем при фиксированном  $l_0$  выберем  $m_0$  так, чтобы

$$\frac{c_{l_0 1}}{c_{m_0 1}} < \frac{\varepsilon}{2S}, \quad \text{где } S = \sum_{k=0}^{\infty} \theta_k.$$

Тогда при  $m > m_0$

$$a_{m2} < \sum_{l=0}^{l_0} \frac{c_{l1}}{c_{m1}} \theta_l + \sum_{l=l_0+1}^{m-1} \frac{c_{l1}}{c_{m1}} \theta_l < \frac{c_{l_0 1}}{c_{m1}} S + \sum_{l=l_0+1}^{\infty} \theta_l < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_{m2} = 0,$$

и утверждение доказано.

Итак, если процесс гибели и размножения с течением времени становится стационарным, то момент первого достижения высокого уровня распределен асимптотически по показательному закону

$$\mathbf{P} \{ \tau_m < t \} = p_m(t) \approx 1 - e^{-\frac{t}{T_m}}. \quad (6.4.28)$$

В заключение этого пункта сделаем несколько существенных замечаний.

1. При решении задачи о первом пересечении высокого уровня мы предполагали, что в начальный момент процесс находился в нулевом состоянии. Нетрудно показать, что асимптотическое поведение величины  $\tau_m$  при  $m \rightarrow \infty$  не зависит от начального состояния процесса. Действительно, пусть в начальный момент процесс находился в состоянии  $k$ . Случайное время, через которое процесс первый раз придет в состояние  $m$ , мы обозначили (§ 6.3) через  $\tau_{km}$ , а его среднее — через  $T_{km}$ . Но  $\tau_{km} = \tau_m - \tau_k$  и  $T_{km} = T_m - T_k$ . Нормированная величина

$$\xi_{km} = \frac{\tau_{km}}{T_{km}} = \frac{\tau_m}{T_m} \frac{1 - \frac{\tau_k}{\tau_m}}{1 - \frac{T_k}{T_m}}.$$

Первая дробь, как мы показали, имеет в пределе показательное распределение, а вторая дробь сходится по вероятности к единице. Следовательно, величина  $\xi_{km}$  имеет то же асимптотическое распределение, что и величина  $\xi_m$ .

2. Рассматривая асимптотическое поведение величины  $\tau_m$ , мы считали, что параметры  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  фиксированы, а уровень  $m \rightarrow \infty$ . В приложениях этой задачи к теории надежности мы часто имеем дело с тем случаем, когда параметры  $\lambda_k$  и  $\mu_k$  меняются вместе с уровнем  $m$ . Чтобы охватить более широкий класс случаев, встречающихся в теории надежности, расширим постановку задачи о пересечении высокого уровня. Пусть дан процесс гибели и размножения с конечным или счетным числом состояний. Предположим, что и параметры процесса  $\lambda_k$  и  $\mu_k$ , и число состояний  $n$ , и заданный уровень  $m$  зависят от некоторого направленного параметра  $\alpha$ :

$$\lambda_k = \lambda_k(\alpha), \quad \mu_k = \mu_k(\alpha), \quad n = n(\alpha), \quad m = m(\alpha).$$

Не ограничивая общности, можно считать, что  $\alpha \rightarrow 0$ . Требуется найти условия, при которых момент первого достижения уровня  $\tau_m$  распределен асимптотически по показательному закону, т. е.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \mathbf{P} \left\{ \frac{\tau_m}{T_m} > x \right\} = e^{-x}. \quad (6.4.29)$$

Если внимательно просмотреть проведенный выше вывод условия (6.4.27), то можно заметить, что этот вывод остается справедливым и для такой расширенной постановки. Иными словами, для справедливости предельного равенства (6.4.29) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{c_{m2}}{c_{m1}^2} = 0, \quad (6.4.30)$$

где

$$c_{m1} = T_m = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^k \theta_l}{\lambda_k \theta_k},$$

а

$$c_{m2} = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\sum_{l=0}^k c_{kl} \theta_l}{\lambda_k \theta_k}. \quad (6.4.31)$$

В каждой конкретной задаче условие (6.4.30) нетрудно проверить. Можно еще показать, что при этом условии относительная погрешность равенства (6.4.28) будет иметь порядок

$$a_{m2} = \frac{c_{m1}}{c_{m1}^2}.$$

Рассмотрим один важный пример.

В приложениях процесса гибели и размножения к теории надежности параметры  $\lambda_k$  равны интенсивностям отказов, а параметры  $\mu_k$  — интенсивностям восстановлений. Среднее время восстановления, как правило, во много раз меньше среднего времени безотказной работы. Это означает, что параметры  $\lambda_k$  во много раз меньше параметров  $\mu_k$ . В этих условиях разумно рассмотреть такую схему: *фиксирован уровень  $m$  и параметры  $\mu_k$ , а параметры  $\lambda_k(\alpha) = \lambda_k \alpha$ , где  $\alpha \rightarrow 0$* . Несложные подсчеты и оценки дают нам, что при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \theta_k &= \frac{\lambda_0 \lambda_1 \dots \lambda_{k-1}}{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k} \alpha^k = \theta_k^{(0)} \alpha^k, \\ c_{m1} &\sim \frac{1}{\lambda_{m-1} \theta_{m-1}^{(0)} \alpha^{m-1}}, \\ c_{m2} &\sim \frac{\sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{\mu_l}}{\lambda_{m-1} \theta_{m-1}^{(0)} \alpha^{m-2}}, \\ \frac{c_{m2}}{c_{m1}^2} &\sim \lambda_{m-1} \theta_{m-1}^{(0)} \alpha^m \sum_{l=1}^{m-1} \frac{1}{\mu_l}, \end{aligned}$$

откуда видно, что условие (6.4.30) выполняется и, следовательно, величина  $\tau_m$  распределена асимптотически по показательному закону. Заметим еще, что в этой постановке можно уточнить приближенную формулу (6.4.28). Оказывается, что при  $\alpha \rightarrow 0$  на порядок более точной формулой будет такая:

$$P\{\tau_m < t\} \approx 1 - e^{-\frac{t - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\mu_k}}{T_m - \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\mu_k}}}. \quad (6.4.32)$$

Это в свою очередь дает возможность оценить погрешность формулы (6.4.28). Как следует из (6.4.28) и (6.4.32), главный член относительной погрешности в формуле (6.4.28) равен

$$\frac{T_m - t}{T_m^2} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{\mu_k}. \quad (6.4.33)$$

3. Выше мы рассмотрели распределение времени до первого прихода в состояние  $m$ . Дальнейшее поведение процесса нас не интересовало. В теории надежности, где используется процесс гибели и размножения, часто возникает такая задача: *найти среднюю длительность тех участков, на которых процесс находится в состоянии, не меньшем  $m$* . При этом, естественно, предполагается, что процесс имеет стационарное распределение. Обозначим через  $T^{(1)}$  среднюю длину каждого участка, начиная со второго, на котором  $v(t) < m$ , а через  $T^{(2)}$  — среднюю длину каждого участка, на котором  $v(t) \geq m$ . Последовательность для этих участков, начиная со второго, образует то, что мы (см. § 2.3) назвали процессом восстановления с конечным временем восстановления. Тогда, как было показано,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P\{v(t) < m\} = \sum_{k=0}^{m-1} p_k = \frac{T^{(1)}}{T^{(1)} + T^{(2)}}. \quad (6.4.34)$$

С другой стороны,

$$T^{(1)} = T_{m-1, m} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} \theta_k}{\lambda_{m-1} \theta_{m-1}} = \frac{\sum_{k=0}^{m-1} p_k}{\lambda_{m-1} p_{m-1}}.$$

Отсюда и из (6.4.34) мы находим искомое среднее время

$$T^{(2)} = \frac{\sum_{k=m}^{\infty} p_k}{\lambda_{m-1} p_{m-1}}. \quad (6.4.35)$$

### § 6.5. Применение процесса гибели и размножения к резервированию с восстановлением

1°. Процесс гибели и размножения может быть применен для изучения резервных систем, в которых происходит восстановление отказавших элементов.

Пусть имеется система, в которой время безотказной работы каждого элемента распределено по показательному закону (рис. 6.5.1). Каждый элемент после отказа идет в ремонтное устройство, где восстанавливается, а после восстановления снова возвращается в систему. Предположим, что время восстановления также распределено по показательному закону. В силу экспоненциальности всех законов

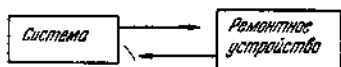


Рис. 6.5.1.

работа такой системы всегда описывается марковским процессом с конечным числом состояний. Число состояний в общем случае равно  $2^N$ , где  $N$  — число элементов системы, так как для описания работы системы мы должны в каждый момент знать множество неисправных элементов, а таких множеств  $2^N$ . Решение системы дифференциальных уравнений, а в стационарном случае системы алгебраических уравнений, сопряжено с большими трудностями вычислительного и алгебраического характера. Однако для ряда реальных систем число состояний может быть существенно сокращено. Если для каждого состояния системы суммарная интенсивность отказов и суммарная интенсивность восстановлений зависят не от множества неисправных в данный момент элементов, а только от их числа, то такая система описывается марковским процессом с числом состояний, равным  $(N+1)$ .

Пусть  $\lambda_k$  — суммарная интенсивность отказов, а  $\mu_k$  — суммарная интенсивность восстановления при условии, что в системе  $k$  неисправных элементов. Тогда за время  $\Delta t$  с вероятностью  $\lambda_k \Delta t + o(\Delta t)$  произойдет один отказ, т. е. система перейдет в состояние  $(k+1)$ , и с вероятностью  $\mu_k \Delta t + o(\Delta t)$  произойдет одно восстановление, т. е. система перейдет в состояние  $(k-1)$ . Но это означает, что наша система описывается процессом гибели и размножения.

Рассмотрим теперь конкретную систему такого рода (рис. 6.5.2). В системе имеется  $N = n + m + l + s$  одинаковых элементов (заметим, что под словом элемент мы можем понимать и элемент как неразложимую часть системы и часть системы, и вообще любое устройство). Время безотказной работы каждого элемента распределено по показательному закону,  $n$  элементов находятся в рабочем состоянии и имеют опасность отказа, равную  $\lambda$ ,  $m$  элементов находятся в нагруженном резерве с той же опас-

ностью отказа  $\lambda$ ,  $l$  элементов составляют облегченный резерв и имеют опасность отказа  $v$  и, наконец,  $s$  элементов находятся в ненагруженном резерве и в этом состоянии не отказывают. Каждый отказавший элемент мгновенно поступает в ремонтное устройство, которое состоит из  $r$  ремонтных единиц. Каждая ремонтная единица может одновременно ремонтировать (или восстанавливать) один элемент. Случайное время ремонта элемента распределено по показательному закону с параметром  $\mu$ . Если все ремонтные единицы

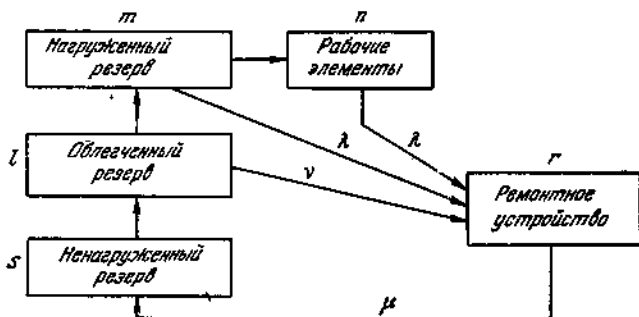


Рис. 6.5.2.

заняты, то отказавший элемент ставится в очередь. Каждый отказавший рабочий элемент мгновенно замещается элементом из нагруженного резерва, каждый отказавший или перешедший в рабочее состояние элемент из нагруженного резерва мгновенно заменяется элементом из облегченного резерва и, наконец, каждый отказавший или перешедший в нагруженный резерв элемент из облегченного резерва мгновенно заменяется элементом из ненагруженного резерва. Каждый восстановленный элемент поступает в ненагруженный резерв. Система работает исправно, если число исправных элементов не меньше  $n$ . Под *состоянием* системы мы будем понимать число неисправных в данный момент элементов. Ясно, что работа такой системы описывается процессом гибели и размножения, причем параметры процесса ( $\lambda_k$ ,  $\mu_k$ ) выражаются формулами

$$\lambda_k = \begin{cases} (n+m)\lambda + vl, & \text{если } 0 \leq k \leq s, \\ (n+m)\lambda + v(l+s-k), & \text{если } s < k \leq s+l, \\ (n+m+l+s-k)\lambda, & \text{если } l+s < k \leq N; \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{если } k \leq r, \\ r\mu, & \text{если } k > r. \end{cases} \quad (6.5.1)$$

Отметим еще один случай, который не укладывается в нашу схему. Число элементов в ненагруженном резерве может быть практически

неограниченно,  $s = \infty$ . Очевидно, что в этом случае не имеет смысла вводить нагруженный и облегченный резервы. Такая система описывается процессом гибели и размножения с бесконечным числом состояний, причем параметры этого процесса выражаются так:

$$\lambda_k = n\lambda, \quad \mu_k = \begin{cases} k\mu, & \text{если } k \leq r, \\ r\mu, & \text{если } k > r. \end{cases} \quad (6.5.2)$$

Наша схема включает в себя большое число частных случаев. Отметим те случаи, которые часто встречаются в практике надежности, и вычислим для них финальные вероятности.

а) Система состоит из  $n$  элементов. Из них  $(n-m)$  находятся в рабочем состоянии и  $m$  в нагруженном резерве. Число ремонтных единиц  $r \geq n$ .

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = k\mu, \\ p_k = C_n^k \frac{\lambda^k \mu^{n-k}}{(\lambda + \mu)^n}. \quad (6.5.3)$$

б) Система та же, но ремонтная единица одна,  $r = 1$ . Для этого случая

$$\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = \mu, \\ p_k = \frac{1}{(n-k)! \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{n-k}} \cdot \sum_{i=0}^n \frac{1}{i!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i. \quad (6.5.4)$$

в) В системе  $n$  рабочих элементов и неограниченный ненагруженный резерв. Число ремонтных единиц также неограниченно. Здесь

$$\lambda_k = n\lambda, \quad \mu_k = k\mu, \\ p_k = \frac{\left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k}{k!} e^{-\frac{n\lambda}{\mu}}. \quad (6.5.5)$$

г) Система та же, но ремонтная единица одна,  $r = 1$ . Для такой системы

$$\lambda_k = n\lambda, \quad \mu_k = \mu.$$

Здесь стационарное распределение существует при условии  $n\lambda < \mu$ , и в этом случае финальные вероятности выражаются формулами

$$p_k = \left(\frac{n\lambda}{\mu}\right)^k \left(1 - \frac{n\lambda}{\mu}\right). \quad (6.5.6)$$

2°. Параметры надежности резервных систем с восстановлением в зависимости от ее структуры и характера выполняемых ею функций может оцениваться разными параметрами. Рассмотрим основные параметры надежности такой системы. Ради конкретности мы будем все делать для рассмотренной выше системы с параметрами

$$(n, m, l, s, r, \lambda, \nu, \mu).$$

Вероятность безотказной работы в течение времени  $t$ . Система будет работать безотказно до момента  $t$ , если ни разу до этого момента число отказавших элементов не превысит  $N-n$ , т. е.  $v(t') \leq N-n$  при  $t' < t$ . Мы предполагаем, что в начальный момент все элементы системы исправны, т. е.  $v(0) = 0$ .

Следовательно, вероятность безотказной работы системы равна

$$p(t) = 1 - p_{N-n+1}(t),$$

где  $p_{N-n+1}(t)$  выражается точной формулой (6.4.18). Если уровень  $N-n+1$  «высок», т. е. выполняется условие  $a_{N-n+1,2} \ll 1$  (см. (6.4.27)), то вероятность безотказной работы выражается приближенной формулой (6.4.28)

$$p(t) \approx e^{-\frac{t}{T_{N-n+1}}}. \quad (6.5.7)$$

Рассмотрим конкретные примеры.

а)  $\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = k\mu.$

Для этого случая отказ системы наступает, когда число отказавших элементов становится равным  $(m+1)$ . Среднее время безотказной работы системы равно

$$T_{m+1} = \sum_{k=0}^m \frac{\sum_{l=0}^k C_n^l p^l q^{n-l}}{(n-k)\lambda C_n^k p^k q^{n-k}},$$

где

$$p = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}, \quad q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Можно преобразовать эту сумму к более простому виду

$$T_{m+1} = \frac{\sum_{l=0}^m \left[ C_n^{m-l} \left( \frac{\lambda}{\mu} \right)^{l+1} \frac{1}{l+1} + \frac{1}{m+1-l} \right]}{(\lambda + \mu) C_n^{m+1}}. \quad (6.5.8)$$



В частности, если  $m = n - 1$ , т. е. имеется один рабочий элемент, то

$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{\left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)^k}{(\lambda + \mu)k}. \quad (6.5.9)$$

Можно показать, что приближенная формула (6.5.7) справедлива, если

$$\frac{m+1-np}{\sqrt{npq}} \gg 1.$$

б)  $\lambda_k = (n-k)\lambda, \quad \mu_k = \mu.$

Отказ системы, как и в первом примере, наступает, когда система приходит в состояние  $(m+1)$ . Среднее время безотказной работы выражается формулой

$$T_{m+1} = \sum_{k=n-m}^n \sum_{l=k}^n \frac{(k-1)!}{\lambda l!} \left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^{l-k}. \quad (6.5.10)$$

Приближенная формула (6.5.7) имеет место, например, если  $\lambda$  и  $\mu$  фиксированы, а  $m$  велико.

Коэффициент готовности системы. Пусть  $p(t)$  — вероятность того, что в момент  $t$  система исправна. Назовем коэффициентом готовности системы предельное значение этой вероятности

$$k_r = \lim_{t \rightarrow \infty} p(t).$$

Легко видеть, что для нашей системы

$$k_r = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{v(t) < N - n^* + 1\} = \sum_{k=0}^{N-n} p_k. \quad (6.5.11)$$

Как уже отмечалось выше, коэффициент готовности равен средней доле времени, в течение которого система находится в исправном состоянии. В некоторых случаях знания коэффициента готовности недостаточно для оценки надежности системы — нужно знать еще и среднюю длительность участков исправного и неисправного состояний. Средняя длительность исправного состояния системы (исключая начальный период) равна

$$T^{(1)} = T_{N-n, N-n+1} = \frac{\sum_{k=0}^{N-n} p_k}{\lambda_{N-n} p_{N-n}}, \quad (6.5.12)$$

в среднем время неисправного состояния системы по формуле (6.4.35) равно

$$T^{(2)} = \frac{\sum_{k=N-n+1}^N p_k}{\lambda_{N-n} \rho_{N-n}}. \quad (6.5.13)$$

Основные характеристики ремонтоспособности системы. Как мы уже говорили, каждый отказавший элемент идет в ремонтное устройство, состоящее из  $r$  единиц. Если все ремонтные единицы заняты восстановлением, то элемент становится в очередь. Качество ремонтного устройства может быть охарактеризовано двумя параметрами:

$k'$  — среднее число элементов, стоящих в очереди,  
 $k''$  — среднее число занятых ремонтных единиц.

Естественно, что эти характеристики определяются для стационарного режима и не зависят от времени. Нетрудно выразить эти числа через финальные вероятности. Пусть, как и выше,  $v(t)$  — число неисправных элементов в момент  $t$ . Тогда длина очереди в этот момент равна нулю, если  $v(t) \leq r$ , и равна  $v(t) - r$ , если  $v(t) > r$ . Средняя длина очереди в момент  $t$  выразится так:

$$\sum_{k=r+1}^N (k-r) p_k(t).$$

Тогда в стационарном режиме

$$k' = \sum_{k=r+1}^N (k-r) p_k. \quad (6.5.14)$$

Совершенно аналогично находится второй параметр

$$k'' = \sum_{k=0}^r k p_k + r \sum_{k=r+1}^N p_k. \quad (6.5.15)$$

Можно подойти к оценке ремонтоспособности и вообще к оценке качества нашей системы по-другому. Каждый элемент в процессе работы системы многократно проходит цикл

*работа — ожидание ремонта — ремонт — резерв.*

Пусть  $t_1$  — среднее время пребывания элемента в рабочем состоянии,  $t_2$  — среднее время ожидания ремонта,  $t_3$  — среднее время ремонта и  $t_4$  — среднее время пребывания в резерве.

Обозначим  $t_0 = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$ . Тогда отношения

$$k_1 = \frac{t_1}{t_0}, \quad k_2 = \frac{t_2}{t_0}, \quad k_3 = \frac{t_3}{t_0} \quad \text{и} \quad k_4 = \frac{t_4}{t_0}$$

дадут нам соответственно среднюю долю времени, которое элемент пребывает в том или ином состоянии. Ясно, что в силу равноправия

всех элементов эти коэффициенты не зависят от номера рассматриваемого элемента.

Введенные так коэффициенты достаточно хорошо и полно определяют качество нашей резервной системы с восстановлением. Например, большое значение коэффициента  $k_3$  указывает на то, что ремонт идет медленно, большое значение  $k_2$  говорит о том, что мало число ремонтных единиц, а большое число коэффициента  $k_4$  свидетельствует о том, что в системе неоправданно большой резерв.

Выразим наши коэффициенты через финальные вероятности. Соответственно четырем состояниям элемента—работа, ожидание ремонта, ремонт, резерв—введем четыре единичные функции  $e_k^{(i)}(t)$ ,  $i=1, 2, 3, 4$ .  $e_k^{(i)}(t)$  равна единице, если  $k$ -й элемент в момент  $t$  находится в  $i$ -м состоянии, и равна нулю в противоположном случае. В силу эргодичности нашей системы (см. § 6.2)

$$k_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k^{(i)}(t) dt.$$

Пусть

$$v_i(t) = \sum_{k=1}^N e_k^{(i)}(t)$$

— число элементов, находящихся в момент  $t$  в  $i$ -м состоянии. Так как все элементы равноправны, мы можем написать

$$k_i = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T e_k^{(i)}(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{NT} \int_0^T v_i(t) dt = \frac{1}{N} \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{M} v_i(t). \quad (6.5.16)$$

Но легко видеть, что  $\mathbf{M}v_1(t)$ —среднее число элементов, находящихся в рабочем состоянии,  $\mathbf{M}v_2(t)$ —среднее число элементов, находящихся в ожидании ремонта,  $\mathbf{M}v_3(t)$ —среднее число элементов, находящихся в ремонте, а  $\mathbf{M}v_4(t)$ —среднее число элементов, находящихся в резерве.

Далее

$$v_1(t) = \begin{cases} n, & \text{если } v(t) \leq N-n, \\ N-v(t), & \text{если } v(t) > N-n, \end{cases}$$

$$v_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } v(t) \leq r, \\ v(t)-r, & \text{если } v(t) > r, \end{cases}$$

$$v_3(t) = \begin{cases} v(t), & \text{если } v(t) \leq r, \\ r, & \text{если } v(t) > r, \end{cases}$$

$$v_4(t) = \begin{cases} N-n-v(t), & \text{если } v(t) < N-n, \\ 0, & \text{если } v(t) \geq N-n. \end{cases}$$

Отсюда легко получаются окончательные формулы для наших коэффициентов:

$$k_1 = \frac{n}{N} \sum_{k=0}^{N-n} p_k + \sum_{k=N-n+1}^N \left(1 - \frac{k}{N}\right) p_k, \quad (6.5.17)$$

$$k_2 = \frac{1}{N} \sum_{k=r+1}^N (k-r) p_k, \quad (6.5.18)$$

$$k_3 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^r k p_k + \frac{r}{N} \sum_{k=r+1}^N p_k, \quad (6.5.19)$$

$$k_4 = \sum_{k=0}^{N-n} \left(1 - \frac{n+k}{N}\right) p_k. \quad (6.5.20)$$

Заметим в заключение, что введенные нами характеристики не дают, конечно, полного описания нашей системы — для разных систем и в разных условиях возможны и другие характеристики. Нам важно было показать, с одной стороны, что все такие характеристики всегда можно выразить через финальные вероятности, и, с другой стороны, мы хотели продемонстрировать те методы, которыми наиболее удобно вычислять эти характеристики.

---

## ГЛАВА 7

# СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА И НАДЕЖНОСТИ МАССОВОЙ ПРОДУКЦИИ

### § 7.1. Вводные понятия

Контрольная операция—основа статистического контроля. Настоящая глава посвящена систематическому изложению вопросов, связанных с планированием приемочного контроля главным образом по качественному признаку (годен—негоден). Задачи статистического контроля теснейшим образом связаны с задачами обеспечения надежности. Все зависит от конкретного вида контрольной операции. Если при контрольной операции выявляется возможность появления отказа, то статистический контроль является в то же время и контролем надежности. Но, вообще говоря, задачи статистического контроля шире. Например, контроль по внешнему виду прямо не связан с контролем надежности. Появление в книге по надежности специальной главы, посвященной вопросам статистического контроля, объясняется тем, что правильно организованный статистический контроль является действенным средством повышения надежности изделий.

В настоящем параграфе рассматриваются вопросы, связанные с задачами статистического контроля на производстве. Вводится понятие о нормальном ходе производства и об априорном распределении числа дефектных изделий. Даны определения типов планов приемочного контроля и их оперативной характеристики. Приведены примеры возможных нарушений при практическом использовании планов приемочного контроля. В § 7.2 исследуются различные показатели планов приемочного контроля, а в § 7.3 приводится пример стандарта, основанного на предельном выходном качестве, и дан обзор широко используемых стандартов планов приемочного контроля. Экономический подход, основы которого были предложены А. Н. Колмогоровым, излагается в § 7.4. Работа по вычислению таблиц к этому стандарту еще не закончена, поэтому в книге приведены таблицы планов только типа однократной выборки. Формулы для последующей оценки показателей эффективности

применяемых планов контроля даны в § 7.5. Случай планов типа однократной выборки исследовался в работах Колмогорова [1], Сираждинова и Эйдельманта [2]. Несколько в стороне стоит материал § 7.6, посвященного вопросам текущего контроля по количественному признаку. Здесь мы ограничиваемся главным образом постановкой задач, которые необходимо исследовать для правильной организации текущего контроля по количественному признаку. Организация текущего контроля является важной частью общей программы организации статистического контроля на предприятии.

Производство элементов (особенно радиоэлектроники) в настоящее время обеспечивается сложными технологическими процессами, включающими в себя десятки, а иногда и до сотни различных операций. На качество и надежность выпускаемых элементов влияют многие факторы. Поставить все факторы под контроль не представляется возможным. В итоге даже два выпущенных друг за другом элемента могут резко различаться по своим свойствам, хотя при этом все основные условия технологических режимов будут соблюдены. Если же вдобавок произошли серьезные отклонения от нормального хода производства, то засоренность продукции негодными, недоброкачественными элементами может резко возрастать. Выпуск недоброкачественных элементов связан с ущербом двойного рода. Во-первых, зря тратятся труд и материалы на выпуск негодной продукции, во-вторых, использование негодной продукции может явиться причиной ущерба в результате аварий и остановок оборудования для восстановления.

Как же может произойти, что некачественная и ненадежная продукция будет выпущена предприятием и затем использована потребителем? Дело в том, что, во-первых, многие свойства элементов, составляющие его качество, либо очень трудно проверить в заводских условиях, либо просто невозможно проверить в результате разрушительного характера испытаний (классическим примером может служить проверка взрывателей). Во-вторых, недоброкачественность элементов может заключаться в том, что параметры, характеризующие их работу, нестабильны. Во время проверки их значения вполне приемлемы для потребителя, но затем, в результате хранения и небольшого времени эксплуатации, недопустимо изменяются. Проведение контрольной операции (КО) по определению степени пригодности сырья, полуфабриката или готового элемента часто является весьма сложным делом, требующим предварительных специальных исследований по методике испытаний и разработки специальной испытательной аппаратуры. Представим себе технологический процесс как цепочку элементарных технологических операций, которые последовательно проходят полуфабрикаты до превращения в готовое изделие-элемент (рис. 7.1.1). Отдел технического контроля (ОТК) в результате предварительных исследований

должен решить, где целесообразно поставить контрольные посты (КП), на которых будет проверяться качество продукции, и какие параметры при этом необходимо замерять. Как правило, такие КП ставятся в самом начале технологического процесса для проверки качества исходного сырья (входной контроль), а также в самом конце для проверки качества и надежности готовых изделий (приемочный контроль). КП ставятся также после наиболее ответственных и наиболее тяжело поддающихся регулировке технологических операций для проверки нормального хода производства на этих операциях. Такой контроль называется текущим.

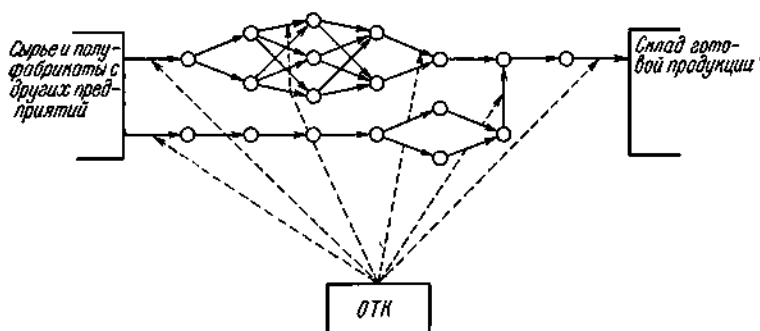


Рис. 7.1.1.

Степень жесткости контроля на КП в конечном итоге преследует одну цель: готовая продукция должна состоять из пригодных для потребителя элементов. Введение контроля, с одной стороны, приводит к повышению себестоимости продукции, с другой — к снижению себестоимости, так как уменьшаются затраты на производство некачественных изделий. Влияние введения контроля на повышение себестоимости учесть сравнительно просто. Значительно сложнее произвести учет выигрыша от введения контроля. При этом выигрыш перекроет расходы на контроль только при условии научной обоснованности такого контроля.

Требования к контролю со стороны производителя и потребителя противоречивы. Для предприятия контроль представляется лишней обузой, связанной с непроизводительными расходами, из чего следует, что контрольных постов должно быть меньше, объем работы на них также должен быть минимальным; потребителя, наоборот, интересует самое высокое качество используемых элементов, и он заинтересован в жестком контроле (при этом, конечно, прежде всего в самом жестком выходном — приемочном контроле). Иногда потребитель даже, не довольствуясь дан-

ными ОТК, еще раз проверяет готовую продукцию. Таким образом, степень жесткости и объем контроля в конечном итоге являются результатом спора о допустимом качестве выпускаемых изделий. На КП определено, какие параметры изделий (элементов или полуфабрикатов) надо измерять. Степень пригодности изделий к дальнейшему использованию можно определять различными способами. Можно регистрировать точные численные значения параметров (контроль по количественному признаку), можно отмечать лишь категории, классы, которым принадлежит проверяемое изделие. Наконец, можно принимать одно из двух решений: пригодно изделие для дальнейшего использования или нет. Если изделие непригодно, то оно объявляется дефектным. Такой контроль называется качественным. В настоящей главе мы ограничимся в основном случае качественного контроля.

Само понятие дефектности изделия самым существенным образом зависит от вида изделия и условий его использования. Очень часто дефектность определяется как выход за пределы допусков хотя бы одного из измеряемых параметров. Например, если сопротивление промаркировано на  $10k\Omega \pm 2\%$ , то если фактическое значение омического сопротивления выйдет за указанные пределы и будет равным, например,  $10,3k\Omega$ , то это сопротивление считается дефектным. Однако если допуск был определен в  $\pm 5\%$ , то это же сопротивление считалось бы годным. В практике могут встречаться такие случаи, когда одно и то же изделие при последовательных измерениях оказывается то годным, то дефектным. Примером могут служить измерения обратного тока сетки после испытания ламп на вибрационных стендах. Проводя такие испытания последовательно одно за другим и регистрируя обратный ток, одну и ту же лампу приходится то считать годной, то браковать как дефектную по причине недопустимо большого обратного тока. Контроль по качественному признаку обладает рядом преимуществ по сравнению с контролем по количественным признакам. Во-первых, он проще как по объему вычислений, так и по методам проверки. Можно заготовить простые шаблоны, или автоматические измерительные устройства, которые будут разбраковывать изделия на годные и дефектные. Во-вторых, методика, основанная на качественном контроле, не зависит от вида распределений измеряемых параметров и поэтому является более универсальной, тогда как в большинстве случаев при контроле по количественному признаку предполагается, что измеряемые параметры имеют нормальное распределение (см. W. Allen Wallis, *Techniques of Statistical Analysis*, 1947). Однако следует отметить, что при контроле по качественному признаку используется лишь малая часть информации, содержащейся в наблюдениях, что приводит к необходимости проведения большого количества



измерений. Сама операция контроля может носить двойкий характер. В одних случаях она не наносит никакого вреда изделиям, т. е. изделие, признанное в результате контроля годным, остается годным и после контроля. В других случаях операция проверки связана с изменением качества, а иногда даже и разрушением проверяемых изделий. Испытания на прочность и надежность, как правило, носят разрушительный характер. Итак, в первом приближении контроль может быть *разрушительным* или *неразрушительным*.

Поскольку в теории надежности особое значение имеет проверка стабильности параметров в зависимости от различных внешних условий, контроль обычно является разрушительным или, во всяком случае, изменяющим качество изделий. Поэтому представляет первостепенный интерес разработка таких методов контроля по косвенным признакам без разрушения изделий, чтобы по их результатам *можно было судить о качестве изделий по параметрам, требующим для своей оценки разрушительного контроля*.

Испытания по количеству проверяемых параметров могут резко отличаться друг от друга. Время от времени проводятся также испытания по расширенной программе, включая различные климатические условия, вибрацию, удары и т. п. Испытания такого рода носят название *периодических*.

В итоге проведения операции контроля мы должны выяснить, пригодно или же дефектно проверяемое изделие. Иногда встречаются такие случаи (примером могут служить замеры обратного тока сетки, о которых говорилось выше), когда мы лишь с определенной вероятностью можем определить дефектность проверяемого изделия. Ниже будут рассматриваться только случаи, когда разделение изделий на годные и дефектные производится без ошибок. Если контрольная операция неразрушительная и стоимость ее невелика, то в этих условиях очень часто применяется *сплошной* контроль. При сплошном контроле проверяются все изделия. Значительно чаще встречается такое положение, когда либо велики общие расходы, связанные с контролем, либо контроль носит разрушительный характер. В этих случаях контрольную операцию проходят только некоторые изделия, отбираемые специальным образом. Такой контроль носит название *выборочного*. При расстановке КП (см. рис. 7.1.1) часть из них проводит сплошной контроль, а часть — выборочный. Если общей целью введения контроля является снижение доли дефектных изделий в готовой продукции, то на каждом из контрольных постов для этого принимаются различные решения. На внутренних КП проводится текущий контроль, по результатам которого принимаются решения о подналадке оборудования. На входном и выходном КП организуется приемочный контроль. Здесь необходимо принимать решения о ка-

честве массивов продукции — партий. Если среди изделий, составляющих партию, много дефектных, то такая партия должна подвергаться либо сплошной разбраковке, либо отвергаться как негодная. Последнее решение принимается в тех случаях, когда сплошная проверка либо слишком дорога, либо контроль носит разрушительный характер. Чтобы выяснить степень засоренности партии дефектными изделиями, нет необходимости проводить сплошную проверку всех изделий. Достаточно проверить только часть партии, а уже затем по результатам этой частичной проверки решить, что сделать с остальными изделиями.

По своим целям контроль может быть *«очищающим»* или *«предупредительным»*. Это деление несколько условно. Очищающий контроль применяется тогда, когда он является неразрушительным и когда сравнительно часто на контроль поступают партии, сильно засоренные дефектными изделиями. Браковка партии по результатам выборочного контроля означает проверку оставшейся части партии с устранением всех дефектных изделий и их последующей заменой на годные из числа имеющихся на предприятии. При очищающем контроле проверяется значительная доля всех предъявленных изделий. Если же производство хорошо отлажено и почти все партии содержат низкий процент дефектных изделий, вполне удовлетворяющих потребителя, то приемочный контроль должен носить предупредительный характер. Это означает, что по результатам контроля решение о браковке будет приниматься для партий, содержащих намного больше дефектных изделий, чем это бывает обычно. Если приемочный контроль является разрушительным, то он может носить только предупредительный характер. Действительно, в случае разрушительного контроля мы не можем уменьшить (в среднем) долю засоренности партии дефектными изделиями, так как, определив, годно или дефектно изделие, мы разрушаем его. Однако по результатам правильно организованного выборочного контроля, проверив только часть партии, мы можем с большой степенью достоверности предугадать, содержит данная партия небольшое количество дефектных изделий или доля дефектных изделий велика.

Нормальность хода производства. Одним из важных понятий, которое может быть существенным образом использовано для правильной организации приемочного контроля, является понятие *засоренности* дефектными изделиями при нормальном ходе производства. Под *нормальным* ходом производства понимается такое его состояние, когда основные требования технологии соблюдены. Засоренность дефектными изделиями при нормальном ходе производства невелика, но она резко возрастает, если имеют место существенные нарушения технологии. На рис. 7.1.2 показаны результаты сплошной разбраковки 108 партий, каждая из которых

содержала по 1000 элементов. По горизонтали каждый столбец черточек соответствует числу  $d(N)$  дефектных изделий, обнаруженных в партии. Проверив партию и обнаружив в партии  $d(N)$  дефектных изделий, мы в столбце со значением  $d(N)$  ставим черточку. Таким образом, наличие четырех черточек в столбце с  $d(N)=0$  означает, что из 108 проверенных партий только в четырех не было обнаружено дефектных изделий. Предположим, что для каждой из этих 108 партий известно, выпущена она при нормальном ходе или где-то имели место разладки. Пусть при этом оказалось, что партии, содержащие до 8 дефектных изделий, выпущены при

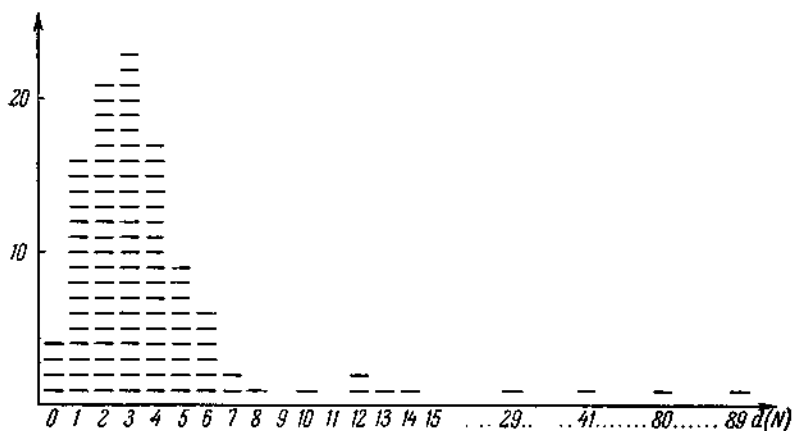


Рис. 7.1.2.

нормальном ходе производства, партии, содержащие 10, 12, 13, 14, — при наличии незначительных отклонений технологических режимов, а партии с  $d(N)=29, 41, 80, 89$  выпущены при серьезных нарушениях технологического режима. Из рис. 7.1.2 видно, что при условии нормального хода производства число  $d(N)$  дефектных изделий в партии, состоящей из  $N$  элементов, можно считать случайной величиной, имеющей вполне определенное распределение. Вид этого распределения  $F_n(D) = \mathbf{P}\{d(N) < D\}$  можно найти только в результате специальных исследований. В ряде случаев в качестве первого приближения можно использовать биномиальное или пуассоновское распределение. Точно биномиальное распределение  $d(N)$  будет в том случае, когда каждый элемент может оказаться дефектным с одной и той же вероятностью. Распределение  $F_n(D)$  называется *априорным* распределением для числа дефектных изделий в партии, выпущенной при нормальном ходе производства. Представляется весьма сомнительным, что можно

определить какое-то фиксированное распределение  $F_p(D)$  для числа дефектных изделий в партии в том случае, когда имеются разладки.

Предположим на время, что такое распределение  $F_p(D)$  существует и что с вероятностью  $p$ , близкой к единице, сохраняются все основные условия, определяющие нормальность хода производства, а с вероятностью  $q=1-p$  наступает разладка. В этом случае априорное распределение  $F(D)$  для числа  $D$  дефектных изделий в партии определяется по формуле

$$F(D) = pF_n(D) + qF_p(D),$$

т. е. является суперпозицией двух распределений. Если распределения  $F_n(D)$  и  $F_p(D)$  таковы, что  $F_n(D)$  уже близко к 1, тогда как  $F_p(D)$  еще мало, то задача организации приемочного контроля заключается в следующем. Надо так организовать контроль, чтобы большинство партий, выпущенных при нормальном ходе производства, принималось, тогда как большинство партий, выпущенных при разлаженном ходе производства, браковалось.

Для краткости назовем это свойством разделимости. При организации контроля, обладающего свойством разделимости, можно исходить из конкретного вида распределения  $F_n(D)$ , однако это свойство разделимости должно сохраняться по отношению к различным распределениям  $F_p(D)$ . Требование нечувствительности к виду  $F_p(D)$  объясняется сильной зависимостью  $F_p(D)$  от существа причины, вызвавшей разладку.

Задание априорного распределения  $F(D)$  часто является наиболее слабым местом планов, основанных на экономических соображениях. Вид априорного распределения существенным образом влияет на эффективность использования плана контроля. А. Н. Колмогоров предложил авторам следующий пример. Пусть проводится выборочный контроль, при котором от каждой партии отбирается некоторое количество изделий для проверки. Если в выборке будет обнаружено хотя бы одно дефектное изделие, то партия бракуется. Если дефектные изделия в выборке не содержатся, то партия принимается. На первый взгляд кажется естественным, что такой контроль никогда не может ухудшить качества принимаемой продукции. Однако предположим, что априорное распределение  $F(D)$  таково, что в каждой из партий, предъявляемых на контроль, либо все изделия годные, либо дефектно только одно изделие. При таком априорном распределении будут браковаться партии, в выборках из которых выявлено одно возможное дефектное изделие. Ясно, что качество продукции, принятой при использовании плана статистического контроля, будет хуже, чем без контроля. Однако при других априорных распределениях тот же самый план контроля может оказаться вполне эффективным.

Для организации приемочного выборочного контроля надо задать систему правил—план контроля, в котором указывается, как надо отбирать изделия для проверки, после какого количества проверенных изделий принимать решение о браковке, приемке партий в целом или о дальнейшем продолжении контроля. Наибольшее распространение получили три типа планов выборочного контроля по качественному принципу.

I. Планы типа однократной выборки. Из партии объема  $N$  отбираются случайным образом  $n$  ( $n \leq N$ ) элементов, которые подвергаются проверке. Если число обнаруженных дефектных изделий среди  $n$  элементов равно  $d(n) \leq c$ , где  $c$ —целое число, называемое *приемочным числом*, то партия принимается. Если же  $d(n) > c$ , то партия бракуется.

II. Планы типа двукратной выборки. Из партии объема  $N$  случайным образом отбирается  $n_1$  элементов (первая выборка), если число обнаруженных дефектных изделий  $d(n_1) \leq c$ , то партия принимается, а если  $d(n_1) > c_2 > c_1$ , то бракуется, если же  $c_1 < d(n_1) \leq c_2$ , то берется вторая выборка из  $n_2$  элементов. Если общее число обнаруженных в двух выборках дефектных элементов  $d(n_1 + n_2) \leq c_3$ , то партия принимается, а если же  $d(n_1 + n_2) > c_3$ , то партия бракуется. Часто используются усеченные планы типа двукратной выборки, в которых  $c_2 = c_3$ .

III. Планы типа последовательного анализа. При использовании этих планов задаются объемы последовательных выборок  $n_i$ ,  $i = 1, 2, \dots$ ,  $n_1 < N$ ,  $n_1 + n_2 < N$  и т. д., а также пары целых чисел  $c_i, c'_i$ . Пусть  $d_i = d(n_1 + \dots + n_i)$ —число дефектных изделий, обнаруженных в первых  $i$  выборках. В начале контроля берется выборка объема  $n_1$ . Если  $d_1 \leq c_1$ , то партия принимается, если  $d_1 > c'_1$ ,—бракуется, если же  $c_1 < d_1 \leq c'_1$ , то берется выборка объема  $n_2$  и т. д. На  $i$ -м шаге, если  $d_i \leq c_i$ , то партия принимается, если  $d_i > c'_i$ ,—бракуется, если  $c_i < d_i \leq c'_i$ , то берется выборка объема  $n_{i+1}$  изделий и т. д.

Каждый из указанных выше типов обладает рядом преимуществ и недостатков. Более подробный анализ будет дан в следующем параграфе. Мы только отметим, что планы типа однократной выборки значительно проще с организационной точки зрения. Здесь к тому же заранее известен объем выборки. В планах типа двукратной выборки и последовательного анализа можно при том же среднем объеме выборки получить большую достоверность соответствия принимаемых решений с истинным положением дела. Однако здесь могут встретиться случаи, когда объем инспекции будет чрезмерно велик. Оценка качества продукции для планов типов II и III значительно сложнее, чем для планов типа I.

**Оперативная характеристика.** Использование методов приемочного контроля связано с риском напрасной браковки хороших партий и риском приемки партий, засоренных дефектными изделиями. При случайном отборе изделий можно при общем небольшом количестве дефектных изделий в партии отобрать на проверку значительное число дефектных, что приведет к ложному решению о браковке хорошей партии (ошибка первого рода). С другой стороны, может случиться и так, что при сильной засоренности партии дефектными изделиями в выборке окажется

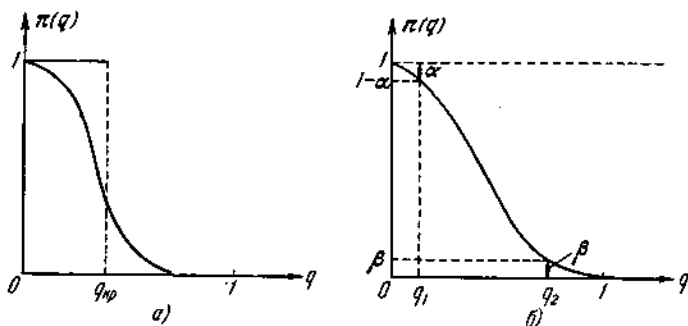


Рис. 7.1.3.

небольшое количество дефектных и плохая партия будет принята (ошибка второго рода). Такого рода ошибочные решения неизбежно связаны с применением методов выборочного контроля. Вопрос правильной организации выборочного контроля состоит, в частности, в том, чтобы такие ошибочные решения встречались редко, были маловероятными событиями. Для этого надо правильным образом задать параметры, определяющие контроль.

Одной из наиболее важных вероятностных характеристик плана выборочного контроля является так называемая *оперативная характеристика*. Под оперативной характеристикой плана понимают функцию  $\pi(q)$ , равную вероятности принятия партии, содержащей долю дефектных изделий, равную  $q = \frac{D}{N}$ , если приемка производится в соответствии с системой правил, определяющих исходный план контроля.

Используя понятие оперативной характеристики, можно задать различные численные показатели планов. Качество партии мы измеряем долей засоренности дефектными изделиями  $q = \frac{D}{N}$ . Из экономических или каких-либо других соображений может оказаться, что партии, имеющие засоренность  $q < q_{кр}$ , считаются хорошими,

их следует принимать, а партии с  $q > q_{кр}$  — плохими и их надо браковать. В этих случаях было бы желательно использовать план с идеальной оперативной характеристикой (рис. 7.1.3, а), которая равна 1 для значений  $q < q_{кр}$  и равна нулю при  $q > q_{кр}$ . Однако таких планов выборочного контроля с относительным объемом выборки  $v = \frac{n}{N} < 1$  нет среди планов типа однократной выборки.

Нет их и среди других типов планов. Оперативная характеристика каждого плана контроля является монотонно убывающей функцией. Примерный вид оперативной характеристики показан на том же рис. 7.1.3, а. Для наглядности оперативные характеристики всюду ниже показаны в виде сплошных линий, хотя на самом деле имеют смысл только их значения в точках  $q = \frac{D}{N}$ .

Не всегда можно так категорично с помощью только одного числа  $q_{кр}$  делить партии на плохие и хорошие. Часто возникает зона неопределенности, когда мы не можем точно сказать, плохи эти партии или нет. В таких случаях партии считаются заведомо хорошими при  $q < q_1$  и заведомо плохими при  $q > q_2$ ,  $q_2 > q_1$ . Поскольку оперативная характеристика плана выборочного контроля является монотонно убывающей функцией и поскольку неизбежны ошибочные решения о приемке и браковке, желательно, чтобы вероятности ложных решений были невелики. Пусть  $\pi(q)$  — оперативная характеристика плана. К плану предъявляются требования, состоящие в том, чтобы  $\pi(q) \geq 1 - \alpha$  при  $q < q_1$  и  $\pi(q_2) \leq \beta$  при  $q > q_2$ . Вероятность  $1 - \pi(q_1)$ , т. е. вероятность браковки заведомо хорошей партии, носит название ошибки первого рода или *риска поставщика*, доля  $q_1$  называется *приемлемым качеством*. Вероятность ложной приемки плохой партии, равная  $\pi(q_2)$ , называется *риском потребителя*, а доля  $q_2$  называется *предельным допустимым качеством* в том смысле, что при  $q_1 < q < q_2$  партии считаются еще допустимыми. Итак, требования к плану могут состоять в том, чтобы вероятности ошибок — риски производителя и поставщика — были соответственно не больше  $\alpha$  и  $\beta$  (рис. 7.1.3, б).

Обычно в таблицах используются только некоторые наборы значений  $\alpha$ ,  $\beta$ , например 0,1; 0,05; 0,01. Если используется план выборочного контроля, у которого риски  $\alpha = 0,01$ ;  $\beta = 0,05$  при значениях  $q_1 = 0,01$  и  $q_2 = 0,05$ , то это означает, что в среднем из каждых 100 партий, имеющих засоренность не выше 1%, будет забраковано не более одной партии, а из 100 партий, содержащих более 5% дефектных изделий, будет принято в среднем не более пяти партий. Выбор пары чисел  $q_2$ ,  $\beta$  осуществляется с учетом требований потребителя. Выбор  $q_1$  и  $\alpha$  производится таким образом, чтобы гарантировать от напрасного бракования хорошие партии.

Очень часто значение  $q_1$  берут немного больше среднего значения доли засоренности при нормальном ходе производства, чем и гарантируют, что почти все партии, выпущенные при соблюдении основных требований к технологии, будут приняты. Будем обозначать через  $q_a$  такую долю засоренности партии дефектными изделиями, при которой вероятность ее приемки равна  $\alpha$ , т. е.

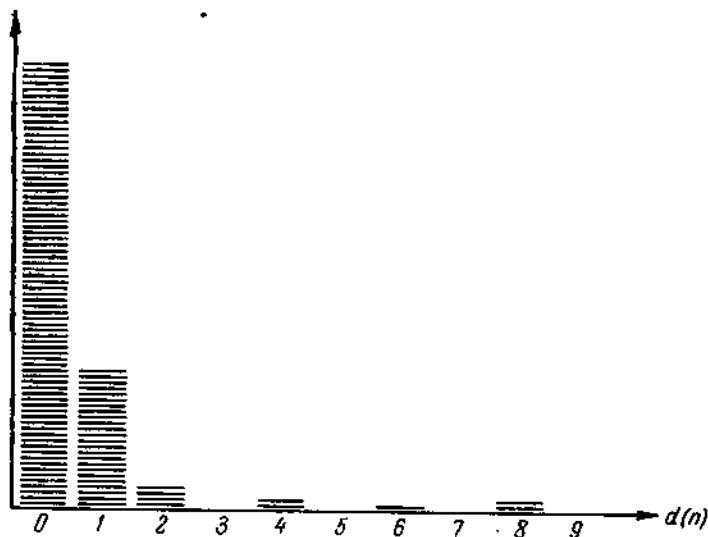


Рис. 7.1.4.

$\pi(q_a) = \alpha$ .  $q_a$  называется *безразличным качеством* при использовании плана с оперативной характеристикой  $\pi(q)$ . Если план контроля уже выбран и доля засоренности совпадает с безразличным качеством, то в среднем половина таких партий будет забракована, а другая половина будет принята.

Например, для планов типа однократной выборки надо задать объем выборки  $n$  и значение приемочного числа  $c$ . Для примера, рассмотрим случай выбора значения приемочного числа  $c$  на основе данных, приведенных на рис. 7.1.2, когда уже решено отбирать на контроль по  $n=100$  изделий от каждой партии объема  $N=1000$ . Предположим, что результаты сплошной проверки были скрыты от контролеров и все дефектные изделия были оставлены во всех 108 партиях. Результаты выборочного контроля оказались следующими: в выборках из 75 партий дефектных элементов не оказалось, в 24 было найдено по 1 дефектному изделию, в 4 — по 2, в 2 выборках — по 4, встретилась одна выборка,



содержащая 6 дефектных элементов и две — по 8 дефектных элементов (рис. 7.1.4). При сопоставлении результатов сплошной выборочной проверки оказалось, что все 75 партий, в которых число обнаруженных дефектных изделий  $d(n)=0$ , выпущены при нормальном ходе производства, из 24 партий с  $d(n)=1$  23 выпущены при нормальном ходе производства, из 4 с  $d(n)=2$  только две выпущены при нормальном ходе производства.

Из этого видно, что полагать  $c=0$  невыгодно, так как 23 партии, выпущенные при нормальном ходе производства и содержащие сравнительно небольшое число дефектных изделий, будут забракованы. На сравнительной таблице 7.1.1 показана вероятность бракования партии объема  $N=1000$ , содержащей  $D$  негодных изделий по выборке объема  $n=100$ , когда  $c=0, 1, 2, 3$ . Расчет был проведен с использованием гипергеометрического распределения по формулам § 7.2. Из расчетов видно, что при  $c=0$  вероятности ошибок первого и второго рода соответственно равны 0,41 и 0,04; при  $c=1$  — 0,08 и 0,18;  $c=2$  — 0,01 и 0,42;  $c=3$  — 0,002 и 0,66.

Таблица 7.1.1

$c \backslash D$	3	5	10	20	30	50	100
$c=0$	0,271244	0,410168	0,653072	0,880975	0,959003	0,995516	0,999974
$c=1$	0,027788	0,082284	0,263705	0,610773	0,817792	0,969173	0,999648
$c=2$	0,000978	0,009702	0,069238	0,322752	0,585332	0,894179	0,997651
$c=3$	0,00000	0,001773	0,011980	0,130887	0,341777	0,471999	0,989713

Здесь считается хорошей партией та, в которой  $D \leq 5$ , а плохой  $D \geq 30$ . Наиболее подходящим значением приемочного числа  $c$  является  $c=1$ . Проводить такие вычисления каждый раз заново, учитывая изменение  $N$  и  $n$ , является весьма трудоемким делом. Поэтому разрабатываются определенные системы отбора планов приемочного контроля из большого набора таких планов. В настоящее время издан ряд книг, содержащих таблицы планов, пользуясь которыми можно организовать приемочный контроль (см. [4]—[7]). Обзор ряда стандартов планов выборочного контроля дан в § 7.3. Однако проблема не является исчерпанной и в настоящее время. Трудность разработки методики выбора

наиболее приемлемых планов контроля заключается главным образом не в математической стороне дела, а в удачном учете всех факторов производства, предопределяющих этот выбор. Существуют различные численные показатели эффективности использования каждого плана. Примерами могут служить ошибки первого и второго рода. Систематически различные показатели будут определены в следующем параграфе. Для правильного выбора плана приемочного контроля в ряде случаев решающую роль могут играть экономические соображения. Один из возможных вариантов организации приемочного контроля исходя из стоимостных показателей рассмотрен в § 7.4.

Возможные нарушения правил контроля. В § 7.5 даны методы оценки качества продукции исходя из результатов контроля. Приводятся несмещенные, т. е. в среднем точные, оценки качества предъявленной и принятой продукции. Основная задача состоит в следующем. Пусть на контроль поступают партии объема  $N_i$ , содержащие  $D_i$  дефектных изделий. После проведения контроля принимается  $N_{i\text{пр}}$  изделий из каждой партии, из которых  $D_{i\text{пр}}$  оказываются дефектными. Зная результаты контроля, требуется оценить, какова была доля дефектных изделий в предъявленной продукции (входное качество) и какова доля дефектных изделий в принятой продукции (выходное качество). При использовании методик вычисления несмещенных оценок для входного и выходного качеств продукции особое внимание следует обратить на точное соблюдение правил проведения приемочного контроля, исходя из которых выведены формулы для оценок. Однако иногда имеют место разного рода нарушения. Приведем два примера возможных нарушений.

Пример 1. Для проверки от каждой партии отбирается по 100 элементов вне зависимости от объема партии. Все отобранные изделия проверяют; если число обнаруженных дефектных изделий  $d > 2$ , то партия бракуется, если же  $d \leq 2$ , то принимается. Общее число обнаруженных дефектных изделий отмечается в журнале. На основе зарегистрированных данных составляем столбик числа партий, имеющих одинаковое число  $d$  ( $n$ ) обнаруженных дефектных изделий. Полученные данные приведены на рис. 7.1.5, а. По зарегистрированным данным оказывается, что совсем не было партий, выборки из которых содержат более трех дефектных изделий. Из рис. 7.1.5, а мы видим, что число партий, содержащих  $d=3$  дефектных изделий, равно 35, а  $d=0$ ,  $d=1$  и  $d=2$  — соответственно 60, 45 и 33. Наиболее правдоподобное объяснение состоит в том, что контроль проводился только до обнаружения первых трех дефектных изделий. Контролеру, который не знает, как влияет искажение плана контроля на оценку качества, казалось напрасным проверять оставшуюся часть выборки, когда и так

ясно, что партия будет забракована. Если бы правила проверки были точно соблюдены, то результаты контроля могли бы выглядеть так, как это показано на рис. 7.1.5, б. Без особых вычислений видно, что искажение плана контроля привело к завышению качества продукции.

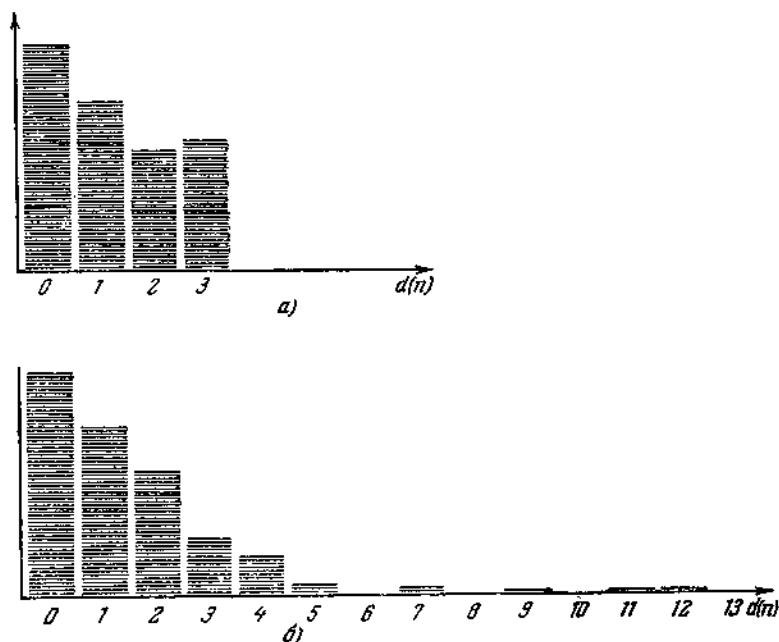


Рис. 7.1.5.

**Пример 2.** Графическое изображение данных в виде столбиков имеет вид рис. 7.1.6, а.

Обращает на себя внимание резкий спад числа партий, содержащих  $d=3$ . Их всего только 10, тогда как имеется 60 партий, выборка из которых содержит  $d=2$  дефектных изделий. В плане контроля записано, что от каждой партии надо отбирать по 100 изделий и при обнаружении более двух дефектных изделий надо тому же контролеру провести разбраковку оставшейся части партии. Таким образом, браковка партии означает резкое увеличение объема работы контролера. Если продукция используется не на очень ответственных участках производства (например, инструмент), то контролер, обнаружив в выборке ровно три изделия, часто принимает такую партию как годную, искусственно уменьшая себе объем работы. Если таким образом было принято 15 партий, то при

полном соблюдении плана контроля эмпирический материал имел бы вид, показанный на рис. 7.1.6, б.

В приведенных примерах даны вымышленные цифры, однако существо примеров взято из реальной жизни. По-видимому, число подобных, быть может и более оригинальных, случаев можно было бы продолжить.

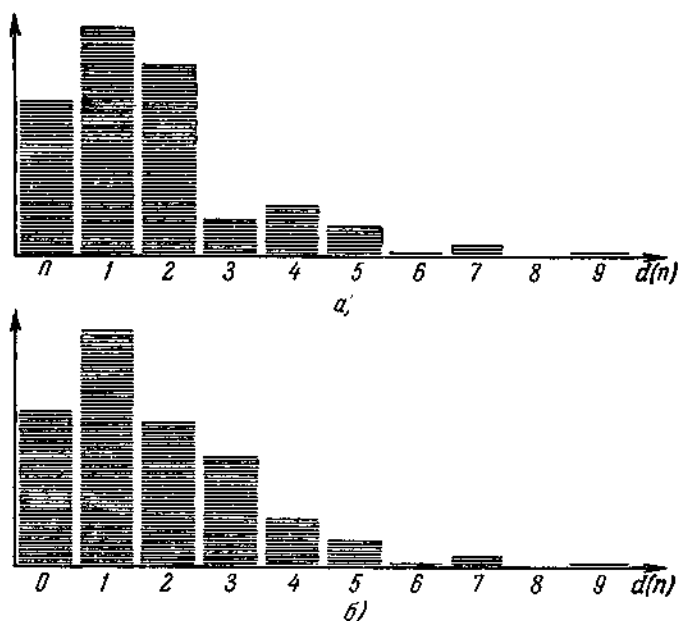


Рис. 7.1.6.

Цель этих примеров состоит в показе того, что даже простейший статистический анализ, подобный тому, какой нами использован при составлении рис. 7.1.5 и 7.1.6, может иногда выявить весьма существенные факты.

## § 7.2. Численные характеристики планов приемочного контроля

Планы типа однократной выборки. Выше уже указывалось, что для правильной организации приемочного контроля необходимо уметь оценивать эффективность использования различных планов с помощью численных критериев. Каждый план контроля определяется моментом, в который надо прекратить проверку, а также указанием того, какое решение надо при этом принять,

Как правило (см. [7]), принимается одно из следующих трех решений:

$D_1$  — отвергнуть оставшуюся непроверенной часть партии без контроля;

$D_2$  — провести 100%-ную разбраковку оставшейся части партии;

$D_3$  — принять оставшуюся часть партии без дальнейшего контроля.

В некоторых случаях возможны и другие решения, такие, как снижение сортности, изъятие отдельных частей продукции для последующей переработки и использования и т. д.

Планы типа однократной выборки характеризуются двумя параметрами — объемом выборки  $n$  и приемочным числом  $c$ . Если через  $d(n)$  обозначить число дефектных изделий в выборке, то при  $d(n) > c$  партия бракуется (т. е. принимается одно из двух решений:  $D_1$  или  $D_2$ ), а при  $d(n) < c$  партия принимается (т. е. принимается решение  $D_3$  или  $D_2$ ). Условимся планы типа однократной выборки обозначать через их параметры  $(n, c)$ . При этом, если браковка означает принятие решения  $D_1$ , а приемка —  $D_3$ , такой план будем обозначать  $(n, c)_{ij}$ .

Возможны следующие типы планов  $(n, c)_{12}$ ,  $(n, c)_{13}$ ,  $(n, c)_{23}$ . Например, план  $(120; 1)_{23}$  означает, что из партии надо отобрать случайным образом и затем проверить 120 элементов. Если  $d(120) > 1$ , то необходимо произвести сплошную разбраковку оставшейся части партии. Если же  $d(120) \leq 1$ , то оставшуюся часть партии следует принять без дальнейшего контроля. Планы типа  $(n, c)_{13}$  используются в тех случаях, когда контроль неразрушительный, стоимость его велика и требования к качеству высокие. Планы типа  $(n, c)_{13}$  применяются главным образом при разрушительном контроле или в тех случаях, когда стоимость контроля велика. Наконец, планы  $(n, c)_{23}$  находят применение как при разрушительном, так и при неразрушительном контроле, когда представляет интерес получение дополнительной информации о качестве продукции. Без всяких расчетов видно, что среднее количество проверяемых изделий различно для каждого из этих планов. Различными будут как засоренность дефектными изделиями продукции, принятой по результатам контроля, так и методы ее оценки, рассматриваемые в § 7.5. Если контроль не является разрушительным, то выявленные дефектные изделия могут заменяться годными. В этом случае объем принимаемой партии остается неизменным. Факт замены дефектных изделий годными будем отличать штрихом  $(n, c)'$ , отсутствие замены — крестиком  $(n, c)^\times$ . Разрушительность контроля — звездочкой  $(n, c)^*$ .

Иногда могут оказаться полезными планы типа однократной выборки с двойным уровнем контроля. Здесь задаются объем выборки  $n$  и два критических числа: приемочное число  $c$  и бра-

ковочное число  $c'$ . Если число обнаруженных дефектных изделий  $d(n) \leq c$ , то принимается решение  $D_2$ , если  $c < d(n) < c'$ , принимается решение  $D_3$ , наконец, если  $d(n) \geq c'$ , принимается решение  $D_1$ . Такие планы могут оказываться экономически целесообразными, если контроль неразрушительный, но дорогой, и сравнительно часто встречаются партии, сильно засоренные дефектными изделиями. Такие планы обозначаются тройкой чисел  $(n, c, c')$ .

Изучим влияние засоренности партии дефектными изделиями на вероятность принятия возможных решений и на общий объем инспекции. Партию, предъявленную на контроль, можно характеризовать парой чисел: объемом партии  $N$  и числом содержащихся в ней дефектных изделий  $D$ , которое нам неизвестно. Пусть используется план  $(n, c)_{ij}$ . Число обнаруженных дефектных изделий  $d(n)$  является случайной величиной. Вероятности  $\pi_d = P\{d(n) = d\}$ ,  $d = 0(1)n$  можно подсчитать двумя способами.

В первом способе рассматриваем всевозможные размещения  $D$  элементов по  $N$  местам, среди которых  $n$  мест означают выборку. Общее число размещений элементов, различных только по признаку годности или дефектности, равно  $C_N^D$ . При этом  $d$  дефектных изделий можно разместить  $C_n^d$  различными способами среди  $n$  мест, зафиксированных для выборки, а  $D-d$  не попавших в выборку дефектных изделий можно разместить  $C_{N-n}^{D-d}$  способами по  $N-n$  местам. Общее число благоприятных для события  $\{d(n) = d\}$  исходов равно  $C_n^d C_{N-n}^{D-d}$ . Таким образом, мы получаем

$$\pi_d = P\{d(n) = d\} = \frac{C_n^d C_{N-n}^{D-d}}{C_N^D}. \quad (7.2.1)$$

Во втором способе мы рассматриваем всевозможные различные выборки по  $n$  элементов из  $N$  элементов. Общее число их равно  $C_N^n$ . При этом число выборок из  $D$  дефектных элементов по  $d$  элементов равно  $C_D^d$ , а число выборок по  $n-d$  годных элементов из  $N-D$  годных элементов  $C_{N-D}^{n-d}$ . Общее число благоприятных случаев равно  $C_D^d C_{N-D}^{n-d}$ , откуда имеем

$$\pi_d = \frac{C_D^d C_{N-D}^{n-d}}{C_N^n}. \quad (7.2.2)$$

Говорят, что случайная величина  $d(n)$ , принимающая целочисленные значения  $0(1)n$  с вероятностями  $\pi_d$ , задаваемыми формулами (7.2.1), (7.2.2), имеет *гипергеометрическое распределение*. Можно показать, что среднее значение доли дефектных элементов в выборке и дисперсия вычисляются по формулам

$$M \frac{d(n)}{n} = \frac{D}{N}, \quad M \left( \frac{d(n)}{n} - \frac{D}{N} \right)^2 = \frac{1}{n} \frac{N-n}{N-1} \frac{D(N-D)}{N^2}. \quad (7.2.3)$$

Действительно, число всех возможных выборок по  $n$  элементов из  $N$  элементов с учетом их порядка равно  $A = N(N-1) \dots (N-n+1)$ . Число случаев, в которых фиксированное изделие будет проверено  $i$ -м, равно  $A = (N-1)(N-2) \dots (N-n+1)$ , число же случаев, в которых оно окажется дефектным, равно  $B = D(N-1)(N-2) \dots (N-n+1)$ . Таким образом, вероятность того, что  $i$ -е извлечение для проверки изделия окажется дефектным, равна  $\frac{B}{A} = \frac{D}{N}$ . Так как  $d(n) = \xi_1 + \dots + \xi_n$ , где  $\xi_i = 1$ , когда  $i$ -е изделие дефектно ( $P(\xi_i = 1) = \frac{D}{N}$ ), и  $\xi_i = 0$  в противном случае, то  $M\left(\frac{d(n)}{n}\right) = n^{-1} M\left(\sum_{i=1}^n \xi_i\right) = P(\xi_i = 1) = \frac{D}{N}$ . Следовательно, доля дефектных изделий, обнаруженных в выборке, является несмещенной оценкой для доли дефектных изделий в партии. Аналогичным образом можно доказать и вторую формулу (7.2.3). Для того чтобы подчеркнуть зависимость этого распределения от трех параметров  $N, D, n$ , будем вероятности  $\pi_d$  гипергеометрического распределения всюду обозначать символом  $B_{ND}^{nd}$ . Для плана  $(n, c)_i$  вероятность  $\Pi_c$  принятия решения  $j$  равна

$$\Pi_c(D) = P\{d(n) \leq c\} = \sum_{d=0}^c B_{ND}^{nd}. \quad (7.2.4)$$

Соответственно вероятность браковки партии с решением  $i$  равна  $1 - \Pi_c(D)$ .

$\Pi_c(D)$  как функция от засоренности  $D$  дефектными изделиями называется *оперативной характеристикой*. Это один из наиболее полных функциональных показателей действия плана. Вид оперативной характеристики для плана (50,3) и  $N=100$  показан на рис. 7.2.1, а. Из рисунка видно, что вероятность принятия партии резко убывает с ростом засоренности. Уже при  $D=10$   $\Pi_3 = 0,18$ , а при  $D=15$   $\Pi_3 < 0,02$ . Второй важной характеристикой контроля является зависимость математического ожидания общего объема проверки от величины  $D$ . При использовании плана  $(n, c)_{12}$  оставшиеся непроверенными  $N-n$  изделий проверяются, если  $d(n) \leq c$ . Таким образом, средний общий объем инспекции  $M_{12}(D)$  задается по формуле

$$M_{12}(D) = n + (N-n) \Pi_c(D). \quad (7.2.5)$$

Аналогичным образом для плана  $(n, c)_{13}$

$$M_{13}(D) = n, \quad (7.2.6)$$

а для плана  $(n, c)_{23}$  —

$$M_{23}(D) = n + (N-n) [1 - \Pi_c(D)]. \quad (7.2.7)$$

На рисунке 7.2.1, б показаны графики  $M_{ij}(D)$  для планов  $(50, 3)_j$  и объема партии  $N = 100$ .

Биномиальное и пуассоновское приближения. Ввиду наличия трех независимых параметров  $N$ ,  $D$ ,  $n$  гипергеометрическое распределение весьма трудно табулировать.

Поэтому представляет большой практический интерес получение различных приближений, содержащих известные распределения с меньшим числом параметров. Здесь мы ограничимся лишь

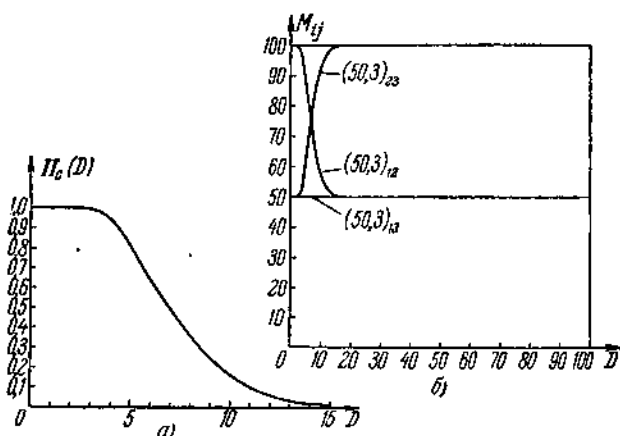


Рис. 7.2.1.

несколькими примерами биномиального и пуассоновского приближений. Заметим, что формулы (7.2.1) (7.2.2) можно записать в виде

$$B_{ND}^{nd} = C_n^d \prod_{j=0}^{d-1} \left( q - \frac{j}{N} \right) \prod_{k=0}^{n-d+1} \left( 1 - q - \frac{k}{N} \right) \left\{ \prod_{l=0}^{n-1} \left( 1 - \frac{l}{N} \right) \right\}^{-1}, \quad (7.2.8)$$

$$B_{ND}^{nd} = C_D^d \prod_{j=0}^{d-1} \left( v - \frac{j}{n} \right) \prod_{k=0}^{D-d+1} \left( 1 - v - \frac{k}{N} \right) \left\{ \prod_{l=0}^{D-1} \left( 1 - \frac{l}{N} \right) \right\}^{-1}, \quad (7.2.9)$$

где  $q = \frac{D}{N}$  — доля дефектных изделий в партии, а  $v = \frac{n}{N}$  — относительный объем выборки. Из формулы (7.2.8) получаем, что

$$B_{ND}^{nd} \approx C_n^d q^d (1-q)^{n-d}, \quad (7.2.10)$$

если только  $n \ll \min(N, N-D)$  и  $d \ll D$ . В этих условиях фактически предполагается, что  $N \gg 1$  и  $D \gg 1$ .

Из формулы (7.2.9) находим, что

$$B_{ND}^{nd} \approx C_D^d v^d (1-v)^{D-d}, \quad (7.2.11)$$



если только  $D \ll \min(N, N-n)$ ,  $d \ll n$ . В этих условиях фактически предполагается, что  $N \gg 1$  и  $n \gg 1$ . Таким образом, гипергеометрическое распределение может быть приближено биномиальными распределениями, которые уже определяются только заданием двух параметров:  $q$  и  $n$  в первом случае и  $\nu$  и  $D$  — во втором. Для краткости записи будем называть эти распределения  $q$ -биномиальным и  $\nu$ -биномиальным. Условия, при которых хорошей аппроксимацией является  $q$ -биномиальное распределение, состоят в том, чтобы относительный объем выборки был невелик, а засоренность дефектными изделиями была больше относительного объема выборки;  $\nu$ -биномиальное распределение дает хорошие результаты, когда относительный объем выборки больше доли засоренности  $q$ .

Если  $n \gg 1$ ,  $d \ll n$ ,  $q \ll 1$ ,  $\nu \ll 1$ , то можно использовать пуассоновское приближение

$$B_{ND}^{nd} \approx \left( \frac{\lambda^d}{d!} \right) e^{-\lambda}, \quad (7.2.12)$$

где  $\lambda = nq = D\nu$  — среднее число дефектных изделий, попавших в

Таблица 7.2.1

$k$	$N=100, \quad n=10; \quad q=0,05$				$N=100; \quad n=10; \quad q=0,2$			
	$B_{ND}^{nk}$	$b_n^k(nq)$	$b_{Nq}^k\left(\frac{n}{N}\right)$	$l_k(nq)$	$B_{ND}^{nk}$	$b_n^k(nq)$	$b_{Nq}^k\left(\frac{n}{N}\right)$	$l_k(nq)$
0	0,584	0,599	0,590	0,607	0,095	0,122	0,107	0,135
1	0,339	0,315	0,328	0,303	0,268	0,270	0,268	0,271
2	0,070	0,075	0,073	0,076	0,318	0,285	0,302	0,271
3	0,006	0,010	0,008	0,013	0,209	0,190	0,201	0,180
4	0,000	0,001	0,001	0,002	0,084	0,090	0,088	0,090
5	0,000	0,000	0,000	0,000	0,022	0,034	0,026	0,036
6	0,000	0,000	0,000	0,000	0,004	0,009	0,006	0,012
7	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,001	0,03

выборку. Таблица 7.2.1 содержит сравнительные данные для точных значений вероятностей  $B_{ND}^{nd}$  и рассмотренных выше различных приближений (ср. [6], стр. 445).

Условимся использовать обозначения

$$\begin{aligned} b_i^k(a) &= C_i^k a^k (1-a)^{i-k}, & l_k(x) &= \binom{x+k}{k!} e^{-x}, \\ B_i^c(a) &= \sum_{d=0}^c b_i^d(a), & L_c(x) &= \sum_{d=0}^c l_d(x). \end{aligned} \quad (7.2.13)$$

Из формул (7.2.10), (7.2.11), (7.2.12) получаем, что оперативная характеристика приближенно может вычисляться по формулам

$$P_c(D) \approx B_n^c(q), \quad P_c(D) \approx B_D^c(v), \quad P_c(D) \approx L_c(\lambda). \quad (7.2.14)$$

В тех случаях, когда могут быть использованы указанные выше распределения и объем выборки  $n > 30$ , целесообразно вместо дискретного параметра  $n$  ввести непрерывный параметр  $t = \frac{n}{n_0}$ , где  $n_0$  — число изделий, в которых при нормальном ходе производства встречается в среднем одно дефектное изделие. Зная  $t$ , мы можем найти значение  $n$  из равенства  $n = tn_0$ . Полученные дробные числа будем округлять до ближайшего целого числа. Например, если  $n_0 = 50$ , а  $t = 2,331$ , то  $n = 116,55$ , или, округляя, считаем окончательно  $n = 117$ . Ошибки от такого округления будут невелики и ими можно пренебречь, учитывая, что уже имеются некоторые ошибки от использования биномиального или пуассоновского приближений. Пусть случайным образом отобранные изделия проверяются последовательно одно за другим,  $n_i$  — номер испытания, при котором проверяемое изделие оказалось дефектным. Положим  $n_0 = \lambda \left( \frac{N}{D} \right)$ ,  $t_i = \frac{n_i}{n_0}$ ; тогда имеет место

**Теорема 7.2.1.** Если  $\frac{D}{N} \rightarrow 0$ ,  $N \rightarrow \infty$ ,  $D \rightarrow \infty$ , то последовательность «моментов времени»  $t_i$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , образует пуассоновский поток с интенсивностью  $\lambda$ .

Доказательство этой теоремы можно получить, показав, исходя из точной комбинаторной формулы, что в пределе конечномерные распределения моментов  $t_i$  совпадают с распределениями пуассоновского потока. Однако ввиду громоздкости записи формул мы опускаем это доказательство.

Таким образом, объем выборки можно рассматривать как временной параметр, а выявление дефектных изделий — как появление событий случайного потока. С этой точки зрения появление пуассоновского распределения (7.2.12) объясняется тем, что мы

наблюдаем события пуассоновского потока (выявление дефектных изделий) в течение фиксированного «времени»  $\lambda = \frac{n}{n_0} = nq$ ,  $n_0 = q^{-1}$ .

Полезно также отметить, что пуассоновское приближение остается справедливым и при сколь угодно больших относительных объемах выборки  $n$ , если априорное распределение числа дефектных изделий является биномиальным и при этом значение параметра  $q_0$  достаточно мало ( $q_0 < 0,1$ ).

Как уже отмечалось выше (см. § 7.1), при нормальном ходе производства число  $D$  дефектных изделий в партии объема  $N$  можно считать случайной величиной с функцией распределения  $F_N(D)$ . Если при этом каждое изделие независимо от других и с одной и той же вероятностью  $q_0$  может оказаться дефектным, то  $F_N(D) = B_N^D(q_0)$ .

*Теорема 7.2.2. Если априорное распределение для числа дефектных изделий  $D$  является биномиальным с функцией распределения  $F_N(D) = B_N^D(q_0)$ , то распределение числа дефектных изделий  $d(n)$ , обнаруженных в выборке объема  $n$ , также является биномиальным с функцией распределения  $B_n^d(q_0)$ .*

Доказательство основано на тождестве

$$B_{ND}^{nd} b_N^D(q_0) = b_n^d(q_0) b_{N-d}^{D-d}(q_0), \quad (7.2.15)$$

в справедливости которого можно легко убедиться непосредственной проверкой. В силу этого тождества имеем

$$\begin{aligned} P\{d(n) = d\} &= \sum_{D=0}^N P\{d(n) = d \mid D\} b_N^D(q_0) = \\ &= \sum_{D=0}^N B_{ND}^{nd} b_N^D(q_0) = b_n^d(q_0) \sum_{D=0}^N b_{N-d}^{D-d}(q_0) = b_n^d(q_0), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство.

В ряде случаев априорное распределение не является биномиальным, однако его можно приблизить суперпозицией биномиальных распределений. Иначе говоря, приближение осуществляется с помощью распределения  $F_N(D) = \int_0^1 B_N^D(q_0) dG_N(q_0)$ , где  $G_N(q_0)$  — функция распределения  $G_N(-0) = 0$ ,  $G_N(1) = 1$ . Таким образом, априорное распределение приближается биномиальным распределением со случайным значением параметра  $q_0$ . Мы ограничимся при расчетах в следующем параграфе только случаем чисто биномиального распределения, при котором  $G_N(q) = 0$ , если  $q < q_0$ ,  $G_N(q) = 1$ , если  $q > q_0$ ,  $0 < q_0 < 1$ . Можно ожидать, что  $G_N(q)$  будет иметь два скачка, если на контроль поступают в случайном порядке

партии, изготовленные различными бригадами, и если при этом для каждой бригады характерно свое значение доли  $q$  дефектных изделий.

Планы типа двукратной выборки. В тех случаях, когда особенно остро стоит вопрос о сокращении объема испытаний, могут быть использованы планы типа двукратной выборки или последовательного анализа (см. § 7.1). Рассмотрим сначала усеченные планы типа двукратной выборки. При использовании этих планов сначала отбирают  $n_1$  изделий, если  $d(n_1) \leq c_1$ , то принимается решение  $D_{пр1}$  (обычно  $D_{пр1} = D_3$  или  $D_2$ ), если  $d(n_1) > c_2 > c_1$ , то партия бракуется с принятием решения  $D_{бр1}$  ( $D_{бр1} = D_1$  или  $D_2$ ); если же  $c_1 < d(n_1) \leq c_2$ , то берется дополнительная выборка объема  $n_2$ . Если  $d(n_1 + n_2) \leq c_2$ , то партия принимается с решением  $D_{пр}$  ( $D_{пр} = D_2$  или  $D_3$ ), а если  $d(n_1 + n_2) > c_3$ , то партия бракуется с решением  $D_{бр}$  ( $D_{бр} = D_1$  или  $D_2$ ). На рис. 7.2.2, а дано схематическое изображение усеченного плана типа двукратной

выборки. Здесь  $t = \frac{n}{n_0}$  пропорционально объему проверенной продукции, например  $t_1 + t_2 = \frac{(n_1 + n_2)}{n_0}$ . Крестиками обозначены точки, в которых принимаются те или иные решения, а ломаной линией  $d(t)$  — число обнаруженных дефектных изделий к «моменту»  $t = \frac{n}{n_0}$ . Каждой из граничных точек обязательно приписано одно решение, которое и принимается, если траектория  $d(t)$  достигает этой граничной точки. Итак, усеченный план типа двукратной выборки характеризуется набором четырех параметров  $n_1, n_2, c_1, c_2$  и постановкой решений по четырем граничным участкам. Будем такие планы обозначать набором  $(n_1; n_2; c_1; c_2)_{бр1, пр1, бр2, пр2}$ , где  $i_{пр1} = t$ , если  $D_{пр1} = D_i$ , и т. д. Например, план  $(20, 20, 0, 1)_{1312}$  означает, что при  $d(20) = 0$  оставшаяся непроверенная часть

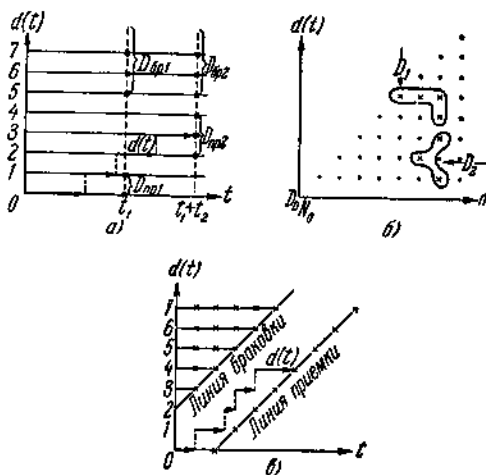


Рис. 7.2.2.

Здесь  $t = \frac{n}{n_0}$  пропорционально объему проверенной продукции, например  $t_1 + t_2 = \frac{(n_1 + n_2)}{n_0}$ . Крестиками обозначены точки, в которых принимаются те или иные решения, а ломаной линией  $d(t)$  — число обнаруженных дефектных изделий к «моменту»  $t = \frac{n}{n_0}$ . Каждой из граничных точек обязательно приписано одно решение, которое и принимается, если траектория  $d(t)$  достигает этой граничной точки. Итак, усеченный план типа двукратной выборки характеризуется набором четырех параметров  $n_1, n_2, c_1, c_2$  и постановкой решений по четырем граничным участкам. Будем такие планы обозначать набором  $(n_1; n_2; c_1; c_2)_{бр1, пр1, бр2, пр2}$ , где  $i_{пр1} = t$ , если  $D_{пр1} = D_i$ , и т. д. Например, план  $(20, 20, 0, 1)_{1312}$  означает, что при  $d(20) = 0$  оставшаяся непроверенная часть

партии принимается без контроля, при  $d(20) \geq 2$  оставшаяся часть партии бракуется без проверки. В том случае, когда в первой выборке обнаружено только одно дефектное изделие, берется повторная выборка в 20 изделий. Если теперь не обнаружено новых дефектных изделий, то партия принимается с последующей разбраковкой, если же  $d(40) > 1$ , то партия бракуется без дальнейшей проверки. Аналогичным указанному выше образом могут быть использованы знаки ( )' и ( )\*.

Используя формулу полных вероятностей, легко выписать формулы для вероятностей принятия тех или иных решений. Здесь мы имеем

$$P\{D_{np_1}\} = \sum_{d=0}^{c_1} B_{ND}^{n_1 d}, \quad P\{D_{6p_1}\} = \sum_{d=c_2+1}^N B_{ND}^{n_1 d}, \quad (7.2.16)$$

$$P\{D_{np_2}\} = \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2}, \quad (7.2.17)$$

$$P\{D_{6p_2}\} = \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=c_2-d_1+1}^{n_2} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2}. \quad (7.2.18)$$

Очень часто  $D_{np_1} = D_{np_2} = D_i$ ,  $D_{6p_1} = D_{6p_2} = D_j$ , т. е. партия принимается и бракуется только с одним решением. В таких случаях важным показателем плана является оперативная характеристика  $\Pi(D)$ , показывающая зависимость вероятности приема партии от числа дефектных изделий. Из (7.2.16), (7.2.17) находим, что

$$\Pi(D) = \sum_{d_1=0}^{c_1} B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2}. \quad (7.2.19)$$

Аналогичным образом получаем, что средний объем инспекции для плана  $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{1313}$  равен

$$M_{1313}(D) = n_1 + n_2 \left( 1 - \sum_{d=0}^{c_1} B_{ND}^{n_1 d} \right). \quad (7.2.20)$$

Для плана  $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{1212}$  получаем

$$\begin{aligned} M_{1212}(D) = & n_1 \sum_{d_1=c_1+1}^{D} B_{ND}^{n_1 d_1} + \\ & + (n_1 + n_2) \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=c_2-d_1+1}^{n_2} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2} + \\ & + N \left( \sum_{d_1=0}^{c_1} B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} B_{ND}^{n_1 d_1} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2} \right). \quad (7.2.21) \end{aligned}$$

Аналогичные формулы можно выписать и для других усеченных планов типа двукратной выборки.

Если выполнены условия теоремы 7.2.1, то можно воспользоваться пуассоновским приближением. При этом формула (7.2.19) для оперативной характеристики принимает вид

$$\Pi(D) = L_{c_1}(n_1q) + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \left[ \frac{(n_1q)^{d_1}}{d_1!} \right] L_{c_2-d_1}(n_2q), \quad (7.2.22)$$

где  $L_c(x)$  определяется из (7.2.13).

Планы последовательного анализа. Более общий класс планов приемочного контроля последовательного типа можно получить, если после каждого проверенного изделия либо принимается решение о продолжении проверки еще одного изделия, либо контроль прекращается и принимается одно из возможных решений, например  $D_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Если предположить, что любое решение принимается только с учетом данных о количестве проверенных изделий  $n$  и количестве обнаруженных дефектных изделий  $d(n)$ , то такой класс правил можно представлять в виде блуждания по точкам целочисленной решетки  $(n, d)$ . Пребывание в точке  $(n, d)$  означает, что проверено  $n$  изделий, из которых  $d$  было дефектных. Точки  $(n, d)$ , в которых принимаются решения, назовем граничными. На рис. 7.2.2, б, в показаны примеры таких планов. Граничные точки обозначены крестиками. Легко заметить, что все рассмотренные ранее планы контроля типа однократной и двукратной выборки являются частными случаями планов последовательного типа. Как правило, для планов последовательного типа не существует простых явных формул для вероятности принятия в итоге проведения контроля того или иного решения, а также формул для среднего объема инспекции. Однако можно дать очень простую методику, по которой с помощью приводимых ниже простых рекуррентных соотношений можно найти численные значения указанных характеристик. Пусть  $\Gamma_i$  — множество граничных точек  $(n, d)$ , в которых принимается одно и то же решение  $D_i$ . Тогда вероятность принятия решения  $D_i$  означает, что в процессе проведения контроля первой граничной точкой окажется  $(n, d) \in \Gamma_i$ . Обозначим через  $P_{\Gamma_i}(n, d)$  вероятность того, что впервые достигнутая граничная точка принадлежит множеству  $\Gamma_i$ . В тех случаях, когда  $(n, d)$  является граничной и  $(n, d) \in \Gamma_i$ , мы имеем

$$P_{\Gamma_i}(n, d) = 1. \quad (7.2.23)$$

Если же  $(n, d)$  граничная, но  $(n, d) \notin \Gamma_i$ , то

$$P_{\Gamma_i}(n, d) = 0. \quad (7.2.24)$$

Эти граничные условия являются отражением того факта, что после достижения граничной точки контроль прекращается.

В частности, условие (7.2.24) означает, что если в итоге проведения контроля мы достигли граничной точки  $(n, d) \in \bar{\Gamma}_i$ , то испытания прекращаются, и мы уже не можем попасть в точку  $(n, d) \in \Gamma_i$ . Заметим теперь, что если проверяется партия объема  $N$ , содержащая  $D$  дефектных изделий, то пребывание в точке  $(n, d)$  означает, что еще не проверены  $N-n$  изделий, среди которых  $D-d$  дефектных. Из этого следует, что при случайном выборе  $(n+1)$ -го изделия с вероятностью  $\frac{N-n-D+d}{N-n}$  оно окажется годным, а с вероятностью  $\frac{D-d}{N-n}$  — дефектным. В первом случае из точки  $(n, d)$  переходим в точку  $(n+1, d)$ , во втором — в точку  $(n+1, d+1)$ . Пусть вероятности  $P_{\Gamma_i}(n+1, d)$  подсчитаны для всех возможных значений  $(n+1, d)$ ; тогда для каждой возможной точки  $(n, d)$  имеем

$$P_{\Gamma_i}(n, d) = \left[ \frac{D-d}{N-n} \right] P_{\Gamma_i}(n+1, d+1) + \left( \frac{N-n-D+d}{N-n} \right) P_{\Gamma_i}(n+1, d). \quad (7.2.25)$$

Последовательно уменьшая значения  $n$ , мы придем к точке  $(0, 0)$ .  $P_{\Gamma_i}(0, 0)$  и является интересующей нас вероятностью  $P(D_i)$  принятия решения  $D_i$ . Итак, доказана

**Теорема 7.2.3.** *Вероятность  $P(D_i)$  =  $P_{\Gamma_i}$  принятия решения  $D_i$  определяется граничными условиями, условиями (7.2.23), (7.2.24) и рекуррентными соотношениями (7.2.25).*

Если при окончании контроля принимается только два решения:  $D_i$  при браковке ( $i=1, 2$ ) и  $D_j$  при приемке партии ( $j=2, 3$ ), то оперативная характеристика является функциональным выражением зависимости вероятности приемки партии  $P(D_j)$  от числа  $D$  содержащихся в ней дефектных изделий.

Аналогичным образом может быть доказана

**Теорема 7.2.4.** *Средний объем инспекции  $m = m(0, 0)$  при использовании последовательного плана контроля партии объема  $N$ , содержащей  $D$  дефектных изделий, определяется из граничных условий*

$$m(n, d) = 0 \quad (7.2.26)$$

(когда  $(n, d)$  — граничная) и рекуррентных соотношений

$$m(n, d) = 1 + \frac{D-d}{N-n} m(n+1, d+1) + \frac{N-n-D+d}{N-n} m(n+1, d). \quad (7.2.27)$$

**Примечание.** Если необходимо подсчитать общий объем инспекции, то условие (7.2.26) заменяется условием

$$m(n, d) = \begin{cases} N-n, & \text{если принимается решение } D_2, \\ 0, & \text{если принимается одно из решений } D_1 \text{ или } D_3. \end{cases}$$

Вычисления по рекуррентным формулам просты. Однако составление исчерпывающих таблиц даже для конкретных классов планов последовательного типа ввиду большого количества параметров является весьма трудоемкой работой. Поэтому обычно используют

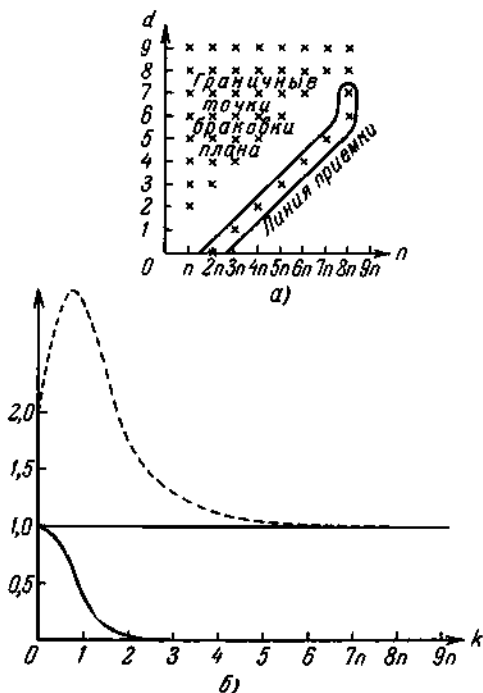


Рис. 7.2.3.

различные приближения. Например, считают, что  $\frac{D-d}{N-n} \approx \text{const}$  и т. д.

На рис. 7.2.3, б сплошной линией показаны значения оперативной характеристики  $\Pi(k)$ , а пунктирной линией — значения объема инспекции  $\mu(k)$  для плана последовательного типа, показанного на рис. 7.2.3, а. План контроля осуществляется путем последовательной инспекции выборок равного объема  $n$ . Партия бракуется без дальнейшего контроля, если  $d(n) \geq 2$ , если же  $d(n) < 2$ , то берется вторая выборка того же объема  $n$ . Партия принимается без дальнейшего контроля, если  $d(n) \geq 2$ , если же  $d(n) < 2$ , то берется вторая выборка того же объема  $n$ . Партия принимается без дальнейшего контроля, если  $d(2n) = 0$ , бракуется, если  $d(2n) \geq 3$ ,



берется случайная выборка объема  $n$ , если  $d(2n) = 1$  или 2 и т. д. в соответствии с рис. 7.2.3, а. При расчетах было использовано пуассоновское приближение;  $k = nq$ , т. е. равно среднему числу дефектных изделий, обнаруживаемых в выборке. Объем инспекции  $\mu(k)$  на рис. 7.2.3, б дан в относительных единицах, кратных  $n$ . Так, при  $n = 20$  и  $k = 1$   $\mu(1) = 2,91$ , что эквивалентно среднему объему инспекции  $2,91 \times 20 \approx 58$  изделий.

### § 7.3. Стандарты планов приемочного контроля

Общие положения. Пример. Рассмотрим требования, предъявляемые к стандартам, определяющим способ использования выборочного контроля на практике. Прежде всего стандарт планов выборочного контроля должен быть достаточно простым, чтобы им мог пользоваться персонал предприятий, не имеющий специальной математической подготовки. Стандарт должен содержать сравнительно большое количество планов, имеющих различные оперативные характеристики. Это позволит гибко изменять планы контроля в соответствии с изменениями качества продукции и требований потребителя. Помимо указания конкретного плана стандарта, должны быть приведены различные характеристики используемого плана. Например, желательно иметь графики оперативных характеристик и объемы инспекции, как функции от доли засоренности партии. Наконец, желательно, чтобы в стандарте были указаны планы различных типов: планы типа однократной, двукратной выборки и планы последовательного типа. Использование стандарта должно предусматривать те или иные гарантии производителю от ложного бракования хороших партий и потребителю от пропуска плохих партий. Таким образом, использование стандарта должно, как минимум, оказывать давление на производителя в сторону улучшения качества. Подобное давление может быть учтено с помощью введения более жесткого контроля в тех случаях, когда проведенные оценки качества показали с большой степенью достоверности недопустимое его ухудшение. Наоборот, в тех случаях, когда качество весьма высокое, можно использовать планы облегченного контроля.

В настоящее время имеется ряд публикаций, посвященных изложению различных стандартов (см. [4]—[8]). Кроме того, в ряде учебников и монографий по математической статистике также имеются главы и таблицы планов приемочного контроля. Здесь мы отметим книги Коудена [6] и Шора [9]. Ниже дается краткий обзор ряда широко используемых стандартов приемочного контроля.

В частности, изложение Колумбийского стандарта дополнено соответствующими таблицами. Такие таблицы были включены в книгу в связи с тем, что материалы, относящиеся к Колумбийскому

стандарту, ранее в отечественной литературе не публиковались. В последнее время в США широкое применение нашел так называемый Mil St 105 (A,B). Мы опускаем описание этого стандарта, так как такое описание читатель может найти в книге Коудена [6]. В Англии был принят к использованию стандарт DEF-131. Его описание, а также полезные критические замечания к другим стандартам приведены в английском статистическом журнале (см. [8]).

Рассмотрим один из простейших примеров построения стандартов планов приемочного контроля. Будем предполагать, что КО не является разрушительной и что все выявленные дефектные изделия заменяются полными годными изделиями. Для простоты ограничимся случаем планов типа однократной выборки  $(n, c)_{23}$ .

Предполагаем также, что в вычислениях гипергеометрическое распределение может быть заменено пуассоновским. Допустим теперь, что потребитель готовой продукции настаивает на введении такого контроля, при котором значение доли дефектных изделий в принятой продукции в среднем не превышает некоторой заданной величины. В этом случае числовой характеристикой, показывающей, насколько эффективным является приемочный контроль, будет так называемое *предельное выходное качество*  $q_m$ . Эта характеристика определяется следующим образом. Если на КП поступила партия объема  $N$ , содержащая  $D$  дефектных изделий, то  $D_{\text{вых}}$  — число дефектных изделий в принятой потребителем продукции — определяется соотношениями  $D_{\text{вых}} = 0$ , если партия забракована с решением  $D_2$ ,  $D_{\text{вых}} = D - d$ , если партия принята с решением  $D_3$ . Здесь  $d$  — число дефектных изделий, обнаруженных в выборке. Среднее значение для доли засоренности  $\bar{q}_{\text{вых}}(q) = M\left(\frac{D_{\text{вых}}}{N}\right)$  в принятой продукции является функцией от засоренности  $q$  продукции, поступающей на контроль. Для планов типа однократной выборки  $(n, c)$

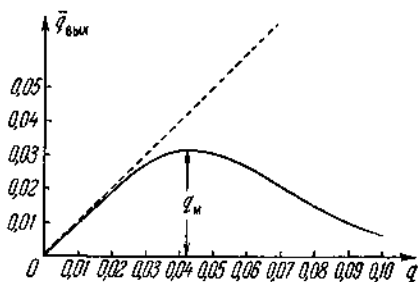


Рис. 7.3.1.

предельное выходное качество  $q_m$ . Эта характеристика определяется следующим образом. Если на КП поступила партия объема  $N$ , содержащая  $D$  дефектных изделий, то  $D_{\text{вых}}$  — число дефектных изделий в принятой потребителем продукции — определяется соотношениями  $D_{\text{вых}} = 0$ , если партия забракована с решением  $D_2$ ,  $D_{\text{вых}} = D - d$ , если партия принята с решением  $D_3$ . Здесь  $d$  — число дефектных изделий, обнаруженных в выборке. Среднее значение для доли засоренности  $\bar{q}_{\text{вых}}(q) = M\left(\frac{D_{\text{вых}}}{N}\right)$  в принятой продукции является функцией от засоренности  $q$  продукции, поступающей на контроль. Для планов типа однократной выборки  $(n, c)$

$$\bar{q}_{\text{вых}} = \frac{1}{N} \sum_{d=0}^c (D-d) B_{ND}^{nd}. \quad (7.3.1)$$

Вид графика  $\bar{q}_{\text{вых}}$  для плана  $(100,1)_{23}$  и  $N=10000$  показан на рис. 7.3.1. Из рисунка видно, что  $\bar{q}_{\text{вых}} < q$  и достигает в некоторой точке  $q_n$  своего максимального значения  $q_m$ . В общем

случае  $q_m = \max_{0 \leq q \leq 1} \bar{q}_{\text{вых}}(q)$  называется *предельным выходным качеством* для используемого плана. Для случая пуассоновского приближения при использовании плана типа  $(n, c)_{23}$  из (7.3.1) и (7.2.4) получаем

$$q_m = \max_{0 \leq q \leq 1} qL_c(nq) = \frac{1}{n} \rho_c, \quad (7.3.2)$$

где  $\rho_c = \max_{x > 0} L_c(x)$ . Таблица значений  $\rho_c$  для  $c = 0(1)20$  дана в приложении. Если, например, используется план выборочного контроля, для которого предельное выходное качество равно  $q_m = 3\%$ , то это означает, что в среднем засоренность принятой продукции будет не более 3%. Итак, независимо от доли брака в предъявляемых партиях показатель  $q_m$  может быть использован потребителем в качестве требования, накладываемого на используемые планы. Напоминаем, что эта характеристика пригодна только для планов, в которых единственными возможными решениями являются  $D_2$  и  $D_3$ . Для гарантии требований потребителя выберем предельное выходное качество  $q_m$  равным предельно допустимой доле брака в принятой продукции. Пусть  $q_n$  — средняя доля засоренности дефектными изделиями при нормальном ходе производства. Если  $N$  — объем партии, то  $\theta = Nq_n$  — среднее число дефектных изделий в партии при нормальном ходе производства. В таблицах будем задавать относительное значение  $k_m = \frac{q_m}{q_n}$ . Так как контроль не является разрушительным, а браковка партии означает ее сплошную проверку, то целесообразно отбирать такие планы  $(n, c)_{23}$ , для которых среднее значение объема полной инспекции, задаваемое формулой (7.2.7), будет минимальным. Таким образом, приоритет отдается потребителю, который, зная  $q_n$ , выбирает значение  $q_m$ . Обычно  $k_m > 1,5 \div 2$ , так как в противном случае процент проверяемой продукции становится соизмеримым с общим количеством продукции, предъявляемой на контроль. Если использовать пуассоновское приближение (7.2.12), то

$$\begin{aligned} k_m &= \max_{0 \leq q \leq 1} \frac{\bar{q}_{\text{вых}}(q)}{q_n} \cong \max_{0 \leq q \leq 1} \left[ \frac{1}{\theta} \sum_{d=0}^c (Nq - d) \frac{(nq)^d}{d!} e^{-nq} \right] \cong \\ &\cong \max_{nq \geq 0} \frac{qL_c(nq)}{q_n} \left[ 1 - \frac{nq_n}{\theta} \right] = \frac{\rho_c \left( 1 - \frac{nq_n}{\theta} \right)}{nq_n}, \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

где  $\theta = Nq_n$ .

Таким образом, если значение приемочного числа  $c$  известно, то объем выборки  $n$ , исходя из (7.3.3), можно найти по формуле

$$n \cong \frac{1}{q_n} \frac{\rho_c \theta}{k_m \theta + \rho_c} = N \frac{\rho_c}{k_m \theta + \rho_c}. \quad (7.3.4)$$

Чтобы отобрать план, обеспечивающий заданное значение  $k_m$  и имеющий минимальное значение для среднего объема инспекции, надо среди всех планов типа  $(n, c)_{23}$ , где  $n$  находится из (7.3.4), отобрать тот, для которого является минимальным

$$\frac{M_{12}(q_n)}{N} \cong \left(1 - \frac{n}{N}\right) [1 - L_c(nq_n)] + \frac{n}{N}.$$

В таблице 24 приложения для значений  $k_m = 1,25 (0,25) 3,0 (0,5) 6 (1) 10, 12, 15$  приведены критические значения параметра  $\theta_c$ . Если  $\theta \leq \theta_0$  при заданном значении  $k_m$ , то приемочное число надо полагать равным нулю, если же  $\theta_{i-1} \leq \theta \leq \theta_i$ , то надо полагать  $c = i$ .

Рассмотрим пример. Пусть потребитель, зная, что  $q_n = 0,01$ , выбрал значение  $q_m = 0,02$ . На контроль подается партия объема  $N = 750$ . Из колонки  $k = 2$  таблицы 24 приложения находим, что  $\theta_1 = 6,723$ ,  $\theta_2 = 17,854$ . В нашем примере  $\theta = Nq_n = 750 \cdot 0,01 = 7,5$ ,  $\theta_1 < \theta < \theta_2$ , следовательно,  $c = 2$ . Из таблицы 23 приложения находим  $p_2 = 1,37$ , откуда по формуле (7.3.4) находим объем выборки  $n = 62,77$ , или, округлив до ближайшего целого числа, окончательно находим, что наиболее экономным является использование плана  $(235, 2)_{23}$ .

Ташкентский проект стандарта. В заключение этого параграфа мы дадим краткий обзор существующих стандартов.

Обзор начинаем с выпущенного недавно в г. Ташкенте проекта стандарта планов контроля по качественному признаку. В предварительном издании стандарт состоит из пяти выпусков, в которых даны общие положения о статистическом контроле, приведены формулы для вычисления различных показателей планов типа  $(n, c)_{ij}$ ,  $ij = 1, 2, 3$ , а также формулы для оценки качества продукции, принятой по результатам контроля. Планы приводятся лишь для небольших значений приемочных чисел  $c = 0 (1) 4$  и сравнительно большого набора возможных объемов выборок  $n_i = 12, 15 (5) 30 (10) 60, 75 (25) 200 (50) 300 (100) 600, 750 (250) 1000$ . Кроме того, для  $c = 0$  даны значения  $n_i = 5 (1) 10$ . Для каждого плана  $(n, c)$  возможные значения относительного объема выборки  $v = \frac{n}{N} = 0,5 (0,1) 0,1; 0,05; 0$ . Значение  $v = 0$  используется в тех случаях, когда объем выборки  $n_i$  пренебрежимо мал по сравнению с объемом партии. В обширной таблице 2, помещенной в выпуске 2Б [7], для каждого плана  $(n_i, c)$  приведены различные характеристики (см. таблицу 7.3.1, на которой приведена часть таблицы 2). Здесь  $L$  — вероятность приемки партии, содержащей долю  $q_3$  дефектных изделий,  $q_1$  — средняя доля дефектных изделий в принятой потребителем партии при использовании плана  $(n, c)_{23}$ ,  $q_2$  — средняя доля дефектных изделий в принятой продукции при использовании

плана  $(n, c)_{18}$ . В таблице значения  $q_i$  для удобства использования умножены на  $10^4$ .  $\mu_1$  равно отношению среднего объема инспекции для планов  $(n, c)_{28}$  к среднему числу принятых изделий. Значения  $\mu_1$  даны умноженными на  $10^3$ . Значения  $L$  являются входным параметром.

Таблица 7.3.1

$$n = 125, c = 1$$

$L$	...	$\frac{n}{N} = 0,2$				...
		$q_3 \cdot 10^4$	$q_1 \cdot 10^4$	$q_2 \cdot 10^4$	$\mu_1 \cdot 10^3$	
0,999	...	17	13	17	201	...
0,998	...	17	14	17	202	...
0,995	...	19	15	19	204	...
.....	...	...	...	...	...	...
0,950	...	35	28	37	240	...
0,925	...	41	32	44	260	...
0,900	...	47	36	51	280	...
.....	...	...	...	...	...	...

В таблицах даны значения  $L = 0,999; 0,998; 0,995; 0,990; 0,975$  (0,025) 0,875; 0,95 (0,05) 0,50; 0,125 (0,025) 0,025, 0,010; 0,005; 0,002; 0,001. Значения предельного выходного качества  $q_n$  можно найти из столбца значений  $q_3$ , полагая его равным  $q_3$ . Задавая доли засоренности, соответствующими хорошему качеству и предельно допустимому качеству, мы можем найти значения ошибок первого и второго рода. Например, если хорошее качество соответствует засоренности  $q_3 = 0,35\%$ , то из таблицы 7.3.1 находим, что вероятность приемки партии  $L = 0,95$ , соответственно ошибка первого рода, равна 0,05. Ташкентский стандарт содержит также таблицы планов типа  $(n, c)$ , обеспечивающих заданную вероятность  $\alpha$  приемки партий для определенного набора значений  $q_n$  доли дефектных изделий. Таблицы даны для значений  $\alpha = 0,95; 0,90; 0,50; 0,10; 0,05$ . При этом  $q_n = 0,125; 0,1; 0,09; 0,08$  (0,005) 0,04 (0,0025) 0,01 (0,001) 0,002. Для значения  $\alpha = 0,1$  даны также уровни  $q_{0,1} = 0,35$  (0,05) 0,15; 0,008, для  $q_{0,05} = 0,40$  (0,05) 0,15, для  $q_{0,5} = 0,20; 0,15; 0,0015; 0,001$  (0,0002) 0,0002, для  $q_{0,95}$  и  $q_{0,90} = 0,0015; 0,001$  (0,0002) 0,0002; 0,0001. Приводятся также таблицы планов, обеспечивающих заданное значение предельного выходного качества  $q_m$ . Набор уровней  $q_n$  совпадает с набором  $q_{0,90}$ . В таблице 7.3.2. даны части таблиц такого сорта. Приведены также таблицы, в которых для каждого плана  $(n_i, c)$  дана сводка его показателей  $q_n, q_m$  для  $\frac{n}{N} = 0,5$  (0,1) 0,1, 0,05, 0.

Некоторые из формул для последующей оценки качества продукции по результатам контроля, взятые из ташкентских стандартов, приводятся нами в § 7. 5. В выпусках даны указания по отбору экономических планов контроля, однако в них подход отличен от излагаемого нами в § 7.4.

Таблица 7.3.2

$q_{0,1}$	$c=0$		$c=1$		...
	$N$	$n$	$N$	$n$	
...	...	...	...	...	...
0,60%	1—599 600—799 ≧ 800	все 300 400	1—1199 1200—3000 ≧ 3001	все 600 750	...
0,50%	1—799 800—2185 ≧ 2186	все 400 500	1—1499 1500—7500 ≧ 7501	все 750 1000	...
...	...	...	...	...	...
$q_M$	$c=0$		$c=1$		...
	$N$	$n$	$N$	$n$	
...	...	...	...	...	...
6,00%	1—9 10—11 12—64 ≧ 65	все 5 6 7	1—23 24—39 ≧ 41	все 12 15	...
5,50%	1—11 12—23 ≧ 24	все 6 7	1—23 24—29 30—169 ≧ 170	все 12 15 20	...
...	...	...	...	...	...

Стандарты Доджа и Ромига. Широко известной монографией, посвященной вопросам приемочного контроля, является книга Доджа и Ромига «Таблицы выборочного контроля—однократная и двукратная выборки». В книге дано описание принципов

выборочного контроля по качественному признаку. Дано описание методики, на основе которой были составлены таблицы. Планы, представленные в книге Доджа и Ромига, разбиваются на две группы. Одни обеспечивают заданные значения вероятности 0,1 для приемки партий, содержащих долю  $q_{0,1}$  дефектных изделий, другие — заданное значение  $q_m$  для предельного выходного качества. При этом в таблицах приведены планы, дающие минимум среднего значения инспекции в условиях принятия решений  $D_2, D_3$  для заданной средней засоренности продукции  $q_{ср}$  дефектными изделиями. Значительную часть книги занимают графики оперативных характеристик планов, указанных в таблицах. Приведем последовательность действий, которые надо произвести при использовании планов Доджа и Ромига. (1) Надо уяснить, какие параметры изделий надо проверять и какие из проверенных изделий считать дефектными. (2) Уточнить понятие партии и подсчитать ее объем  $N$ . (3) Выбрать вид защиты от принятия партий, содержащих большое количество дефектных изделий. В данном случае делается выбор между двумя показателями  $q_{0,1}$  или  $q_m$ . (4) Решается вопрос о выборе между планами типа однократной и двукратной выборки, при этом во внимание могут быть приняты результаты пункта (7). (5) Проводится оценка  $q_{ср}$  — средней засоренности продукции дефектными изделиями. (6) По таблицам (примеры которых мы приводим ниже) находится соответствующий план выборочного контроля. При этом план отыскивается с учетом выбора значения  $q_{0,1}$  или  $q_m$  и значений  $q_{ср}$  и  $N$ . (7) Отыскивается чертеж со значением оперативной характеристики, в зависимости от вида которой могут быть внесены изменения в выбор плана. (8) Проводится контроль партии в соответствии с выбранным планом. (9) Результаты контроля регистрируются для последующего пользования при оценке качества продукции.

В таблицах приведены только усеченные планы типа двукратной выборки  $(n_1, n_2, c_1, c_2)_{2323}$ . В таблице 7.3.3 приведены примеры таблиц из книги Доджа и Ромига.

Таблица 7.3.3

а)  $q_{0,1} = 4\%$ 

N	..	0,41% $\leq q_{ср}\%$ $\leq$ 0,80%			
		n	c	$q_m\%$	
...	...	...	...	...	...
201—300	...	85	1	0,71	...
301—400	...	90	1	0,72	...
401—500	...	90	1	0,77	...
501—600	...	125	2	0,87	...
...	...	...	...	...	...

Продолжение табл. 7.3.3  
б)  $q_{0,1} = 5\%$

N	...	0,51% $\leq q_{cp}$ % $\leq 1,00\%$					$q_M$	...
		1-я выборка		2-я выборка				
		$n_1$	$c_1$	$n_2$	$n_1 + n_2$	$c_2$		
1001—2000	...	...	...	...	...	...	...	...
2001—3000	...	55	0	120	175	4	1,4	...
3001—4000	...	55	0	150	205	5	1,5	...
4001—5000	...	90	1	140	230	6	1,6	...
...	...	90	1	165	255	7	1,8	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

в)  $q_M = 3\%$ 

N	...	1,21% $\leq q_{cp}$ % $\leq 1,80\%$			$q_{0,1}$ %	...
		$n$	$c$	$q_{0,1}$ %		
501—600	...	...	...	...	...	
601—800	...	42	2	12,4	...	
801—1000	...	43	2	12,1	...	
1001—2000	...	44	2	11,8	...	
...	...	65	3	10,2	...	
...	...	...	...	...	...	

г)  $q_M = 3\%$ 

N	...	1,21% $\leq q_{cp}$ % $\leq 1,80\%$					$q_{0,1}$ %	...
		1-я выборка		2-я выборка				
		$n_1$	$c_1$	$n_2$	$n_1 + n_2$	$c_2$		
501—600	...	...	...	...	...	...	...	
601—800	...	26	0	54	80	4	10,7	
801—1000	...	26	0	54	80	4	10,7	
1001—2000	...	27	0	58	85	4	10,3	
...	...	49	1	76	125	6	9,1	
...	...	...	...	...	...	...	...	

Приведем пример на использование планов Доджа и Ромига. Пусть  $q_{cp} = 0,65\%$ ,  $N = 3563$ , предельное допустимое качество выбрано равным  $q_{0,1} = 5\%$ , решено использовать планы типа двукратной усеченной выборки. Соответствующая часть таблицы показана на таблице 7.3.3, б. Из этой таблицы находим, что надо использовать план (90, 140, 1, 6). При этом предельное выходное



качество  $q_m = 1,6\%$ . В книге отдельно даны графики оперативных характеристик рекомендуемых планов контроля типа однократной и двукратной выборок. На рис. 7.3.2 приведен пример графиков оперативных характеристик. Ради экономии места мы на одном графике, соответствующем планам со значением  $q_{cp} = 0,25\%$ , приводим кривые оперативных характеристик двух однократных и одного двукратного плана. Отметим, что однократные планы, обеспечивающие заданное значение  $q_m$ , найденные из таблицы 24 приложения, и формулы (7.3.4) практически совпадают или очень близки к соответствующим однократным планам Доджа и Ромнга, задаваемым таблицами типа, указанного на таблице 7.3.3, в.

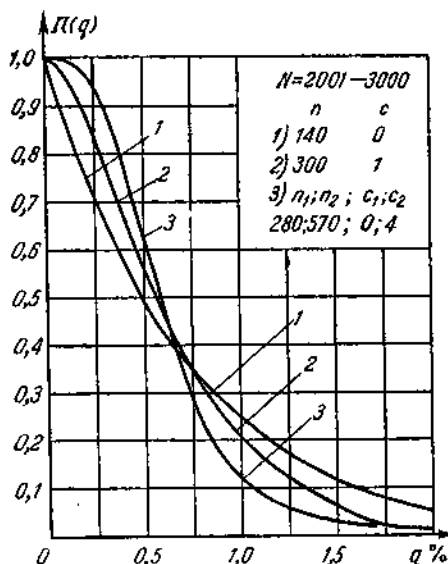


Рис. 7.3.2.

Колумбийский стандарт. Во время второй мировой войны в США проводилась работа по составлению планов приемочного контроля. В послевоенные годы статистическая исследовательская группа колумбийского университета выпустила книгу [5] «Выборочный контроль», в которой систематически излагаются идеи приемочного контроля. В этой книге дан большой набор планов типа однократной, усеченной двукратной выборки, в которой  $n_2 = 2n_1$ , и типа последовательного анализа, при котором последовательно проверяются выборки равного объема. Значительную часть книги занимают таблицы троек планов указанных выше трех типов. В этой части на каждой странице даны параметры трех типов планов, подобранные так, чтобы их оперативные характеристики были близки друг к другу. Все планы построены таким образом, что они обеспечивают в определенном интервале значений доли дефектных изделий  $q$  вероятность приемки хороших партий не менее 0,95. Такие интервалы будем называть *интервалами приемлемого качества*. Границами этих интервалов являются следующие числа, выраженные в процентах: 0,024; 0,035; 0,06; 0,12; 0,17; 0,22; 0,32; 0,65; 1,2; 2,2; 3,2; 4,4; 5,3; 6,4; 8,5. Предусмотрено использование пяти уровней инспекции I, II, III, IV, V. Уровень III считается нормальным. При использовании уровней II и I контроль становится менее жестким, и

объем инспекции составляет соответственно  $\frac{3}{4}$  и  $\frac{1}{2}$  от объема по уровню III. При использовании уровней IV и V контроль ожесточается, объем инспекции возрастает соответственно в 1,5 и 2 раза. В приводимой таблице 7.3.4 даны значения кодовых чисел. Каждому кодовому числу и интервалу приемлемого качества соответствуют три плана: однократной, двукратной выборки и последовательного анализа. Параметры этих планов находятся из таблиц 20—22 приложения.

Приведем примеры. Пусть на контроль поступает партия объема  $N=350$ . Решено использовать нормальный уровень контроля. Приемлемое качество  $q_{0,95}=0,015$ . Из таблицы 7.3.4 находим, что кодовое число равно *G*. Из таблицы 20 приложения получаем, что букве *G* соответствует выборка объема 55.

Таблица 7.3.4

Таблица кодовых чисел

Объем партии	Кодовое число для уровней инспекции				
	I	II	III	IV	V
$\leq 25$	<i>A</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>
25 — 50	<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
50 — 100	<i>B</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>
100 — 200	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>
200 — 300	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>
300 — 500	<i>E</i>	<i>F</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>
500 — 1 300	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>Y</i>	<i>K</i>
1 300 — 3 200	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>Y</i>	<i>K</i>	<i>L</i>
3 200 — 8 000	<i>I</i>	<i>Y</i>	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>
8 000 — 22 000	<i>Y</i>	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>
22 000 — 110 000	<i>K</i>	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>N</i>
110 000 — 500 000	<i>L</i>	<i>M</i>	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>O</i>
> 500 000	<i>N</i>	<i>N</i>	<i>O</i>	<i>O</i>	<i>O</i>

Так как  $0,12 < q_{0,95} = 0,15 < 0,17$ , то в столбце, соответствующем интервалу приемлемого качества  $(0,15; 0,17)$ , находим, что  $c=1$ . Если мы хотим использовать план типа усеченной двукратной выборки, то из таблицы 21 приложения находим, что числу *G* и интервалу  $(0,12; 0,17)$  соответствует план  $(35, 70, 0,2)$ . Заметим, что при объеме  $N=250$  в таблице 21 приложения дано указание использовать только планы типа однократной выборки. Если решено использовать планы типа последовательных равных выборок, то из таблицы 22 приложения находим, что нужно использовать план из семи последовательных выборок по  $n=14$  изделий в каждой. Партия бракуется, если  $d(14) \geq 2$ , в противном случае берется

Таблица 7.3.5

Тип выборки	Номера выборок	Объем выборок	Приемочное число	Браковочное число
Однократная	первая	300	4	5
Двукратная	первая	200	2	7
	вторая	400	6	7
Последовательная	первая	75	*	3
	вторая	75	1	4
	третья	75	1	5
	четвертая	75	2	6
	пятая	75	3	6
	шестая	75	5	8
	седьмая	75	7	8

вторая выборка; партия бракуется, если  $d(28) \geq 2$ , в противном случае берется третья выборка; если  $d(42) \geq 2$  — партия бракуется,

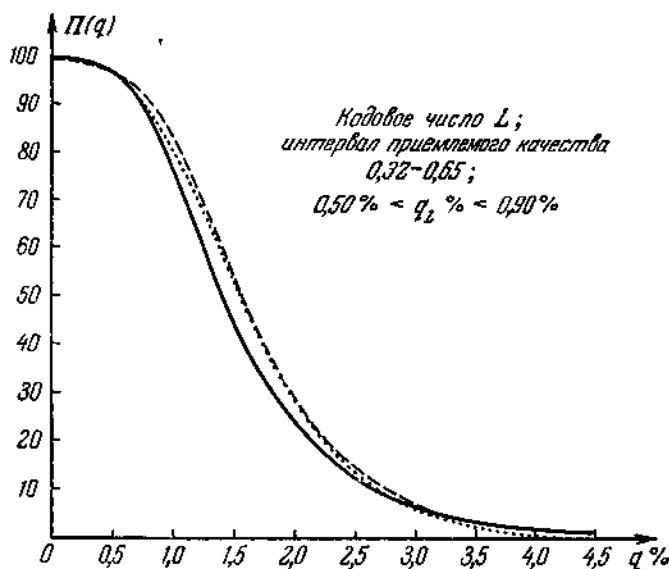


Рис. 7.3.3.

в противном случае берется четвертая выборка. Партия принимается, если  $d(56) = 0$ , бракуется, если  $d(56) \geq 2$ ; берется пятая выборка, если  $d(56) = 1$ . По результатам пятой выборки при  $d(70) = 0$  при-

нимается,  $d(70) \geq 2$  бракуется, при  $d(70) = 1$  берется шестая выборка. По результатам шестой выборки при  $d(84) = 1$  принимается, при  $d(84) \geq 3$  бракуется и при  $d(84) = 2$  берется последняя, седьмая, выборка. Если  $d(98) = 2$ , партия принимается, если же  $d(98) \geq 3$ , партия бракуется. Таким образом, в таблицах 21, 22 приложения, в колонках, озаглавленных «Пр», даны значения приемочных чисел, знак «\*» означает, что решение о приемке еще не принимается, а в колонках, озаглавленных «Бр», даны значения браковочных чисел. На таблице 7.3.5 приведен пример набора трех типов планов, соответствующих кодовому числу  $L$  и интервалу  $0,32 - 0,65\%$  приемлемого качества,  $0,50\% < q_L\% < 0,90\%$ . Значения оперативных характеристик этих планов показаны на рис. 7.3.3.

В книге [5] для наглядности кривые оперативных характеристик различных типов планов были напечатаны разным цветом. Однако это привело к большим относительным смещениям линий, что весьма снижает ценность информации ввиду необходимости в большей точности при малых значениях доли  $q$ . Этот недостаток был бы не так сильно выражен, если бы авторы использовали равномерный масштаб изображения по оси ординат, растянув его при вероятностях, близких к единице.

#### § 7.4. Экономичные планы контроля

Экономическая оценка эффективности приемочного контроля. В предыдущем параграфе был дан краткий обзор существующих стандартов выборочного контроля. Интересы производителя учитывались либо заданием величины риска производителя, либо использованием планов, дающих в среднем минимальное количество инспекции при заданном  $q_m$ , что возможно только в случае принятия решений  $D_2, D_3$ . Более гибкая система планов, включающая случаи разрушительного и неразрушительного контроля, может быть построена при учете стоимостных факторов, связанных с введением контроля. Разработке наиболее экономичных, рациональных методов выборочного контроля в последнее время уделяется значительное внимание (см. [10]—[11]). Трудность решения этой проблемы состоит главным образом в правильном учете внешних условий, факторов, предопределяющих выбор методов контроля. По-видимому, универсальной методики выбора рациональных планов контроля, пригодной на все случаи жизни, не существует. Об этом говорят многочисленные критические замечания к уже существующим методам выборочного контроля (см., например, [8]). В настоящем параграфе дается один из возможных подходов к построению стандартов экономичных планов контроля. Идея такого подхода была предложена одному из авторов книги

академиком А. Н. Колмогоровым (см. [13]). Основные расчеты были выполнены в лаборатории статистических методов МГУ.

Решение о приемке или браковке партии, содержащей долю  $q$  дефектных изделий, связано с ущербом двоякого рода. С одной стороны, не все изделия в партии являются дефектными, поэтому, решив забраковать партию, мы несем ущерб  $E_{бр}(q)$  от браковки годных изделий. С другой стороны, приняв решение о приемке партии, мы принимаем содержащиеся в ней дефектные изделия, использование которых на последующих этапах производства или

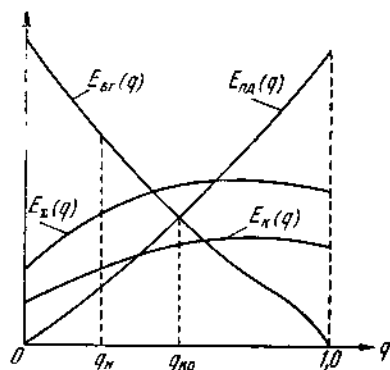


Рис. 7.4.1.

потребления приведет к ущербу  $E_{нд}(q)$ . Примерный вид  $E_{бр}(q)$ ,  $E_{нд}(q)$ , как функций от  $q = \frac{D}{N}$ , показан на рис. 7.4.1. Введем понятие  $q_{кр}$  посредством равенства  $E_{нд}(q_{кр}) = E_{бр}(q_{кр})$ . Для  $q = q_{кр}$  решения о приемке или браковке партий эквивалентны с экономической точки зрения.

Если  $q < q_{кр}$ , то выгоднее принять данную партию. Если же  $q > q_{кр}$ , то, наоборот, выгоднее забраковать ее. Так просто обстоит дело только в том случае, когда нам известны значения  $q$  и  $q_{кр}$ . На практике значение  $q$  неизвестно, и его можно найти, только

проверив все изделия, входящие в партию. Значение  $q_{кр}$  можно задать лишь приближенно, так как получение явного выражения для  $E_{нд}(q)$  является трудной экономической задачей. Наша основная гипотеза заключается в том, что при нормальном ходе производства, когда соблюдаются все основные условия технологии, доля засоренности дефектными изделиями  $q$  является меньше  $q_{кр}$  и вполне удовлетворяет потребителя. Предполагается, что при нормальном ходе производства значения  $q$  группируются в непосредственной близости от среднего значения  $q_n$ . Если же предъявленная партия выпущена при наличии существенных нарушений технологии, то доля засоренности  $q$  много больше  $q_n$  и часто больше значения  $q_{кр}$ . Итак, если партия выпущена при нормальном ходе производства, то она содержит небольшое число дефектных изделий, ущерб от приемки которых много меньше ущерба от браковки этой партии. Если же партия выпущена при наличии нарушений технологии, то она содержит много дефектных изделий, ущерб от приемки которых часто превышает ущерб от браковки всей партии. Однако еще раз подчеркнем, что нам неизвестно, выпущена данная партия при

нормальном ходе производства или нет. Чтобы определить это, мы должны выделить дополнительные средства  $E_k(q)$ , обеспечивающие проведение контроля. Эти расходы представляются в виде суммы двух слагаемых: среднего ущерба принятия решения о браковке и стоимости контроля части изделий.

Таким образом,  $E_k(q)$  равно среднему ущербу только производителя, ущерб потребителя от приемки дефектных изделий сюда не включается. С экономической точки зрения введение контроля является целесообразным только в том случае, когда  $E_k(q) < E_{6r}(q)$  при  $q < q_{кр}$ . Конечно, контроль будет тем экономичнее, чем меньше будет отношение  $\frac{E_k(q_n)}{E_{6r}(q_n)}$ , однако при этом следует учитывать и интересы потребителя, что накладывает определенные ограничения на выбор плана контроля. При условии задания всех экономических параметров можно было бы подсчитать и суммарный ущерб  $E_{\Sigma}(q)$ , который складывается из расходов на контроль, ущерба от браковки годных изделий, если партия бракуется, и ущерба от приемки дефектных изделий, если партия принимается. В этих условиях при разумном выборе плана контроля  $E_{\Sigma}(q)$  оказывается значительно меньше  $\max[E_{па}(q), E_{6r}(q)]$  для большинства значений  $q$ . Однако вычисление  $E_{па}(q)$  затруднительно, поэтому мы ограничимся только характеристикой  $E_k(q)$ .

Средние расходы на контроль при нормальном ходе производства. Пусть контролируемая партия состоит из  $N$  изделий, среди которых  $D$  дефектных. До принятия решения было проверено  $n$  изделий, среди которых оказалось  $d$  дефектных, в общем случае  $D$ , как и  $d$ , может быть случайной величиной. Если партия выпущена при нормальном ходе производства, то  $q = \frac{D}{N} \ll 1$ , поэтому число годных изделий, оставшихся непроверенными,  $N - n - (D - d) \approx N - n$ . Рассмотрим следующие стоимостные показатели:  $\alpha$  — ущерб от браковки одного годного изделия,  $\beta$  — стоимость проверки одного изделия. В этом случае средние расходы  $E_k(q)$ , связанные с проведением контроля, равны

$$E_k(q) \approx \alpha(N - \bar{n}') [1 - \pi(q)] + \beta \bar{n}, \quad (7.4.1)$$

где  $\bar{n}$  — среднее число проверенных изделий (средний объем инспекции),  $\bar{n}'$  — среднее число проверенных изделий при условии, что партия забракована,  $1 - \pi(q)$  — вероятность браковки партии, содержащей  $D = qN$  дефектных изделий. В условиях нормального хода производства, как это отмечалось в § 7.1, можно считать, что  $q$  является случайной величиной с функцией распределения

$F_n(q)$ , среднее значение  $\int_0^1 q dF_n(q) = q_n$ . С учетом этого априорного

распределения средние расходы на контроль при нормальном ходе производства

$$E_k = \int_0^1 E_k(q) dF_n(q), \quad (7.4.2)$$

где  $F_n(q)$  растет только в точках, кратных  $N^{-1}$ .

Напоминаем основные допущения, связанные с понятием нормального хода производства. Мы предполагаем, что производство является «отлаженным» и основная часть партий выпускается при нормальном ходе производства. При наличии нарушений технологии  $q$  резко возрастает. Однако задавать при этом какое-то фиксированное распределение для  $q$  нам представляется нецелесообразным, так как трудно ожидать стационарного (в статистическом смысле) возникновения разладок определенного вида. Исходя из этого, предлагается планировать расходы на контроль только при нормальном ходе производства. При заданном уровне средних расходов  $E_k$  на проведение контроля при условиях нормального хода производства будут отыскиваться планы контроля, в данном параграфе в основном только планы типа однократной выборки, которые обеспечат практически наибольшую вероятность браковки партий, сильно засоренных дефектными изделиями.

Мы сохраняем обозначение  $(n, c)$  для планов типа однократной выборки. Однако индексы  $ij$  у  $(n, c)_{ij}$  опускаются, так как при экономическом подходе влияние вида решений, принимаемых по результатам проверки, учитывается в значениях стоимостных параметров. Для определенности мы будем предполагать, что априорное распределение для числа  $D$  дефектных изделий является биномиальным со значением параметра  $q = q_n \ll 1$ . Для плана типа однократной выборки  $(n, c)$  при  $n \gg c$ ,  $n > 20 \div 30$  можно использовать, учитывая теорему 7.2.2, пуассоновское приближение. При этом вероятность  $\pi(q_n)$  приемки партии, выпущенной при нормальном ходе

$$\pi(q_n) = \sum_{d=0}^c b_n^d(q_n) \approx L_c(nq_n), \quad (7.4.3)$$

где  $L_c(x)$  определяется формулой (7.2.14). Из (7.4.1), (7.4.2) и (7.4.3) получаем, что средние расходы, связанные с использованием плана типа  $(n, c)$  при нормальном ходе производства, равны

$$E_k = \alpha(N - n)[1 - L_c(nq_n)] + \beta n. \quad (7.4.4)$$

Разделив обе части (7.4.4) на  $\alpha N$ , получаем

$$E = \left( \frac{E_k}{\alpha N} \right) = (1 - v)[1 - L_c(\lambda_n)] + \frac{\beta}{\alpha} v, \quad (7.4.5)$$

где  $\lambda_n = nq_n$  — среднее число дефектных изделий, попадающих в выборку объема  $n$  при нормальном ходе производства. Замечая, что  $v = \frac{\lambda_n}{\theta}$ , где  $\theta = Nq_n$  — среднее число дефектных изделий, содержащихся в партии, выпущенной при нормальном ходе производства, можем переписать (7.4.5) в следующем виде:

$$E = \left(1 - \frac{\lambda_n}{\theta}\right) \left(1 - L_c(\lambda_n)\right) + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \left(\frac{\lambda_n}{\theta}\right). \quad (7.4.6)$$

Заметим, что в условиях биномиальности априорного распределения для числа дефектных изделий в партии среди предположений, приводящих к формулам (7.4.5), (7.4.6), нет ограничения на величину относительного объема выборки  $v = \frac{n}{N}$ . Так как  $q_n \ll 1$ ,

соответственно  $N \approx N - D$ , то величину  $E$  можно рассматривать как долю средств, связанных с проведением контроля, от ущерба, вызванного решением о браковке без всякого контроля партии, выпущенной при нормальном ходе производства.

При планировании расходов, связанных с проведением контроля при нормальном ходе производства, можно исходить из принципа пропорциональности этих расходов общему объему изделий в контролируемых партиях. Поясним этот принцип подробнее. Пусть объем месячной продукции по определенному типу изделий известен заранее, т. е. известно число  $N_{\text{сум}}$  изделий, которые будут выпущены в течение месяца. Эти  $N_{\text{сум}}$  изделий предъявляются на контроль в виде  $m$  партий, объемы которых равны  $N_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ ,

$N_{\text{сум}} = \sum_{i=1}^m N_i$ . Если на обеспечение контроля в течение месяца выделены средства  $E_{\text{сум}}$ , то, исходя из принципа пропорциональности, на обеспечение расходов, связанных с контролем партии объема  $N_i$ , выделяются в среднем средства  $E_i = E_{\text{сум}} \left(\frac{N_i}{N_{\text{сум}}}\right)$ . Поэтому стоимостный коэффициент  $E_i$  в левой части (7.4.6) надо полагать равным  $\frac{E_i}{\alpha N_i} = \alpha^{-1} \left(\frac{E_{\text{сум}}}{N_{\text{сум}}}\right) = E$ . Таким образом, из принципа пропорциональности следует, что стоимостный коэффициент  $E$  в (7.4.6) не зависит от объема инспектируемой партии. Это уменьшает объем таблиц и облегчает пользование ими. Однако надо иметь в виду, что при использовании принципа пропорциональности резко возрастает вероятность пропуска партий небольшого объема  $N$ , сильно засоренных дефектными изделиями. Вследствие этого на практике обычно либо объединяют несколько небольших партий в одну, либо проводят сплошную разбраковку партий, объем которых меньше заданного  $N_{\text{кр}}$ . Таким образом принцип пропорци-



ональности без всяких дополнений применим лишь в тех случаях, когда объем партий, поступающих на контроль, меняется незначительно.

Понятие о рациональности плана приемочного контроля. Для простоты вычислений будем предполагать, что объем выборки  $n$  может быть равен любому положительному числу. Поэтому, найдя соответствующее значение  $n$ , для практического использования за объем выборки надо принимать  $[n] + 1$ , если только  $n$  не целое. Здесь  $[n]$  означает целую часть числа. Так как в большинстве случаев  $n > 30$ , то погрешность от такого допущения незначительна. Для краткости записи будем обозначать парой чисел  $(\lambda_{nc}, c)$  план типа однократной выборки, у которого объем выборки  $n = \frac{\lambda_{nc}}{q_n}$ , соответственно  $\lambda_{nc} = nq_n$ , а  $c$  — приемочное число. Как и ранее,  $q_n$  означает среднюю долю засоренности при нормальном ходе производства. Если на проведение контроля выделены определенные средства, исходя из которых подсчитан стоимостный коэффициент  $E$ , то надо использовать планы  $(\lambda_{nc}, c)$ , которые удовлетворяют уравнению (7.4.6). Так как  $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{nq_n}{Nq_n} = \frac{n}{N} \leq 1$ , то при любом целом значении  $c = 0, 1, 2, \dots$  имеет смысл искать корни  $\lambda_{nc}$  только в интервале  $0 \leq \lambda_{nc} \leq \theta$ . Непосредственной проверкой легко убедиться, что вторая производная правой части (7.4.6) лишь один раз меняет свой знак в интервале  $0 \leq \lambda \leq \theta$ . Учитывая далее, что при  $\lambda = \theta$  значение правой части равно  $\frac{\beta}{\alpha}$ , можем заключить, что либо

$$f(\lambda) = \left(1 - \frac{\lambda}{\theta}\right) [1 - L_c(\lambda)] + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\lambda}{\theta}$$

является монотонно возрастающей функцией в интервале  $(0, \theta)$ , либо  $f(\lambda)$  имеет в этом интервале одну экстремальную точку (максимум), в которой значение  $f(\lambda)$  больше  $\frac{\beta}{\alpha}$ .

Если  $E_k$  — средние расходы, выделенные на обеспечение контроля партии, содержащей  $N$  изделий, то, замечая, что стоимость сплошной проверки равна  $\beta N$ , а ущерб от браковки партии равен  $\alpha(N - D_n) \approx \alpha N$ , заключаем, что выборочный контроль с экономической точки зрения целесообразен только в том случае, когда  $E = \frac{E_k}{\alpha N} < \frac{\beta N}{\alpha N} = \frac{\beta}{\alpha}$ . В противном случае выгоднее производить сплошной контроль. Таким образом, отношение  $E : \frac{\beta}{\alpha} = E_k : \beta N$ , т. е. равно доле средств, выделенных на организацию выборочного конт-

роля, по отношению к средствам, необходимым на проведение сплошного контроля. Всюду ниже мы будем предполагать, что

$E < \frac{\beta}{\alpha}$ . Учитывая сделанные выше замечания относительно характера поведения функции  $f(\lambda)$ , получаем, что при  $E < \frac{\beta}{\alpha}$  для

каждого целого значения  $c$  уравнение (7.4.6) имеет в интервале  $(0, \theta)$  единственное решение  $\lambda_{nc}$ .

Планы  $(\lambda_{nc}, c)$ , удовлетворяющие (7.4.6), являются эквивалентными с экономической точки зрения, так как при использовании любого из них средние расходы равны  $E_n = E\alpha N$ . Будем такие планы называть *допустимыми*. Заметим, что при малых отношениях  $\frac{\lambda}{\theta} \ll 1$  ( $< 0,1$ ) уравнение (7.4.6) можно заметить приближенным уравнением

$$E = 1 - L_c(\lambda_{nc}) + \gamma \lambda_{nc}, \quad (7.4.7)$$

где  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta}$  — стоимостный коэффициент. Уравнение (7.4.7) значительно проще, так как его решения являются функциями только двух параметров  $E$  и  $\gamma$ , тогда как решения (7.4.6) зависят от трех параметров:  $\frac{\beta}{\alpha}$ ,  $E$ ,  $\theta$ . Легко показать, что корни (7.4.7) меньше, чем корни уравнения (7.4.6), что затрудняет выяснение границ применимости (7.4.7) вместо (7.4.6). Заметим, однако, что решения (7.4.7) обладают свойством  $\lambda_c < \lambda_{c+1} < E: \frac{\beta}{\alpha\theta}$ . Поэтому при  $E: \frac{\beta}{\alpha} < 0,1$  можно пользоваться решениями (7.4.7) вместо (7.4.6).

Проверки показывают, что если решение  $\lambda_{nc}$  (7.4.7) удовлетворяют условию  $\frac{\lambda_{nc}}{\theta} < 0,1$ , то оно с достаточной степенью точности совпадает с соответствующим решением (7.4.6). Из семейства допустимых планов  $(\lambda_{nc}, c)$  мы должны выбрать рациональные планы. Как указывалось выше, основные показатели планов можно найти, исходя из оперативных характеристик, которые в общем случае можно считать по формуле (7.4.3). Если же учесть, что при нормальном ходе производства  $q_n \ll 1$ , то можно воспользоваться биномиальным приближением. В этом случае оперативная характеристика вычисляется по формуле

$$\pi(q) = \sum_{d=0}^c C_D^d v^d (1-v)^{D-d}, \quad (7.4.8)$$

где  $v = \frac{n}{N} = \frac{\lambda_{nc}}{\theta}$ . Наконец, в случае  $\frac{\lambda_{nc}}{\theta} < 0,1$ ,  $n = \frac{\lambda_{nc}}{q_n} > 30$ ,

$\frac{c}{D} < 0,1$  можно использовать пуассоновское приближение

$$\pi(q) = L_c(Lq) = L_c = (\lambda_{nc}k), \quad k = \frac{q}{q_n}. \quad (7.4.9)$$

На рис. 7.4.2, а даны оперативные характеристики семейства допустимых планов, удовлетворяющих (7.4.6), когда  $\frac{\beta}{\alpha} = 0,063$ ,  $E = 0,35$ ,  $\theta = 10$ , а приемочное число  $c = 0, 1, 2, \dots, 14$ . По оси ординат отложены значения оперативной характеристики, а по оси

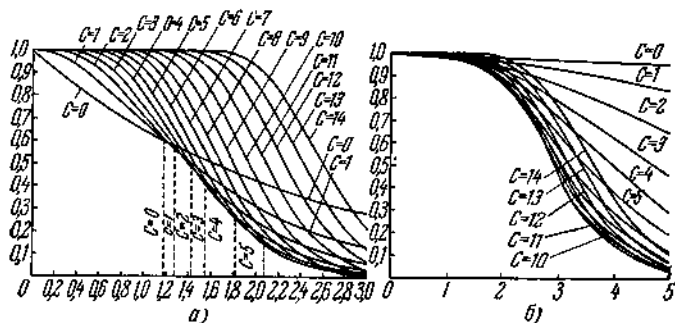


Рис. 7.4.2.

абсцисс — значения  $k = \frac{D}{\theta} = \frac{q}{q_n}$ , показывающие степень засоренности дефектными изделиями относительно средней засоренности при нормальном ходе производства. В этом случае  $\nu_c = \frac{n}{N} > 0,1$  для  $c > 0$ , поэтому при построении графиков было использовано биномиальное приближение (7.4.8). Для наглядности графики даны в виде сплошных линий. На рис. 7.4.2, б изображены оперативные характеристики семейства допустимых планов для значений  $E = 0,01$ ,  $\theta = 80$ . Так как  $\theta \gg 1$ , то представляется целесообразным использовать приближение (7.4.7) для значения  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = 0,0025$ . Действительно, в этом случае при любом  $c \lambda_{nc} < \frac{E}{\gamma} = 4$ , а относительный объем выборки  $\frac{\lambda_{nc}}{\theta} < 0,05$ , так что решения (7.4.6) и (7.4.7) практически совпадают. Графики оперативных характеристик, изображенные на рис. 7.4.2, б, построены, исходя из пуассоновского приближения (7.4.9).

При нормальном ходе производства все допустимые планы эквивалентны с экономической точки зрения. Однако они резко раз-

личаются, когда на контроль поступают партии, сильно засоренные дефектными изделиями. Естественно из допустимых планов отбирать такие, при использовании которых с большей вероятностью бракуются партии, сильно засоренные дефектными изделиями. Из рис. 7.4.2, а, б видно, что при различных значениях

$k = \frac{q}{q_n}$  наилучшими в этом смысле являются различные планы. На-

пример, для параметров рис. 7.4.2, а в интервале (1,550÷1,815) значений  $k$  наилучшим планом является ( $\lambda_{nc} = 3,20$ ;  $c = 4$ ), а в интервале (1,815÷2,075) — план ( $\lambda_{nc} = 3,77$ ;  $c = 5$ ). В реальных условиях производства неизвестно, в каком интервале находится значение  $k$  для инспектируемой партии. Поэтому целесообразно использовать тот план, оперативная характеристика которого лежит по возможности ближе к нижней огибающей семейства оперативных характеристик допустимых планов. Из рис. 7.4.2, а, б видно, что такие планы существуют, например, для параметров рис. 7.4.2, б; такими планами являются ( $\lambda_{n9} = 3,24$ ;  $c = 9$ ), ( $\lambda_{n10} = 3,55$ ;  $c = 10$ ). Многочисленные проверки показали, что планы, у которых оперативные характеристики практически равномерно близки к нижней огибающей всего семейства допустимых планов, существуют в весьма широкой области значений параметров  $\frac{\beta}{\alpha}$ ,  $E$ ,  $\theta$ ,  $(E, \gamma)$ .

Условимся такие планы называть *рациональными*.

Рассмотрим теперь несколько возможных подходов к отбору рациональных планов контроля.

Модель 1. Предположим, что относительный объем выборки

$\frac{n}{N} \ll 1$ , так что можно воспользоваться уравнением (7.4.7). Пусть

каждая забракованная партия, содержащая  $D$  дефектных изделий, заменяется партией, выпущенной при нормальном ходе производства, и, следовательно, содержит в среднем  $\theta = Nq_n$  дефектных изделий. Так будет, в частности, тогда, когда операция контроля является разрушительной. Если ограничиться случаем пуассоновского распределения для числа  $d$  дефектных изделий, обнаруженных в выборке объема  $n$ , то число  $D_{np}$  принятых дефектных изделий

$$D_{np} = \begin{cases} D - d, & d = 0, \dots, c \text{ с вероятностью } \left(\frac{\lambda^d}{d!}\right) e^{-\lambda}, \\ \theta - d, & d = 0, \dots, c \quad \gg \quad \left(\frac{\lambda_n^d}{d!}\right) e^{-\lambda_n} P_c(\lambda, \lambda_n), \end{cases} \quad (7.4.10)$$

где  $\lambda = nq$ ,  $\lambda_n = nq_n$ ,  $P_c(\lambda, \lambda_n) = [1 - L_c(\lambda)][L_c(\lambda_n)]^{-1}$ . Показателем «фильтрующей» способности плана  $(\lambda_{nc}, c)$  может служить

$k_{np}(k) = \frac{MD_{np}}{\theta}$  — отношение среднего числа принятых дефектных изделий, к среднему числу дефектных изделий, выпущенных при нормальном ходе производства. При этом  $k_{np}$  рассматривается как функция от  $k = \frac{q}{q_n} = \frac{D}{\theta}$ .

Из формулы (7.4.10), учитывая предположение  $\frac{n}{N} \ll 1$ , легко получить явное выражение для функции фильтрации

$$k_{np,c}(k) \cong (k-1) L_c(\lambda_n k) + 1. \quad (7.4.11)$$

Из этой формулы следует, что для всех значений  $k > 1$   $k_{np}(k) > 1$ , а при  $k \rightarrow \infty$   $k_{np,c}(k) \downarrow 1$ . На рис. 7.4.3 приведены графики функций

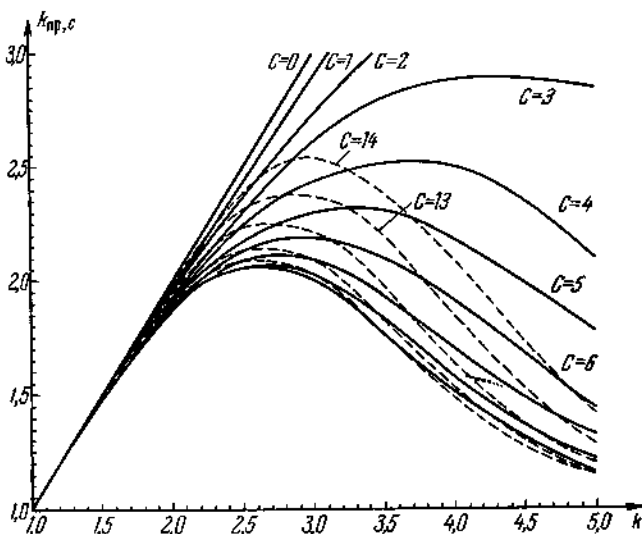


Рис. 7.4.3.

фильтрации, семейства допустимых планов, соответствующих значению  $E = 0,01$ ,  $\gamma = 0,0025$ .

Оперативные характеристики этих планов даны на рис. 7.4.2, б. Как видно из рис. 7.4.3, практически равномерно наилучшей фильтрацией обладает план ( $\lambda_n = 3,24$ ;  $c = 9$ ), у которого максимальное значение  $k_9 = \max_{k \geq 1} k_{np,9}(k)$  является минимальным по сравнению со значениями  $k_c = \max_{k \geq 1} k_{np,c}(k)$  для других значений  $c \neq 9$ .

Из рис. 7.4.2, б мы видим, что этот план является рациональным.

Как показали численные расчеты, рациональность допустимого плана  $(\lambda, c)$  в широкой области значений параметров  $E, \gamma$  совпадает со свойством минимальности значения  $k_c$ . Исходя из этого, для различных значений параметров  $E$  и  $\gamma$  был проведен отбор планов, обладающих минимальными значениями  $k_c$  по сравнению с другими допустимыми планами. Основные вычисления были произведены в вычислительном центре МГУ.

Результаты вычислений представлены в таблице 25 и соответствующей этой таблице номограмме (см. приложение). Значения стоимостного коэффициента  $E_i$  ( $E_i > E_{i+1}$ ) выбирались таким образом, чтобы  $\ln \left( \frac{E_i}{E_{i+1}} \right) \cong 0,1$ . В первом левом вертикальном столбце указаны значения приемочных чисел  $c$  или  $c \div c + 1$ . В остальных столбцах, соответствующих различным значениям  $E_i$ , даны соответственно величины  $\lg \gamma_c$  и  $\lg \lambda_c$  или  $\lg \lambda_{\frac{c}{c+1}}$ ,  $\lg \lambda'_{\frac{c}{c+1}}$  и  $\lg \lambda''_{\frac{c}{c+1}}$ .

Если выбрано значение  $E_i$  и для инспектируемой партии  $\lg \gamma''_{\frac{c-1}{c}} \leq \lg \gamma \leq \lg \gamma'_{\frac{c}{c+1}}$ , то для рационального плана приемочное

число равно  $c$ , при этом значение  $\lg \lambda_{nc}$  находится линейной интерполяцией по  $\lg \lambda''_{\frac{c-1}{c}}$  и  $\lg \lambda'_{\frac{c}{c+1}}$ . Для повышения точности ли-

нейной интерполяции для небольших значений  $c=0, \dots, 4$  были даны промежуточные значения  $\lg \gamma_c$  и соответствующие им значения  $\lg \lambda_c$ . В номограмме приложения по оси абсцисс отложены значения  $\lambda = n_c q$ , где  $n_c$  — объем выборки. При этом значения  $\lambda > 0,5$  наносились в обычном масштабе, а значения  $\lambda < 0,5$  — в логарифмическом масштабе. По оси ординат в логарифмическом масштабе отложены значения стоимостного коэффициента расходов  $E$ . Каждой паре значений  $E$  и  $\gamma$  соответствует рациональный план  $(\lambda, c)$ . Если зафиксировать значение  $\gamma = \gamma_i = \text{const}$  и менять  $E$ , то для рационального плана  $\lambda = g(E, \gamma_i)$ . Функция  $\lambda = g(E, \gamma_i)$  — кусочно-гладкая и при некоторых значениях  $E$  имеет скачки. В номограмме изображена сетка  $\lambda$ -линий, соответствующих различным значениям  $\gamma_i$ . При этом оказалось удобным выбирать значения  $\gamma_i > \gamma_{i+1}$  так, чтобы  $\lg_{10} \left( \frac{\gamma_i}{\gamma_{i+1}} \right) \cong 0,1$ . При скачкообраз-

ном изменении  $\lambda$  значение приемочного числа  $c$  изменяется на 1. Для значений  $\gamma < 0,16$  при увеличении  $E$   $\lambda$  увеличивается, а  $c$  скачками возрастает на 1. Непрерывные куски линий  $\lambda = g(E, \gamma_i)$ , соответствующие одному значению  $c$ , объединены в зоны, соединенные горизонтальными пунктирными линиями. Значения приемочных чисел  $c$ , которым соответствуют эти зоны, крупным шрифтом даны на полях номограммы. Пунктирные линии соединяют

значения функции  $\lambda = g(E, \gamma_i)$  в точках разрыва. Над этими пунктирными линиями указаны значения стоимостного параметра  $\gamma_i$ . Итак, при фиксированном значении  $E$  каждому  $c$  соответствует интервал возможных значений  $\lambda$ , при которых существуют рациональные планы. В промежутках между этими интервалами рациональных планов нет. Ниже под осью абсцисс для различных приемочных чисел  $c$  можно вычертить шкалы значений точек  $k$ , показывающих, при каком относительном увеличении засоренности  $k = \frac{q}{q_n} = \frac{\lambda}{\lambda_n}$  значение оперативной характеристики плана равно 0,1.

Равная степень жесткости контроля отражена в номограмме сеткой жирных пунктирных линий. Каждому рациональному плану  $(\lambda, c)$  соответствует предельная фильтрация  $k_c(\lambda) \cong \max(k-1) \times \times L_c(\lambda k) + 1$ , равная максимальному значению функции фильтрации. Линии были проведены через те точки плоскости  $(E, \lambda_i)$ , для которых значения предельной фильтрации постоянны,  $k_c(\lambda_{ci}) = k_i = \text{const}$ . Значения  $k_c(\lambda_{ci})$  при фиксированном  $c$  не зависят от  $E$ , поэтому линии проходят через зону рациональных планов, соответствующих одному значению  $c$ , параллельно оси ординат. При переходе из одной зоны  $c$  в другую зону  $c+1$  значение  $\lambda_{c+1,i}$  для которого  $k_{c+1}(\lambda_{c+1,i}) = k_i = \text{const}$ , изменяется скачками. Точки разрыва соединены пунктирной линией.

Таблицей 25 и номограммой приложения можно пользоваться как в случаях разрушительного, так и не разрушительного контроля, если только относительный объем выборки  $\frac{\lambda}{\theta} = \frac{n}{N} \ll 1$  ( $< 0,1$ ). Для этого надо найти  $\alpha, \beta, q_n$ , вычислить значение стоимостного параметра  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta}, \theta = Nq_n$  и выбрать величину  $E$  стоимостного коэффициента. Примеры на отыскание планов контроля с помощью таблицы или номограммы будут даны ниже.

Модель 2. Для того случая, когда  $\frac{n}{N} > 0,1$ , при расчете таблиц рациональных планов можно поступать следующим образом. Как показали многочисленные проверки, рациональными планами в широкой области значений параметров  $E, \frac{\alpha}{\beta}, \theta$  являются такие планы, у которых площадь под оперативной характеристикой является минимальной. Будем исходить из того, что  $N \gg 1, \frac{D}{N} < 0,1$ . В этих предположениях можно воспользоваться биномиальным приближением (7.4.8.) для выражения оперативной характеристики  $\pi(q)$ . Так как  $q$  может принимать только значения  $q = \frac{D}{N}, D = 0, 1, 2, \dots, N$ , то аналогом площади под

оперативной характеристикой плана  $(\lambda_{nc}, c)$  может служить

$$S_c = (N+1)^{-1} \sum_{D=0}^N \pi(L) \frac{D}{N} = (N+1)^{-1} \sum_{D=0}^N \sum_{d=0}^c C_D^d v^d (1-v)^{D-d} \approx \\ \approx (N+1)^{-1} \sum_{d=0}^c \frac{v^d}{d!} \sum_{D=0}^{\infty} D(D-1)\dots(D-d+1) (1-v)^{D-d} = \\ = \frac{1}{N+1} \frac{c+1}{v} = \frac{c+1}{\lambda_{nc}} q_n \frac{N}{N+1}, \quad (7.4.12)$$

где  $\lambda_{nc} = n_c q_n$  является решением уравнения (7.4.6), а  $v = \frac{n}{N}$ . При заданных значениях  $\frac{\beta}{\alpha}$  и  $E$  среди семейства допустимых планов, удовлетворяющих (7.4.6) и соответственно эквивалентных с экономической точки зрения, отбирается тот, у которого значение  $S_c$  или (см. (7.4.12))  $\frac{c+1}{\lambda_{nc}}$  является минимальным. С вероятностной точки зрения планы с минимальным значением  $S_c$  являются оптимальными, когда априорное распределение для числа дефектных изделий при наличии разладок является равномерным, т. е.  $P\{D=k\} = (N+1)^{-1}, k=0, \dots, N$ , так как вероятность приемки таких партий равна  $S_c$ . Для фиксированных значений  $\frac{\beta}{\alpha}$  и  $E$  можно найти значения  $\theta \frac{c}{c+1}$  такие, что если для инспектируемой партии  $\theta \frac{c-1}{c} \leq \leq \theta \leq \theta \frac{c}{c+1}$ , то приемочное число надо полагать равным  $c$ . Часть таблицы такого сорта показана ниже (таблица 7.4.1.)

Соответствующее значение  $\lambda_{nc}$  находится путем интерполяции значений  $\lambda_c^*$ ,  $\lambda_c^*$ . Например, если  $E=0,02, \frac{\beta}{\alpha}=0,1, q_n=0,09$ , объем инспектируемой партии  $N=1000$ , то  $\theta=9$ . Из таблицы 7.4.1 имеем  $\theta_4 = 7,9701 < 9 < \theta_5 = 11,0627$ , откуда следует, что  $c=5$ . Линейная интерполяция значений  $\lambda_5^*, \lambda_5^*$  дает значение  $\lambda_{nc} \approx 1,46$ . Относительный объем выборки  $\frac{n}{N} = \frac{\lambda_{nc}}{\theta} = 0,16$ . Если заранее считать, что  $\frac{n}{N} \ll 1$ , то из таблицы 25 приложения для  $E=0,02, \gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = 0,0111\dots \lg \gamma = 1,9542$  находим, что  $c=5$ , а  $\lambda_{nc} = 1,45$ . Таким образом, иногда даже при сравнительно большом относительном объеме выборки с помощью таблицы 25 приложения можно получить достаточно хорошее приближение.

Примеры. Сравнение с планами Доджа и Ромига.

Рассмотрим примеры на использование таблицы 25 и номограммы приложения. Выбор стоимостного коэффициента  $E$  определяется,



Таблица 7.4.1

$$\frac{\beta}{\alpha} = 0,1$$

E		E=0,02		...
c	...	...	...	...
4-5	...	$\theta_4 = 7,9701$ $\frac{5}{5}$	$\lambda_4'' = 1,14973$	...
			$\lambda_5' = 1,37967$	
5-6	...	$\theta_5 = 11,0627$ $\frac{6}{6}$	$\lambda_5'' = 1,61555$	...
			$\lambda_6' = 1,88481$	
...	...	...	...	...

исходя из возможностей предприятия и требований потребителя. Если на предприятии уже используется статистический выборочный контроль по качественному признаку, то можно по формуле (7.4.5) подсчитать значение стоимостного коэффициента  $E$ . Это значение используется затем для отыскания рационального плана. Напоминаем, что значение стоимостного параметра  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha N q_n}$ , необходи-

мого для отыскания плана контроля, определяется конкретными условиями производства. При такой замене контроль при той же стоимости становится более чувствительным к партиям с большой засоренностью дефектными изделиями.

Пример 1. Пусть отношение  $\beta$ -стоимости проверки одного изделия к ущербу  $\alpha$  от браковки годного изделия равно  $\frac{\beta}{\alpha} = 0,5$ . Доля засоренности продукции дефектными изделиями при нормальном ходе производства равна  $q_n = 0,01$ . Решено на обеспечение контроля выделить 10% от средств, необходимых для покрытия ущерба при сплошной проверке продукции, т. е.  $\frac{E}{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = 0,10$ . Из

этого условия находим, что  $E = 0,05$ . Пусть объем контролируемой партии  $N = 1500$ . При указанных выше данных  $\theta = Nq_n = 1500 \cdot 0,01 =$

$\approx 15$ ,  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = \frac{1}{30}$ ,  $\lg \gamma = -1,4771$ . Из таблицы 25 приложения для  $E=0,05$  находим, что  $\lg \gamma_2 = -1,2793 > \lg \gamma = -1,4771 >$   
 $> \lg \gamma_3 = -1,5055$ . Поэтому у рационального плана приемочное  
 число  $c=3$ . Значение объема выборки  $n$  находим линейной интер-  
 поляцией значений  $\lg \lambda_3 = -0,0453$  и  $\lg \lambda_3^* = -0,0010$  относительно

соответствующих значений  $\lg \gamma$ .  $\lg (nq_n) \approx \lg \lambda_3 + (\lg \lambda_3^* - \lg \lambda_3) \times$   
 $\times \frac{\lg \gamma - \lg \gamma_3}{\lg \gamma_3 - \lg \gamma_2} = -0,0453 + 0,0443 \times \frac{(-1,4771 + 1,3924)}{(-1,5055 + 1,3924)} = -0,0121$ .

Используя таблицы антилогарифмов, имеем  $nq_n = 0,9725$ , соответ-  
 ственно  $n \approx 97$ . Итак, рациональным является план (97,3).

Пример 2. Известно, что  $\frac{\beta}{\alpha} = 3$ ,  $q_n = 0,015$ , значение стоимост-  
 ного коэффициента решено положить  $E=0,10$ . Объем инспекти-  
 руемой партии  $N=1000$ . Требуется найти рациональный план типа  
 однократной выборки. Будем исходить из номограммы приложения.  
 Значение стоимостного параметра  $\gamma = \frac{\beta}{\alpha\theta} = 0,2$ . Пересечение пря-  
 мой, проходящей параллельно оси абсцисс через значение  $E=0,1$ ,  
 на оси ординат происходит с линией, соответствующей значению  
 $\gamma=0,2$  в зоне приемочного числа  $c=1$ . При этом на оси абсцисс  
 находим значение  $\lg \lambda_n = \lg (nq_n) = -0,54$  (напоминаем, что правее  
 $\lambda=0,5$  значения  $\lambda$  по оси абсцисс даны в обычном масштабе,  
 тогда как левее — в логарифмическом). Используя таблицы анти-  
 логарифмов, находим  $nq_n = 0,2885$ ,  $n \approx 19$ . Итак, рациональным  
 является план (19,1). Можно показать, что  $\lambda_{0,1} = 13,5$ . Таким  
 образом, если доля засоренности продукции дефектными изделиями  
 будет в  $k = \frac{\lambda_{0,1}}{\lambda_n} = 46,8$  раз больше, чем при нормальном ходе про-  
 изводства, то такие партии будут приниматься с вероятностью,  
 меньшей 0,1. Если такой контроль будет потребителем признан не-  
 оправданно слабым, то в этом случае производителю придется  
 увеличить плановые расходы на контроль, что будет соответство-  
 вать выбору большего значения для стоимостного коэффициента  $E$ .

Эту серию примеров мы заканчиваем иллюстрацией сравнения  
 оперативных характеристик, рекомендуемых в книге Доджа и Ро-  
 мига [4], с оперативными характеристиками рациональных планов,  
 найденных исходя из таблицы 25 приложения.

На рис. 7.4.4, а сплошной линией проведена оперативная характе-  
 ристика  $L$  плана (37,3), рекомендуемого Доджем и Ромигом  
 в случае контроля партии  $N=900$  изделий,  $q_n = 0,025$ . Этот план

обеспечивает значение  $q_n = 0,05$ . План (37,3) практически совпадает с рекомендуемым нами планом для случая  $\frac{\beta}{\alpha} = 1$ . Если же  $\frac{\beta}{\alpha} \neq 1$ , то использование рациональных планов дает лучшие результаты. Пунктиром показаны оперативные характеристики  $L_1, L_2, L_3, L_4$  рациональных планов, соответствующие значениям  $\frac{\beta}{\alpha} = 5; 0,5; 0,2; 0,1$ . При фиксированном значении  $\frac{\beta}{\alpha}$  ущерб от использования рационального плана при нормальном ходе производства полагался равным ущербу, связанному с использованием плана (37,3).

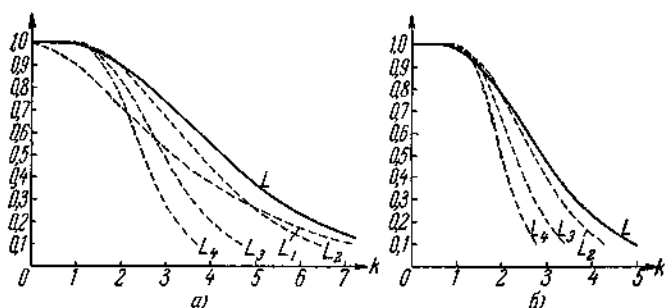


Рис. 7.4.4.

На рис. 7.4.5, б за основу был взят план (160,4), рекомендуемый в книге Доджа и Ромига для контроля партии объема  $N = 3500$  и  $q_n = 0,01$ . Из рис. 7.4.4, а, б можно видеть, что рациональные планы, «стоящие» производителю столько же, сколько и план Доджа и Ромига, более чувствительны к ухудшению качества продукции.

Рациональные планы типа двукратной выборки. В заключение параграфа рассмотрим вопросы, связанные с отысканием рациональных планов контроля типа усеченной двукратной выборки ( $n_1, n_2, c_1, c_2$ ). Для простоты вычислений будем предполагать выполненными условия, приводящие к пуассоновскому распределению (см. § 7.2). Введем «временной» параметр  $t$ , полагая, что  $t = 1$  соответствует числу проверенных изделий  $n_0 = q^{-1}_n$ , т. е. среднему числу изделий, при котором в условиях нормального хода производства встречается ровно одно дефектное изделие. Таким образом, объему  $n_1$  первой выборки соответствует значение  $t_1 = n_1 q_n$ , объему  $n_2$  второй выборки  $t_2 = n_2 q_n$ . Обнаруженные числа дефектных изделий  $d_i$  в  $i$ -й выборке имеют пуассоновское распределение с параметрами  $t_i, i = 1, 2$ . В этих условиях средние расходы, связанные с проведением контроля по плану ( $n_1, n_2, c_1, c_2$ )

при нормальном ходе производства равны

$$E_k \cong \alpha \{ (N - n_1) [1 - L_{c_2}(t_1)] + \\ + [N - (n_1 + n_2)] \left[ \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} (1 - L_{c_2-d_1}(t_2)) \right] \} + \\ + \beta \{ n_1 [L_{c_1}(t_1) + 1 - L_{c_2}(t_1)] + (n_1 + n_2) \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} \}. \quad (7.4.13)$$

Коэффициентом при  $\alpha$  является среднее число забракованных годовых изделий в предположении, что  $q_n \ll 1$ , а коэффициентом при  $\beta$  — средний объем выборки до принятия решения о браковке или приемке. Если разделить обе части на  $\alpha N$ , то имеем

$$E = \frac{E_k}{\alpha N} = (1 - v_1) [1 - L_{c_2}(t_1)] + (1 - v_1 - v_2) \left( \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} [1 - L_{c_2-d_1}(t_2)] \right) + \frac{\beta}{\alpha} \{ v_1 [L_{c_1}(t_1) + 1 - L_{c_2}(t_1)] + (v_1 + v_2) \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} \}, \quad (7.4.14)$$

где  $v_i = n_i/N$ . Всюду ниже мы ограничимся случаем выборок с относительно малым объемом, когда  $v_1 + v_2 \ll 1$  ( $< 0,1$ ). В этом случае, полагая  $v_i = 0$ , переписываем (7.4.14) в виде

$$E = 1 - \pi(t_1) + \mu, \quad (7.4.15)$$

где  $\mu = \beta/\alpha N q_n$ , а  $\mu$  — средний объем выборки, выраженной во «временных» единицах, т. е.

$$\mu = t_1 + t_2 \left( \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} \right). \quad (7.4.16)$$

$\delta = 1 - \pi(t_1)$  равна вероятности браковки партии, выпущенной при нормальном ходе производства, — это риск производителя. Уравнение (7.4.15) является аналогом уравнения (7.4.7) для планов типа однократной выборки. Уравнению (7.4.15) удовлетворяет бесконечное множество усеченных планов типа двукратной выборки. Однако при фиксированных значениях  $\mu$  и  $\delta$  имеется лишь конечное число таких планов. Действительно, если задать значения  $\mu$ ,  $\delta$  и пару приемочных чисел  $c_1$  и  $c_2 > c_1$ , то из уравнения (7.4.16) можно выразить  $t_2$  как функцию от  $t_1$

$$t_2(t_1) = (\mu - t_1) \left( \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} \right)^{-1}. \quad (7.4.17)$$

Значение  $t_1$  находится как решение трансцендентного уравнения

$$1 - \delta = L_{c_1}(t_1) + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \frac{t_1^{d_1}}{d_1!} e^{-t_1} L_{c_2-d_1}(t_2(t_1)), \quad (7.4.18)$$

которое получается из условия равенства риска поставщика выбранному значению  $\delta$ . Можно показать, что это трансцендентное уравнение либо имеет только одно решение  $t_1$ , либо два решения  $t'_1$  и  $t''_1 > t'_1$ , либо совсем не имеет решений (при выбранных значениях  $\mu, \delta, c_1, c_2$ ). Отыскав значение  $t_1$ , значение  $t_2$  находим из (7.4.17). Таким образом, окончательно получаем, что планом, удовлетворяющим условиям равенства риска производителя  $\delta$ , имеющим средний объем инспекции  $\mu q_n^{-1}$ , является  $(t_1 q_n^{-1}, t_2 q_n^{-1}, c_1, c_2)$ . Установлено, что при наличии двух корней  $t'_1, t''_1$  наилучшие результаты дают планы с использованием большего корня  $t''_1 > t'_1$ . Оперативные характеристики таких планов имеют меньшие значения в области больших значений засоренностей партий дефектными изделиями. Обозначим правую часть (7.4.18) через  $f(t_1, c_1, c_2)$ . Легко непосредственным сравнением слагаемых убедиться в справедливости неравенств

$$L_{c_1}(t_1) < f(t_1, c_1, c_2) < f(t_1, c_1, c_2 + 1), \quad 0 \leq t_1 \leq \mu. \quad (7.4.19)$$

Таким образом, если  $L_{c_1}(t_1) > 1 - \delta$ , то уравнение (7.4.18) не имеет корней. Так как для любого  $\delta$  найдется такое  $c$ , что  $L_c(t_1) > 1 - \delta$  для всех  $0 \leq t_1 \leq \mu$ , то число планов, имеющих заданные значения  $\mu$  и  $\delta$ , конечно, и если нет планов для  $c_1, c_2$ , то их нет и для значений  $c_1, c_2 + k, k = 1, 2, \dots$ . Простой проверкой можно убедиться также в справедливости неравенства

$$f(t_1, c_1; c_1 + 1) < f(t_1, c_1 + 1, c_1 + 2), \quad 0 \leq t_1 \leq \mu. \quad (7.4.20)$$

Из этого неравенства следует, что если нет планов для значений  $c_1, c_1 + 1$ , то их нет и для всех значений  $c'_1, c'_2, c'_1 > c_1, c'_2 > c_1 + 1$ . Все эти результаты суммирует

**Теорема 7.4.1.** *Существует конечное число планов типа усеченной двукратной выборки, имеющих заданные значения риска производителя  $\delta$  и среднего объема инспекции до принятия решения  $\mu$  ( $\mu \leq \theta = Nq_n$ ). Пары приемочных чисел  $c_1, c_2$  ( $c_2 > c_1$ ), для которых существуют такие планы, образуют множество, содержащее точки вида  $c_1, c_2$ , где  $c_1 = 0, 1, \dots, c_1(\mu, \delta)$ , а  $c_2 = c_1 + 1, \dots, c_2(\mu, \delta, c_1)$ .*

На рис. 7.4.5, а для значений  $\delta = 0,1$  и  $\mu = 1$  показаны значения  $c_1, c_2$ , при которых существуют планы. При этом цифрой 1 отмечено наличие одного корня  $t$ , цифрой 2 — двух корней. На рис. 7.4.5, б показаны оперативные характеристики этих планов для некоторых значений  $(c_1, c_2)$ . В качестве признака, показываю-

шего степень рациональности плана, можно использовать площадь  $S$  под оперативной характеристикой. Формула для площади  $S$  под оперативной характеристикой плана  $(t_1 q_H^{-1}, t_2 q_H^{-1}, c_1, c_2)$  в условиях применимости пуассоновского приближения имеет вид

$$S = \frac{c_1 + 1}{t_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} \frac{t_1^{d_1} t_2^{d_2} (d_1 + d_2)!}{d_1! d_2! (t_1 + t_2)^{d_1+d_2+1}}. \quad (7.4.21)$$

Однако отбор планов только по этому показателю оказывается недостаточным. Численные расчеты показали, например, что при  $\delta = 0,0025$ ,  $\mu = 2,0$  наименьшее значение  $S$  имеет план, у которого  $t_1 = 0,948$ ,  $t_2 = 4,297$ ,  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 9$ ; при этом значении  $S_1 = 2,512$ .

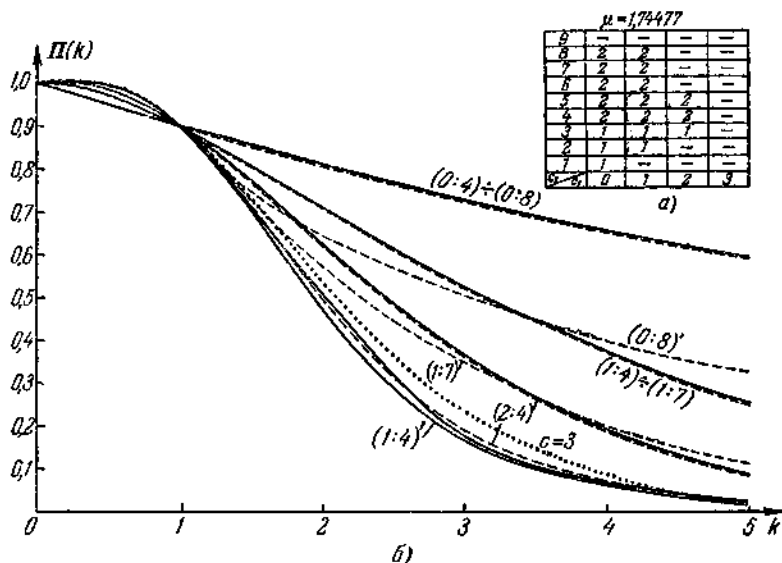


Рис. 7.4.5.

Однако существует план со значением  $S_2 = 2,546$ , лишь незначительно большим  $S_1$ , который характеризуется параметрами  $t_1 = 0,849$ ,  $t_2 = 2,013$ ,  $c_1 = 0$ ,  $c_2 = 6$ . Несмотря на несколько большую площадь, второй план в некоторых случаях может оказаться более привлекательным.

Дело в том, что у второго плана максимальный объем выборки равен  $(t_1 + t_2) q_H^{-1} = 2,862 q_H^{-1}$ , тогда как у первого плана он равен  $5,058 q_H^{-1}$ , т. е. почти в 2 раза больше, хотя напоминаем, что при нормальном ходе производства в среднем объем инспекции

одинаков для обоих планов и равен  $\mu q_n^{-1}$ . Использование планов с большим отношением  $t_2:t_1 = n_2:n_1$  может быть затруднительным в связи с ограниченной пропускной способностью контрольной аппаратуры. Кроме того, использование таких планов может привести к неравномерной загрузке в работе контрольных постов. Итак, при заданных значениях  $E$  и  $\gamma$ , меняя значения  $\delta$  и  $\mu$  в соответствии с уравнением (7.4.15), мы можем отобрать несколько планов, имеющих относительно небольшие площади  $S$  и умеренные значения  $t_1 + t_2$ . Использование двукратных планов хотя и сопряжено с некоторыми неудобствами, однако дает выигрыш в большей

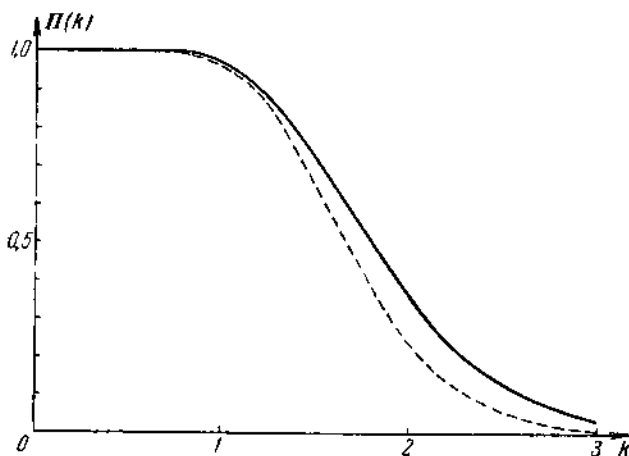


Рис. 7.4.6.

чувствительности к партиям, сильно засоренным дефектными изделиями. На рис. 7.4.6 приведены оперативные характеристики рационального плана типа  $(6,526q_n^{-1}, 11)$  и плана типа  $(1,8q_n^{-1}, 6,9q_n^{-1}, 2,15)$ , соответствующих значениям  $E=0,1$  и  $\gamma=0,01$ .

Из рис. 7.4.6 видно, что чувствительность плана типа двукратной выборки значительно выше чувствительности рационального плана типа однократной выборки при засоренности  $q$  большей, чем  $2q_n$ . Оперативная характеристика плана типа двукратной выборки дана в виде пунктирной линии. При сочетании высоких требований к стабильности качества принятой продукции с высокой стоимостью контрольной операции этот выигрыш приводит к целесообразности использования рациональных планов типа двукратной выборки. Поэтому представляется целесообразным составление стандартов экономических планов типа двукратной выборки.

Общая задача отыскания рациональных планов. В заключение рассмотрим общую задачу отыскания рациональных планов типа последовательного анализа. При этом требуется, чтобы расходы на проведение контроля были равны заданному значению. Если предположить, что априорное распределение задается значениями вероятностей  $f_n(D) = P\{D_n = D\}$ ,  $D = 0, 1, \dots, N$ , а план последовательного типа характеризуется параметрами:  $\bar{n} = \bar{n}(N, D)$  — средний объем инспекции до принятия окончательного решения, после которого контроль прекращается,  $\bar{n}_{бр} = \bar{n}_{бр}(N, D)$  — средний объем инспекции при условии отвержения партии,  $\bar{a}_{бр} = \bar{a}_{бр}(N, D)$  — среднее значение числа обнаруженных дефектных изделий при условии отвержения партии. В этих обозначениях средние расходы на проведение контроля на нормальном ходе производства равны

$$E_k = \sum_{D=0}^N f_n(D) [N - \bar{n}_{бр} - (D - \bar{a}_{бр})] P_{бр}(N, D) + \beta \bar{n}. \quad (7.4.22)$$

Здесь  $P_{бр}(N, D)$  — вероятность браковки (отвержения) партии объема  $N$ , содержащей  $D$  дефектных изделий. Каждому плану, удовлетворяющему условию (7.4.22), при заданном значении  $E_k$  можно сопоставить функционал, по значениям которого можно было бы судить о степени рациональности этого плана. Например, можно рассматривать функционалы вида

$$\Phi = \sum_{D=0}^N \varphi(D) \Pi(D), \quad (7.4.23)$$

где  $\Pi(D)$  — значение оперативной характеристики плана, а  $\varphi(D)$  — набор чисел  $D = 0, 1, \dots, N$ . В случае, когда  $\varphi(D) = \varphi_0$ , значение  $\Phi$  пропорционально «площади» под оперативной характеристикой. Общая задача может быть сформулирована следующим образом. Требуется среди всех планов, удовлетворяющих условию (7.4.22), при заданном значении расходов  $E_k$  найти такой, для которого значение функционала  $\Phi$  является минимальным. Пока эта задача в таком общем виде не решена.

Рассмотренные выше случаи планов типа однократной и двукратной выборки являются частными случаями общей задачи, соответствующими оптимальным планам, минимизирующим (7.4.23) в заданных классах однократных и двукратных планов. В качестве еще одного примера рассмотрим планы вальдовского типа (рис. 7.4.7).

Вальдовские планы имеют границы браковки и приемки партии, представляющие прямые линии пересекающие ось,  $n$  — числа проверенных изделий и ось  $d(n)$  — числа обнаруженных дефектных изделий на расстояниях  $l_1, l_2$  соответственно,  $\varphi$  — угол наклона этих прямых (см. рис. 7.4.7). Таким образом, семейство



вальдовских планов является трехпараметрическим. Предположив, что решение о приемке или браковке партии принимается по относительно малой выборке и что априорное распределение для  $D$  — биномиальное, мы можем воспользоваться формулами для среднего объема испытаний и оперативной характеристики из книги Вальда ([14], глава 5). Обозначим средний объем инспекции через  $M$  и выразим его в единицах  $\mu$ , кратных  $q_n^{-1}$ , где  $q_n$  — среднее значение доли засоренности продукции дефектными изделиями при нормальном ходе производства. Ошибку первого рода обозначим через  $\delta$ . Стоимостный план, например  $E = E_k/aN$ , задается соотношением  $E = \delta + \gamma\mu$ , где  $\gamma = \alpha/\beta Nq_n$ . Соотношению (7.4.2) удовлетворит двухпараметрическое семейство вальдовских планов, являющихся подсемейством общего трехпараметрического семейства вальдовских планов. Фиксируя значения  $E$ ,  $\gamma$  и меняя значения  $\delta_1$ ,  $\delta_{11} = \beta$  (ошибок первого и второго рода), отбираем план, у которого значения оперативной характеристики лежат вблизи нижней огибающей оперативных характеристик всего двухпараметрического семейства планов, удовлетворяющих (7.4.2). На рис. 7.4.8, а, б показаны оперативные характеристики трех типов планов: однократной, двукратной выборки и вальдовского плана; рис. 7.4.8, а соответствует значениям  $E = 0,01$ ,  $\gamma = 0,1$ , а рис. 7.4.8, б — значениям  $E = 0,063$ ,  $\gamma = 0,25$ . Из этих примеров видно, что планы вальдовского типа могут иметь некоторое преимущество перед эквивалентными им по расходам планами типа однократной и двукратной выборки. Таким образом, в стандарт планов приемочного контроля должны быть включены планы различных типов, включая планы типа последовательного анализа. В настоящей книге мы приводим таблицы планов типа однократной выборки только потому, что соответствующие таблицы для планов других типов пока не подсчитаны; эта работа близка к завершению.

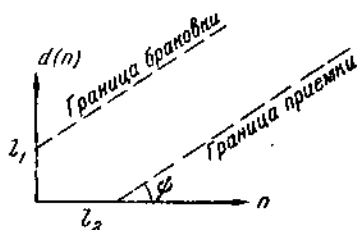


Рис. 7.4.7.

### § 7.5. Последующие оценки качества по результатам контроля

**Введение.** Если план контроля выбран, то возникает задача оценки эффективности действия этого плана. Эта эффективность может измеряться по-разному. Например, ее можно понимать как отношение числа принятых дефектных изделий к общему числу предъявленных дефектных изделий. Возникает обширный класс

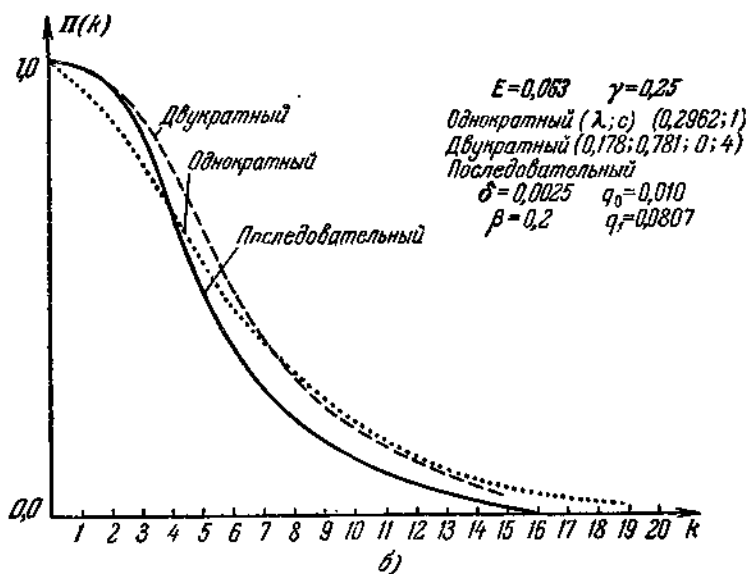
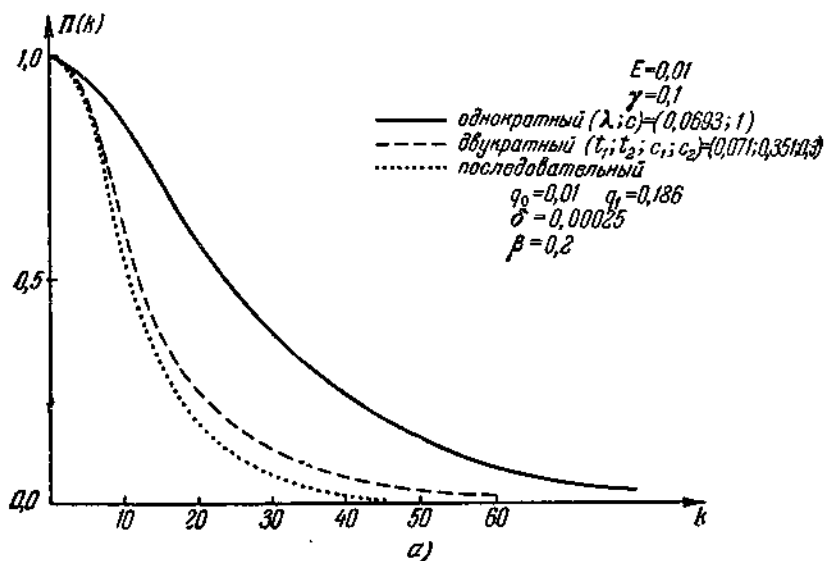


Рис. 7.4.8.

задач, связанных с получением оценок различных характеристик по имеющейся информации о приемке и браковке партий изделий. Особый интерес представляет получение несмещенных оценок [1], т. е. таких оценок, которые в среднем дают точные значения. Нужно отметить, что точность этих оценок зависит от количества данных, по которым они вычисляются. Иногда несмещенные оценки могут давать отрицательные значения. Так будет при использовании несмещенной оценки для числа принятых дефектных изделий в случае двукратной выборки. Эти отдельные случаи выглядят абсурдными, так как число принятых дефектных изделий не может быть меньше нуля. Однако при оценке суммарного числа принятых дефектных изделий по результатам разбраковки большого числа партий включение отрицательных значений необходимо, чтобы избежать завышения суммарного числа принятых дефектных изделий. Несмещенные оценки существуют не для всех характеристик и не для всех планов контроля. Однако можно, применяя специальные методы, так изменить тип используемого плана, что желаемая несмещенная оценка начинает существовать. Примером такого рода методов может служить описанное ниже правило проверки  $(n+1)$ -го изделия, предложенное С. Х. Сираждиновым и М. И. Эйдельмантом [2]. В практике приемочного контроля широко используются планы типа двукратной выборки и последовательного анализа. К сожалению, теория несмещенных оценок разрабатывалась до настоящего времени главным образом применительно к планам типа однократной выборки. Как известно (см. теорему 7.5.2), *несмещенные оценки точнее, если они являются функциями от достаточных статистик*. Следовательно, в случае двукратной выборки нужно учитывать суммарное число дефектных изделий, обнаруженных как в первой, так и во второй выборках. Однако в большинстве работ с использованием планов типа двукратной выборки либо вообще не ставится вопрос о нахождении таких оценок, либо, в лучшем случае, дается рекомендация получения оценок только по результатам первой выборки. Теория несмещенных оценок применительно к задачам приемочного контроля развивалась пока главным образом усилиями наших ученых-вероятностников (см. [1], [2], [16], [17], [18]). В объемистой книге Коудена [6], где описанию методов приемочного контроля выделено 11 глав, не нашлось места для задач получения несмещенных оценок.

**Несмещенные оценки. Основные теоремы.** Учитывая интересы инженеров-производственников, мы переформулируем теоремы о несмещенных оценках в случае дискретного пространства исходов опыта. Теоремы 7.5.1 и 7.5.2 приведены в статье Колмогорова [1].

Пусть  $X = \{x\}$  — пространство исходов опыта. Точками этого пространства являются цепочки из нулей и единиц, вообще говоря,

разной длины  $n^*$ ,  $x = \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n^*$ , где  $\varepsilon_i = 0$  или 1, если соответственно  $i$ -е проверенное изделие оказалось годным или дефектным. Таким образом,  $n^*$  можно трактовать как число проверенных изделий, а  $\sum_{i=1}^{n^*} \varepsilon_i = d^*$  — как число обнаруженных при такой проверке дефектных изделий. Как и раньше, через  $N$  обозначим объем контролируемой партии, а через  $D$  — число содержащихся в ней дефектных изделий. Оценкой называется любая функция  $h(x)$ , значения которой не зависят явно от величины  $D$ , когда  $D$  неизвестно. Общее число исходов  $x$  конечно. Обозначим через  $k_h$  число решений уравнения  $h(x) = h$ . Перенумеруем все точки  $x$  парами индексов  $h, k$ , обозначая  $x = x_{h,k}$ , если  $h(x) = h$ ,  $k = 1, \dots, k_h$ . Так как каждое  $x$  дает какое-то значение  $h(x)$ , то все точки  $x$  будут перенумерованы. Обозначим также через  $p_{hk} = p_{hk}(D)$  вероятность того, что исходом опыта явится значение  $x_{h,k}$ . В силу критерия факторизации (см. главу 1) статистика  $S(x)$  является достаточной тогда и только тогда, когда имеет место факторизация, т. е.

$$p_{h,k}(D) = p(S(x_{h,k}), D) q_{h,k}, \quad (7.5.1)$$

где  $q_{h,k} \geq 0$  не зависят от  $D$ ,  $\sum_{k=1}^{k_h} q_{h,k} = 1$ . Оценка  $\varphi(x_{h,k}) = \varphi_{h,k}$  называется несмещенной для функции  $f(D)$ , если для любого  $D = 0, 1, \dots, N$   $M\varphi(x) = f(D)$ , или, подробнее, если выполняется

$$\sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} p_{h,k} = f(D). \quad (7.5.2)$$

Это понятие можно обобщить. Если задана случайная величина  $g$ , т. е. функция  $g(x_{h,k}) = g_{h,k}$  от исходов опыта, то оценка  $\varphi(x_{h,k}) = \varphi_{h,k}$  называется *несмещенной* для  $g_{h,k}$ , если их математические ожидания совпадают, т. е. если для  $D = 0, 1, \dots, N$

$$\sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} p_{h,k} = \sum_{k=1}^{k_h} g_{h,k} p_{h,k}. \quad (7.5.3)$$

Следующая теорема утверждает, что с помощью достаточной статистики из одной несмещенной оценки можно построить другую несмещенную оценку, которую будем называть *улучшенной*.

**Теорема 7.5.1.** Если  $\varphi_{h,k}$  является несмещенной оценкой для  $g_{h,k}$ , а  $h(x_{h,k}) = h$  — достаточная статистика, то оценка

$$\varphi_h^* = \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} q_{h,k} \quad (7.5.4)$$

снова является несмещенной.

Доказательство. Используя (7.5.3) и (7.5.1), имеем

$$\begin{aligned} \mathbb{M}\varphi^* &= \sum_{h,k} \varphi_{h,k}^* p_{h,k}(D) = \sum_h \varphi_h^* \sum_{k=1}^{k_h} p_{k,h}(D) = \\ &= \sum_h \varphi_h^* \sum_{k=1}^{k_h} p(h, D) q_{h,k} = \sum_h \varphi_h^* p(h, D) = \\ &= \sum_h \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} q_{h,k} p(h, D) = \sum_{h,k} \varphi_{h,k} p_{h,k}(D) = \mathbb{M}g, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

**Теорема 7.5.2.** Если  $\varphi$  и  $\varphi^*$  — соответственно несмещенная и улучшенная оценки, то их дисперсии  $\mathbf{D}[\varphi]$  и  $\mathbf{D}[\varphi^*]$  связаны соотношением

$$\mathbf{D}[\varphi] = \mathbb{M}(\varphi - \varphi^*)^2 + \mathbf{D}[\varphi^*], \quad (7.5.5)$$

из которого следует, что  $\mathbf{D}[\varphi^*] \leq \mathbf{D}[\varphi]$ .

Доказательство.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\varphi] &= \mathbb{M}(\varphi - \mathbb{M}g)^2 = \mathbb{M}[(\varphi - \varphi^*) + (\varphi^* - \mathbb{M}g)]^2 = \\ &= \mathbb{M}(\varphi - \varphi^*)^2 + \mathbf{D}[\varphi^*] + 2\mathbb{M}(\varphi - \varphi^*)(\varphi^* - \mathbb{M}g), \\ \mathbb{M}(\varphi - \varphi^*)(\varphi^* - \mathbb{M}g) &= \sum_{h,k} (\varphi_{h,k} - \varphi_h^*)(\varphi_h^* - \mathbb{M}g) p_{h,k}(D) = \\ &= \sum_h (\varphi_h^* - \mathbb{M}g) p_h(D) \sum_{k=1}^{k_h} (\varphi_{h,k} - \varphi_h^*) q_{h,k} = 0, \end{aligned}$$

так как

$$\sum_{k=1}^{k_h} (\varphi_{h,k} - \varphi_h^*) q_{h,k} = \sum_{k=1}^{k_h} \varphi_{h,k} q_{h,k} - \varphi_h^* = 0.$$

Таким образом, оценка  $\varphi^*$  является более точной в том смысле, что ее дисперсия может быть только меньше или равна дисперсии исходной несмещенной оценки. Если существует единственная оценка, являющаяся функцией от достаточной статистики, то она имеет наименьшую дисперсию в классе несмещенных оценок.

Теорема 7.5.2 привлекает наше внимание к достаточным статистикам, возникающим при проведении контроля партий. Наиболее полный ответ о структуре достаточных статистик дает

**Теорема 7.5.3.** Пусть  $n^*$  — номер изделия, проверяемого последним, а  $d^*$  — общее число дефектных изделий, обнаруженных при проверке; тогда случайный вектор  $(n^*, d^*)$  является достаточной статистикой.

Доказательство <sup>1)</sup>. Мы ограничиваемся только случаем нерандомизированного правила остановки контроля, т.е. предполагаем, что *условная вероятность остановки контроля по результатам контроля всех предыдущих изделий равна либо нулю, либо единице*. В аналитической форме записи это означает, что  $P\{n^* = k | \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k\} = 0$  или 1. Будем также предполагать, что момент остановки не зависит от будущего, т.е. если  $P\{n^* = k | \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k\} = 1$ , то для любых значений  $\varepsilon_{k+1}, \dots$   $P\{n^* = k | \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k, \varepsilon_{k+1} \dots\} = k$  с вероятностью единица. Пространством исходов опыта являются цепочки  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n^*}$ , где  $P\{n^* = k | \varepsilon_1 \dots \varepsilon_k\} = 1$ . Вероятность появления цепочки  $\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n^*}$  равна

$$P(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n^*}) = \frac{C_N^{D-n^*}}{C_N^D}, \quad (7.5.6)$$

т.е. равна отношению числа всех возможных продолжений этой цепочки до полной проверки всех  $N$  изделий к числу всех возможных размещений  $D$  дефектных изделий по  $N$  номерам, соответствующим порядку проверки. Сравнивая (7.5.6) с (7.5.1), находим, что  $P(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n^*}) = p(n^*, d^*, D) q(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n^*})$ , где

$$p(n^*, d^*, D) = \frac{C_N^{D-n^*} f(n^*, d^*)}{C_N^D}, \quad (7.5.7)$$

а  $f(n^*, d^*)$  — число цепочек, имеющих длину, равную  $n^*$  и  $\sum_{i=1}^{n^*} \varepsilon_i = d^*$ .

Значение  $q(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n^*})$  выбирается из условия нормировки

$$q(\varepsilon_1 \dots \varepsilon_{n^*}) = f^{-1}(n^*, d^*).$$

Таким образом, из критерия факторизации находим, что  $(n^*, d^*)$  является достаточной статистикой.

Из доказанной теоремы следует, что *вся информация о ходе контроля содержится в паре чисел: числе  $n^*$  проверенных изделий и числе  $d^*$  обнаруженных дефектных изделий*. Эти две характеристики надо регистрировать в журналах или, что более удобно для последующей обработки, на перфокартах. Таким образом, пространство исходов опыта сужается до  $X = \{x\}$ , где  $x = (n^*, d^*)$ .

**Примеры.** При использовании планов типа однократной выборки  $(n, c)_{13}$  здесь  $n^* \equiv n$ ,  $d^* = d(n)$ . Первая компонента  $n^* = n$  не несет информации, так как уже до проведения контроля известно,

<sup>1)</sup> Доказательство проводится для частного случая, когда точки остановки образуют монотонно убывающую границу. Однако, используя ту же идею, его можно провести и в общем случае.

что  $n^* = n$ . Здесь  $f(n^*, d^*) = C_n^{d^*}$ . Таким образом, достаточной статистикой является число  $d^*$  обнаруженных дефектных изделий. При использовании плана типа двукратной выборки  $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{1313}$  достаточной статистикой является  $d^* = d(n_1)$ , если либо  $c_2 < d(n_1)$ , либо  $d(n_1) \leq c_1$ , где  $d(n_1)$  — число дефектных изделий, обнаруженных в первой выборке, если же  $c_1 < d(n_1) \leq c_2$ , то достаточной статистикой является пара  $(n_1 + n_2, d(n_1 + n_2))$ . При использовании плана  $(n_1, c_1, n_2, c_2)_{2323}$  достаточная статистика имеет вид  $n^* = N$ ,  $d^* = D$ , если либо  $d(n_1) > c_2$ , либо  $c_1 < d(n_1) < c_2$ , но  $d(n_1 + n_2) > c_2$ ;  $n^* = n_1$ ,  $d^* = d(n_1)$ , если  $d(n_1) < c_1$ ;  $n^* = n_1 + n_2$ ,  $d^* = d(n_1 + n_2)$ , если  $c_1 < d(n_1) \leq c_2$ , но  $d(n_1 + n_2) \leq c_2$ .

Примеры на построение несмещенных оценок. Рассмотрим теперь методы построения несмещенных оценок для различных характеристик в случае использования различных планов типа однократной выборки. При этом мы используем некоторые результаты работ А. Н. Колмогорова [1], [16], С. Х. Сираждинова и М. И. Эйдельманта [2], [17], а также [7]. Как и в § 7.2, мы ограничимся рассмотрением планов, в которых по результатам контроля, принимается одно из трех решений:

$D_1$  — отвергать без дальнейшего контроля оставшуюся непроверенную часть продукции,

$D_2$  — провести 100% проверку,

$D_3$  — принять оставшуюся часть партии без дальнейшего контроля.

В соответствии с этими решениями весь объем партии  $N$  и общее число дефектных изделий  $D$  разбиваются на три части,

$$N = N' + N'' + N''', \quad D = D' + D'' + D''' \quad (7.5.8)$$

где  $N'$  — число изделий, отвергнутых без проверки, среди них содержится  $D'$  дефектных,  $N''$  — число проверенных изделий,  $D''$  — число дефектных изделий, обнаруженных при такой проверке,  $N'''$  — число изделий, принятых без проверки,  $D'''$  — число принятых дефектных изделий. В случае планов типа однократной выборки известны значения  $N'$ ,  $N''$ ,  $N'''$ ,  $D''$ , неизвестны  $D$ ,  $D'$ ,  $D'''$ . Цель настоящего параграфа состоит в выводе формул несмещенных оценок для  $D$ ,  $D'$ ,  $D'''$ . Иногда представляет интерес получение несмещенных оценок и для более сложных характеристик, например для априорных вероятностей. По этому вопросу мы отсылаем читателя к работе М. И. Эйдельманта и И. Инамова [17]. Полезно заметить, что при учете результатов сплошной разбраковки, при использовании решения  $D_2$ , нужно быть уверенным, что и разбраковка проводится по тем же правилам, что и разбраковка изделий в выборке. Чтобы убедиться в этом, полезно сравнить оценки как с учетом результатов разбраковки, так и без такого учета.

Для краткости записи будем использовать следующие обозначения:

$$\left. \begin{aligned} \Pi_{ND}^{nc} &= \sum_{d=0}^c B_{ND}^{nd}, & \Pi_{ND}^{nc} &= \sum_{d=c}^n B_{ND}^{nd}, \\ M_{ND}^{nc} &= \sum_{d=0}^c d B_{ND}^{nd}, & W_{ND}^{nc} &= \sum_{d=c}^n d B_{ND}^{nd}, \end{aligned} \right\} \quad (7.5.9)$$

где  $B_{ND}^{nd}$  определяются по формулам (7.2.8) или (7.2.9).

Изложение начнем с рассмотрения плана типа  $(n, c)_{23}$ . Достаточная статистика, как это следует из теоремы 7.5.3, имеет вид

$$n^* = \begin{cases} n, & d \leq c, \\ N, & d > c, \end{cases} \quad d^* = \begin{cases} d, & d \leq c, \\ D, & d > c. \end{cases}$$

При использовании таких планов существует несмещенная оценка  $\varphi(d^*)$  для любой функции  $f(D)$ . В соответствии с (7.5.2) уравнение для несмещенной оценки имеет вид

$$\sum_{d \leq c} \varphi(d) B_{Nc}^{nd} + \varphi(D) \Pi_{ND}^{n, c+1} = f(D), \quad D = 0, 1, \dots, N. \quad (7.5.10)$$

Подставляя в (7.5.10) значения  $D = 0, 1, \dots, c$  и учитывая, что  $\Pi_{ND}^{nc} = 1$ , когда  $D = 0, 1, \dots, c$ , получаем  $c+1$  уравнений для нахождения  $\varphi(0), \dots, \varphi(c)$ . Эти уравнения имеют вид

$$\sum_{d \leq c} \varphi(d) B_{Nk}^{nd} = f(k), \quad k = 0, 1, \dots, c. \quad (7.5.11)$$

Используя эти значения  $\varphi(d)$  из (7.5.10), получаем значение для  $\varphi(D)$ :

$$\varphi(D) = \frac{\left[ f(D) - \sum_{d \leq c} \varphi(d) B_{ND}^{nd} \right]}{\Pi_{ND}^{n, c+1}}, \quad (7.5.12)$$

Таким образом, несмещенная оценка существует и задается формулами (7.5.11), (7.5.12).

В качестве второго примера получим несмещенные оценки, соответствующие использованию планов типа  $(n, c)_{13}$ . Здесь  $N'' = n$ ,  $D'' = d$ ,  $D'$  и  $D''$  являются случайными величинами. Представляет интерес получение несмещенных оценок для  $D'$  и  $D''$ . Действительно, несмещенная оценка для  $D''$  позволяла бы оценить число принятых дефектных изделий, а оценка для  $D'$  — число отвергнутых годных изделий, равное  $N' - D'$ . Так как  $D'' = D - d$ , для  $d \leq c$  и  $D'' = 0$ , если  $d > c$ , то  $M D'' = \sum_{d=0}^c (D - d) B_{ND}^{nd}$ .



В соответствии с (7.5.3) уравнение для несмещенной оценки  $\varphi''$   $M\varphi'' = MD''$  имеет вид

$$\sum_{d=0}^n \varphi''(d) B_{ND}^{nd} = \sum_{d=0}^c (D-d) B_{ND}^{nd}. \quad (7.5.13)$$

Однако это уравнение противоречиво, так как не существует такой функции  $\varphi(d)$ , которая бы удовлетворяла (7.5.13). Это следует из того факта, что  $B_{ND}^{nd}$  является многочленом  $n$ -й степени относительно  $D$  (см. (7.2.8)). Действительно, в правой части (7.5.13) стоит многочлен  $(n+1)$ -й степени, тогда как в левой — только  $n$ -й степени по  $D$ .

Несмещенную оценку для  $D''$  можно получить в предельном случае, когда число  $d$  обнаруженных дефектных изделий имеет пуассоновское распределение. Условия этого, сформулированные в § 7.2, состояли в том, что  $d \ll n \ll N$ ,  $d \ll D \ll N$ . В этих предположениях можно считать, что  $B_{ND}^{nd} = p_d(\lambda) = \frac{\lambda^d}{d!} e^{-\lambda}$ , где  $\lambda = n\left(\frac{D}{N}\right)$ . Используя очевидное соотношение  $\lambda p_d(\lambda) = (d+1) p_{d+1}(\lambda)$ , мы можем переписать (7.5.13) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{d=0}^n \varphi''(d) p_d(\lambda) &= D \sum_{k=0}^c p_k(\lambda) = \frac{N}{n}(\lambda) \sum_{k=0}^c p_k(\lambda) = \\ &= \frac{N}{n} \sum_{d=1}^{c+1} d p_d(\lambda). \end{aligned} \quad (7.5.14)$$

При этом мы использовали условие, что  $\frac{d}{D} \ll 1$ , и опустили члены вида  $\frac{d}{D}$ , полагая их равными нулю. Рассматривая (7.5.14) как тождество по  $\lambda$ , находим, приравнявая коэффициенты при  $p_d(\lambda)$ , стоящие в левой и правой частях (7.5.14), что несмещенная оценка  $\varphi''(d)$  имеет вид

$$\varphi''(d) = \begin{cases} 0, & d > c+1, \\ \frac{N}{n} d, & d \leq c+1. \end{cases} \quad (7.5.15)$$

Совсем просто убедиться, используя аналогичные рассуждения, что несмещенная оценка  $\varphi(d)$  для  $D$  имеет вид

$$\varphi(d) = \frac{N}{n} d. \quad (7.5.16)$$

Для получения доверительных границ при оценке эффективности контроля по результатам контроля большого числа партий нам

будет полезно иметь несмещенные оценки для дисперсии самих несмещенных оценок  $\varphi(d)$  и  $\varphi''(d)$ . Для дисперсии оценки числа предъявленных дефектных изделий имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{D}[\varphi] &= \mathbf{M}\varphi(d)^2 - (\mathbf{M}\varphi(d))^2 = \sum_{d=0}^{\infty} \left(\frac{N}{n}\right)^2 d^2 p_d(\lambda) - \left(\frac{N\lambda}{n}\right)^2 = \\ &= \left(\frac{N}{n}\right)^2 (\lambda^2 + \lambda) - \left(\frac{N\lambda}{n}\right)^2 = \left(\frac{N}{n}\right)^2 \lambda. \end{aligned}$$

Так как несмещенная оценка для  $\lambda$  равна  $d$ , то несмещенная оценка  $\varphi_1(d)$  для дисперсии  $\mathbf{D}[\varphi]$  имеет вид

$$\varphi_1(d) = \left(\frac{N}{n}\right)^2 d. \quad (7.5.17)$$

Так как  $\varphi''(d)$  является несмещенной оценкой для случайной величины  $D''$ , то здесь представляет интерес получение несмещенной оценки для дисперсии  $D'' - \varphi''(d)$ . Предварительно заметим, что

$$(D'' - \varphi'')^2 = \begin{cases} \left(\frac{N}{n}\right)^2 (\lambda - d)^2, & d \leq c, \\ \left(\frac{N}{n}\right)^2 (c + 1)^2, & d = c + 1, \\ 0, & d > c + 1. \end{cases} \quad (7.5.18)$$

Учитывая (7.5.18), находим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(D'' - \varphi'')^2 &= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{ \sum_{d=0}^c (\lambda - d)^2 p_d(\lambda) + (c + 1)^2 p_{c+1}(\lambda) \right\} = \\ &= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{ \sum_{d=0}^{c+1} d^2 p_d(\lambda) - 2\lambda \sum_{d=0}^c d p_d(\lambda) + \lambda^2 \sum_{d=0}^c p_d(\lambda) \right\} = \\ &= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{ \lambda \sum_{d=0}^c (d + 1) p_d(\lambda) - 2\lambda \sum_{d=0}^c d p_d(\lambda) + \lambda \sum_{d=0}^{c+1} d p_d(\lambda) \right\} = \\ &= \left(\frac{N}{n}\right)^2 \left\{ \sum_{d=1}^{c+1} d p_d(\lambda) + (c + 1)(c + 2) p_{c+2}(\lambda) \right\}. \quad (7.5.19) \end{aligned}$$

Уравнение (7.5.3) в нашем случае имеет вид

$$\sum_{d=0}^n \varphi_2(d) p_d(\lambda) = \mathbf{M}(D'' - \varphi'')^2. \quad (7.5.20)$$

Подставляя явное выражение (7.4.19) правой части в (7.5.20) и приравнявая затем коэффициенты при одинаковых функциях  $p_d(\lambda)$ ,

находим, что

$$\varphi_2(d) = \begin{cases} \left(\frac{N}{n}\right)^2 d, & d \leq c+1, \\ \left(\frac{N}{n}\right)^2 (c+1)(c+2), & d = c+2, \\ 0, & d > c+2, \end{cases} \quad (7.5.21)$$

является несмещенной оценкой для дисперсии  $\mathbf{D}[D'' - \varphi''(d)]$ .

Оценка эффективности приемочного контроля. Воспользуемся полученными несмещенными оценками для выяснения эффективности приемочного контроля. Пусть на контроль поступили партии, объемы которых равны  $N_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ ;  $m \gg 1$ . Для контроля  $i$ -й партии был использован план  $(n_i, c_i)_{13}$ , число обнаруженных дефектных изделий при этом оказалось равным  $d_i$ . Обозначим через  $D_i$  неизвестное нам число дефектных изделий, содержащихся в  $i$ -й партии, а через  $D''_i$  — число дефектных изделий в принятой части партии. Несмещенными оценками для общего числа предъявленных дефектных изделий, равного  $\sum_{i=1}^m D_i$ , и общего числа принятых дефектных изделий, равного  $\sum_{i=1}^m D''_i$ , будут в соответствии с (7.5.15) и (7.5.16) служить

$$\sum_{i=1}^m \varphi(d_i) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^m \varphi''(d_i). \quad (7.5.22)$$

Так как  $\sum_{i=1}^m \varphi(d_i)$  имеет при больших  $m$  распределение, близкое к нормальному со средним и дисперсией, равными соответственно  $\sum_{i=1}^m D_i$  и  $\sum_{i=1}^m \left(\frac{N_i}{n_i}\right)^2 \lambda_i$ , где  $\lambda_i = \left(\frac{D_i}{N_i}\right) n_i$ , то с вероятностью, близкой к  $1 - \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \varphi(d_i) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{N_i}{n_i}\right)^2 \lambda_i} &< \sum_{i=1}^m D_i < \\ &< \sum_{i=1}^m D_i \varphi(d_i) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \left(\frac{N_i}{n_i}\right)^2 \lambda_i}, \end{aligned} \quad (7.5.23)$$

где  $u_{\frac{\alpha}{2}}$  — квантиль нормального распределения  $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) \int_{u_{\frac{\alpha}{2}}}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{\alpha}{2}$ . Точные значения дисперсии  $\left(\frac{N_i}{n_i}\right) \lambda_i$  нам неизвестны, поэ-

тому, заменяя их оценками (7.5.17), получаем, что при больших  $m$  с вероятностью, близкой к  $1 - \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \varphi(d_i) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \varphi_1(d_i)} &\leq \sum_{i=1}^m D_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \varphi(d_i) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \varphi_1(d_i)}. \end{aligned} \quad (7.5.24)$$

Аналогичные рассуждения можно использовать и при оценке суммарного числа принятых дефектных изделий. Здесь дисперсия отклонения  $\sum_{i=1}^m \varphi''(d_i)$  от  $\sum_{i=1}^m D_i''$  равна сумме членов вида (7.5.21).

Заменяя дисперсии  $D[\varphi''(d_i) - D_i'']$  оценками  $\varphi_2(d_i)$ , найденными по формуле (7.5.21), получаем, что с вероятностью, близкой к  $1 - \alpha$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \varphi''(d_i) - u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \varphi_2(d_i)} &\leq \sum_{i=1}^m D_i'' \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \varphi''(d_i) + u_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^m \varphi_2(d_i)}. \end{aligned} \quad (7.5.25)$$

Эффективность контроля можно выявить, сравнивая долю  $q_{\text{вх}}$  дефектных изделий в предъявленной на контроль продукции с долей дефектных изделий  $q_{\text{вых}}$  в принятой продукции. В соответствии с оценками (7.5.22) имеем

$$q_{\text{вх}} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i}{\sum_{i=1}^m N_i} \approx \frac{\sum_{i=1}^m \varphi(d_i)}{\sum_{i=1}^m N_i}, \quad q_{\text{вых}} = \frac{\sum_{i=1}^m D_i''}{\sum_{i=1}^m N_i''} \approx \frac{\sum_{i=1}^m \varphi''(d_i)}{\sum_{i=1}^m N_i''}. \quad (7.5.26)$$

Ход контроля можно отображать на графике. Примерный вид графика показан на рис. 7.5.1. По оси ординат отложены номера партий. По положительной части оси абсцисс отложены значения оценок  $\sum_{i=1}^k \varphi(d_i)$ , а ниже — оценок  $\sum_{i=1}^k \varphi''(d_i)$ . Заштрихованные области построены с использованием формул (7.5.24), (7.5.25) для значений  $\alpha = 0,1$ . Вдоль отрицательной части оси пунктиром показаны значения суммарного числа предъявляемых на контроль изделий, равного  $\sum_{i=1}^k N_i$ , а точками — значения числа принятых изделий, равного  $\sum_{i=1}^k N_i''$ . Для графического отображения эффек-

тивности контроля можно также использовать метод скользящего среднего. При этом методе после получения результатов контроля  $k$ -й партии учитываются результаты контроля только по  $M$

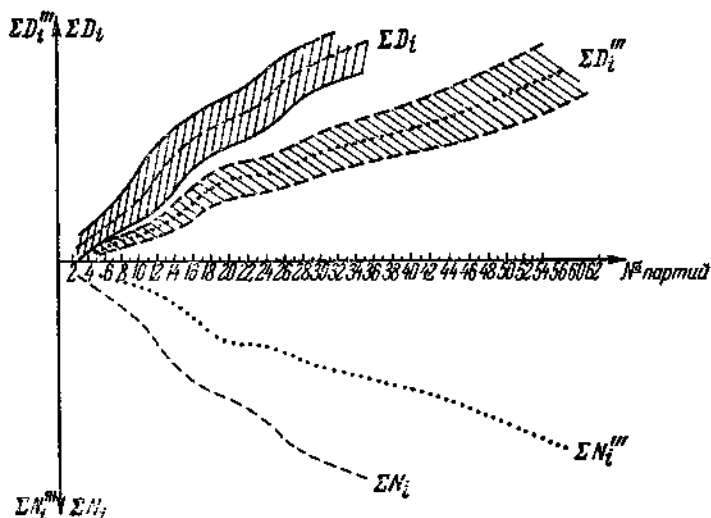


Рис. 7.5.1.

предыдущим партиям; число  $M$  каждый раз одно и то же. В соответствии с формулами (7.5.26) после проверки  $m$ -й партии вычисляются оценки

$$\left. \begin{aligned} q_{\text{вх}}^{(m)} &\approx \frac{\sum_{i=m-M}^m \varphi(d_i)}{\sum_{i=m-M}^m N_i}, \\ q_{\text{вых}}^{(m)} &\approx \frac{\sum_{i=m-M}^m \varphi''(d_i)}{\sum_{i=m-M}^m N_i''} \end{aligned} \right\} \quad (7.5.27)$$

Графики этих оценок показаны на рис. 7.5.2. Верхние и нижние границы заштрихованных полос получены с использованием в (7.5.27) правых и левых частей неравенств (7.5.24) и (7.5.25) для  $\alpha = 0,1$ . Значение  $M$  не должно быть слишком большим, так как при больших  $M$  снижается оперативность выводов об уменьшении эффективности контроля. С другой стороны, оно не должно быть

и слишком маленьким, так при этом сами оценки будут грубыми. Все существенным образом зависит от конкретных значений  $N_i$ ,  $n_i$ ,  $D_i$ ,  $d_i$ , учет которых аналитическим путем очень сложен. Пока для такого подбора  $M$  мы рекомендуем метод проб, или метод статистического моделирования (Монте-Карло).

Несмещенные оценки для планов типа  $(n, c, c')$ . Выше рассматривались несмещенные оценки для пуассоновского приближения. Введем теперь формулы для несмещенных оценок в общем случае использования планов типа однократной выборки. Излагаемые здесь результаты получены С. Х. Сираждиновым и М. И. Эйдельмантом [2]. Предположим, что используется план типа однократной выборки с приемочным числом  $c$  и браковочным числом  $c' \geq c$ ; будем его кратко обозначать  $(n, c, c')$ . Применение этого плана означает, что из партии случайным образом отбирается  $n$

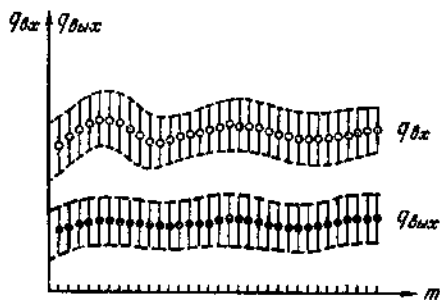


Рис. 7.5.2.

изделий; если число  $d = d(n)$  обнаруженных дефектных изделий таково, что  $d \leq c$ , то оставшаяся часть партии принимается без дальнейшего контроля (решение  $D_3$ ), если  $c < d < c'$ , то принимается решение  $D_2$  и, наконец, если  $d \geq c'$ , то принимается решение  $D_1$ . Планы такого типа могут найти применение, когда стоимость контроля сравнительно велика. Их можно рассматривать как обобщение планов типа  $(n, c)_{ij}$ , рассмотренных в § 7.2. Действительно,  $(n, c)_{12} = (n, k, k')$ , если  $k = -1$ ,  $k' = c$ ;  $(n, c)_{13} =$

Таблица 7.5.1

Число изделий, которые по результатам контроля		
отвергаются без дальнейшей проверки	подвергаются 100% проверке	принимаются без проверки
$N' = \begin{cases} 0, & d < c' \\ N - n, & d \geq c' \end{cases}$	$N'' = \begin{cases} n, & d \leq c \text{ или } d \geq c' \\ N, & c < d < c' \end{cases}$	$N''' = \begin{cases} N - n, & d \leq c \\ 0, & d > c \end{cases}$
$D' = \begin{cases} 0, & d < c' \\ D - d, & d \geq c' \end{cases}$	$D'' = \begin{cases} d, & d \leq c \text{ или } d \geq c' \\ D, & c < d < c' \end{cases}$	$D''' = \begin{cases} D - d, & d \leq c \\ 0, & d > c \end{cases}$

$= (n, k, k')$ , если  $k = c, k' = c + 1$ ;  $(n, c)_{23} = (n, k, k')$ , если  $k = c, k' = n + 1$ . В таблице 7.5.1 приведены сводные данные о значениях  $N', N'', N''', D', D'', D'''$ .

Как следует из теоремы 7.5.3, достаточной статистикой является выявленное число дефектных изделий  $D''$ . Наша задача состоит в выводе формул для несмещенных оценок  $\varphi'(D'')$  и  $\varphi'''(D'')$  случайных величин  $D'$  и  $D'''$ . Несмещенную оценку  $\varphi(D')$  для  $D$  можно получить из соотношения

$$\varphi(D'') = \varphi'(D'') + D'' + \varphi'''(D''). \quad (7.5.28)$$

Несмещенные оценки для  $D, D', D'''$ , удовлетворяющие (7.5.28), называют согласованными. Так как вывод формул для несмещенных оценок несложен, то мы проведем его только для  $\varphi'(D'')$ .  $D'$  — случайная величина, математическое ожидание которой равно

$$MD' = \sum_{d=c'}^n (D-d) B_{ND}^{nd}.$$

Поэтому уравнение (7.5.3) имеет вид

$$\sum_{d=0}^n \varphi'(D'') B_{ND}^{nd} = \sum_{d=c'}^n (D-d) B_{ND}^{nd}. \quad (7.5.29)$$

Учитывая значение  $D'$  (по таблице 7.5.1), можно уравнение (7.5.29) записать в виде

$$\sum_{d=0}^c \varphi'(d) B_{ND}^{nd} + \sum_{c < d < c'} \varphi'(D) B_{ND}^{nd} + \sum_{d=c'}^n \varphi'(d) B_{ND}^{nd} = \sum_{d=c'}^n (D-d) B_{ND}^{nd}. \quad (7.5.30)$$

$\varphi'(d)$  должны удовлетворять этому уравнению при  $D = 0, 1, \dots, N$ . Как следует из формулы (7.2.8), правая часть является многочленом  $(n+1)$ -й степени по  $D$ . Левая часть также будет многочленом  $(n+1)$ -й степени, если считать, что  $\varphi(D) = aD + b$ . Таким образом, мы можем решить это уравнение, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $D$ . Еще проще получить решение, полагая последовательно  $D = 0, 1, \dots, N$ . Если  $D = 0, \dots, c$ , то  $B_{ND}^{nd} = 0$ ,  $d > c$ , поэтому из (7.5.30) получаем, что  $\varphi'(d) = 0$ ,  $d \leq c$ . Полагая затем  $D = N$ , находим, что  $\varphi'(N) = \left(\frac{N-n}{n}\right)n$ ; при  $D = N-1$  имеем  $\varphi'(N-1) = \frac{N-n}{n}(n-1)$  и т. д.; при  $D = N-2, \dots, N-n-c'+1$   $\varphi'(d) = \frac{N-n}{n}d$ , если только  $d \geq c'$ . Подставляя полученные

результаты в (7.5.30), получаем уравнение

$$\varphi'(D) \sum_{c < d < c'} B_{ND}^{nd} + \frac{N-n}{n} W_{ND}^{nc'} = D \Pi_{ND}^{nc'} - W_{ND}^{nc'}.$$

Из этого уравнения находим, что

$$\varphi'(D) = \frac{D \Pi_{ND}^{nc'} - W_{ND}^{nc'}}{\Pi_{ND}^{nc'-1} - \Pi_{ND}^{nc'}}.$$

Точно так же находятся несмещенная оценка  $\varphi'''(D'')$ , а затем, с использованием формулы (7.5.28), и несмещенная оценка  $\varphi(D'')$ . Полученные формулы сведены в таблицу 7.5.2.

Таблица 7.5.2

$d$	$D'$	$\varphi'(D')$	$\varphi'''(D'')$	$D$
$d \leq c$	$d$	0	$\frac{N-n}{n} d$	$\frac{N}{n} d$
$c < d < c_1$	$D$	$\frac{D \Pi_{ND}^{nc'} - \left(\frac{N}{n}\right) W_{ND}^{nc'}}{\Pi_{ND}^{nc'-1} - \Pi_{ND}^{nc'}}$	$\frac{D \Pi_{ND}^{nc} - \left(\frac{N}{n}\right) M_{ND}^{nc}}{\Pi_{ND}^{nc'-1} - \Pi_{ND}^{nc}}$	$\left(\frac{N}{n}\right) \frac{M_{ND}^{nc'-1} - M_{ND}^{nc}}{\Pi_{ND}^{nc'-1} - \Pi_{ND}^{nc}}$
$d \geq c'$	$d$	$\frac{N-n}{n} d$	0	$\frac{N}{n} d$

Правило проверки  $(n+1)$ -го изделия. Пользоваться полученными оценками неудобно, так как вычисление функций  $\Pi_{ND}^{nc}$ ,  $M_{ND}^{nc}$  представляет значительные трудности. Можно, однако, используя правило проверки  $(n+1)$ -го изделия, предложенное в работе С. Х. Сираждинова и М. И. Эйдельманта [2], получить весьма простые формулы для несмещенных оценок. Правило проверки  $(n+1)$ -го изделия при использовании плана типа  $(n, c, c')$  состоит в следующем. По результатам разбраковки  $n$  изделий принимают решение в соответствии с планом  $(n, c, c')$ . Однако если окажется, что  $d \leq c$  или  $d \geq c'$ , то производят проверку еще одного  $(n+1)$ -го изделия. Результаты проверки  $(n+1)$ -го изделия не влияют на принятое ранее решение, но они существенным образом используются при построении несмещенных оценок. Пусть  $d'$  — общее число дефектных изделий с учетом результатов проверки  $(n+1)$ -го изделия. Таким образом,  $d' = d + \varepsilon_{n+1}$ , где  $\varepsilon_{n+1} = 1$ , если  $(n+1)$ -е изделие



дефектное, и  $\varepsilon_{n+1} = 0$ , если оно годное. При использовании правила проверки  $(n+1)$ -го изделия

$$N' = \begin{cases} 0, & d < c', \\ N-n-1, & d \geq c', \end{cases} \quad N'' = \begin{cases} n+1, & d \leq c \text{ или } d \geq c', \\ N, & c < d < c', \end{cases}$$

$$N''' = \begin{cases} N-n-1, & d \leq c, \\ 0, & d > c. \end{cases}$$

В соответствии с теоремой 7.5.3 достаточная статистика имеет вид  $(D'', N'')$ , где

$$D'' = \begin{cases} d', & \text{если } c' \leq d \\ & \text{или } d \leq c, \\ D, & \text{если } c < d < c'. \end{cases}$$

Заметим, что  $D'' = d' = c + 1$  только тогда, когда  $d(n) = c$ ,  $\varepsilon_{n+1} = 1$ ; соответственно  $D'' = d' = c'$  только тогда, когда  $d(n) = c'$ ,  $\varepsilon_{n+1} = 0$ . При выводе формул для несмещенных оценок полезно использовать тождества

$$\sum_{d=0}^c (D-d) B_{ND}^{nd} = \frac{N-n}{n+1} \sum_{d'=0}^{c+1} d' B_{ND}^{n+1, d'},$$

$$\sum_{d=c'}^n (D-d) B_{ND}^{nd} = \frac{N-n}{n+1} \sum_{d'=c'+1}^{n+1} d' B_{ND}^{n+1, d'}. \quad (7.5.31)$$

Тождества (7.5.31) являются следствием простого, легко проверяемого тождества

$$(D-d) B_{ND}^{nd} = \frac{N-n}{n+1} (d+1) B_{ND}^{n+1, d+1}. \quad (7.5.32)$$

Числа  $D'$ ,  $D''$ ,  $D'''$  при использовании правила проверки  $(n+1)$ -го изделия уже отличаются от указанных в таблице 7.5.2. Допуская, что результаты проверки  $(n+1)$ -го изделия не учитываются (в частности, если  $\varepsilon_{n+1} = 1$ , то все равно это дефектное изделие входит в число принятой продукции), можно найти несмещенные оценки  $\varphi'$  и  $\varphi''$ . Заметим, однако, что фактическое число  $D'''$  принятых или  $D'$  отвергнутых дефектных изделий будет выражаться соотношением

$$\tilde{D}^\omega = \max(0, D^\omega - \varepsilon_{n+1}), \quad \omega = ', '''. \quad (7.5.33)$$

Если несмещенная оценка для  $D^\omega$  найдена и равна  $\varphi^\omega$ , то в соответствии с (7.5.33) в качестве оценки для  $\tilde{D}^\omega$  можно использовать

$$\tilde{\varphi}^\omega = \max[0, \varphi^\omega - \varepsilon_{n+1}], \quad \omega = ', '''. \quad (7.5.34)$$

Такая оценка, вообще говоря, будет смещенной<sup>1)</sup>, однако смещение относительно  $\mathbf{M}\tilde{D}^\omega$  невелико. Ограничимся выводом формулы для оценки  $\varphi''$ . Уравнение  $\mathbf{M}\varphi''' = \mathbf{M}D''$  имеет вид

$$\sum_{\substack{d < c \\ d' > c'}} \sum_{\varepsilon_{n+1}} \varphi''(d + \varepsilon_{n+1}) B_{ND}^{nd} B_{N-n, D-d}^{1, \varepsilon} + \varphi''(D) \sum_{c < d < c'} B_{ND}^{nd} = \\ = \sum_{d=0}^c (D-d) B_{ND}^{nd}. \quad (7.5.35)$$

Замечая, что  $B_{N-n, D-d}^{1,0} = \frac{N-n-(D-d)}{N-n}$ ,  $B_{N-n, D-d}^{1,1} = \frac{D-d}{N-n}$ ,

$$B_{ND}^{nd} \frac{D-d}{N-n} = \frac{d+1}{n+1} B_{ND}^{n+1, d+1}, \quad B_{ND}^{nd} \frac{N-n-(D-d)}{N-n} = \frac{n+1-d}{n+1} B_{ND}^{n+1, d},$$

и учитывая (7.5.31), мы можем переписать (7.5.35) в виде

$$\sum_{d' \leq c} \varphi'''(d') B_{ND}^{n+1, d'} + \frac{c+1}{n+1} \varphi'''(c+1) B_{ND}^{n+1, c+1} + \varphi'''(D) \sum_{c < d < c'} B_{ND}^{nd} + \\ + \varphi'''(c') \frac{n+1-c'}{n+1} B_{ND}^{n+1, c'} + \sum_{d' \geq c'+1} \varphi'''(d') B_{ND}^{n+1, d'} = \\ = \frac{N-n}{n+1} \sum_{d'=0}^{c+1} d' B_{ND}^{n+1, d'}. \quad (7.5.36)$$

Существует много решений уравнения (7.5.36). Естественно предположить, что  $\varphi'''(D) = 0$ . При таком допущении решение (7.5.36) легко получить, приравняв коэффициенты при  $B_{ND}^{n+1, d'}$  в левой и правой частях (7.5.36). Окончательный результат задается формулами

$$\varphi'''(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' < c+1, \\ N-n, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \quad (7.5.37)$$

Из (7.5.34) и (7.5.37) получаем

$$\tilde{\varphi}'''(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d < c+1, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 < c+1, \\ N-n-1, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \quad (7.5.38)$$

Аналогичным образом можно найти выражения для оценок  $\varphi'$ ,  $\tilde{\varphi}'$ .

<sup>1)</sup>  $\tilde{\varphi}^\omega$  останется несмещенной при условии  $D > n$ .

Здесь имеем

$$\varphi'(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' \geq c' + 1, \\ 0, & d' \leq c', \end{cases} \quad (7.5.39)$$

$$\tilde{\varphi}'(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d \geq c' + 1, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d + 1 \geq c' + 1, \\ 0, & d' \leq c'. \end{cases} \quad (7.5.40)$$

Несмещенные оценки для планов  $(n, c)_{ij}$ . Исходя из полученных результатов, дадим набор формул для несмещенных оценок  $D, D', D''$  при использовании планов типов  $(n, c)_{ij}$ .

План  $(n, c)_{12}$ . Так как  $(n, c)_{12} = (n, k, k')$ ,  $k = -1$ ,  $k' = c + 1$ , то из таблицы 7.5.2 находим, что

$$\varphi'(D'') = \begin{cases} \frac{D \Pi_{ND}^{n, c+1} - \left(\frac{N}{n}\right) W_{ND}^{nc}}{\Pi_{ND}^{nc}}, & d \leq c, \\ \frac{N-n}{n} d, & d > c. \end{cases} \quad (7.5.41)$$

Вопрос о вычислении оценки  $\varphi'''(D'')$  отпадает, так как  $D''' \equiv 0$ . При использовании правила проверки  $(n+1)$ -го изделия из (7.5.40) находим, что оценка для  $\tilde{D}'$  имеет вид

$$\tilde{\varphi}'(d') = \begin{cases} 0, & d' \leq c + 1, \\ \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d \geq c + 2, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d + 1 \geq c + 2. \end{cases} \quad (7.5.42)$$

Можно также, не прибегая к правилу проверки  $(n+1)$ -го изделия, использовать и упрощенную несмещенную оценку

$$\varphi'(d, D) = \begin{cases} N \frac{d}{n} - D, & d \leq c, \\ \frac{N-n}{n} d, & d > c. \end{cases} \quad (7.5.43)$$

В работе [2] указывается, что эта оценка имеет меньшую точность, чем оценки (7.5.41), (7.5.42).

План  $(n, c)_{23}$ . Для планов этого типа  $D' = 0$ , поэтому представляет интерес только получение несмещенной оценки для  $D''$ . Замечая, что  $(n, c)_{23} = (n, k, k')$ ,  $k = c$ ,  $k' = n + 1$ , из формул

таблицы 7.5.2 находим, что

$$\varphi'''(D^n) = \begin{cases} \frac{N-n}{n} d, & d \leq c, \\ \frac{D\Pi_{ND}^{nc} - \frac{N}{n}M_{ND}^{nc}}{\Pi_{ND}^{n,c+1}}, & d > c. \end{cases} \quad (7.5.44)$$

При использовании правила проверки  $(n+1)$ -го изделия из (7.5.38) находим, что оценка для  $\tilde{D}'''$  имеет вид

$$\varphi'''(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d < c+1, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 < c+1, \\ N-n-1, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \quad (7.5.45)$$

Здесь также существует менее точная несмещенная оценка

$$\varphi'''(d, D) = \begin{cases} \frac{N-n}{n} d, & d \leq c, \\ \frac{N}{n} d - D, & d > c. \end{cases} \quad (7.5.46)$$

П л а н  $(n, c)_{13}$ . При использовании планов типа  $(n, c)_{13}$  100% разбраковка не производится. Это резко уменьшает информацию о засоренности партий дефектными изделиями. Вообще можно показать, что при использовании плана  $(n, c)_{13}$  несмещенных оценок для  $D'$  и  $D'''$  не существует. Однако здесь с успехом можно использовать правило проверки  $(n+1)$ -го изделия. Выражения для оценок  $D'$ ,  $D'''$ , полученные аналогично выводу формул (7.5.38), (7.5.40), приводятся ниже:

$$\tilde{\varphi}'(d') = \begin{cases} 0, & d' \leq c+1, \\ \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d \geq c+2, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 \geq c+2. \end{cases} \quad (7.5.47)$$

$$\tilde{\varphi}'''(d') = \begin{cases} \frac{N-n}{n+1} d', & d' = d < c+1, \\ \frac{N-n}{n+1} d' - 1, & d' = d+1 < c+1, \\ N-n-1, & d' = d+1 = c+1, \\ 0, & d' > c+1. \end{cases} \quad (7.5.48)$$

Построение несмещенных оценок для планов типа двукратной выборки. В заключение параграфа рассмотрим некоторые соображения, связанные с построением несмещенных оценок для случая использования планов типа двукратной выборки. В американской литературе по вопросам надежности [19] неоднократно встречаются указания, что несмещенные оценки для  $D$  надо строить по первой выборке. Такие рекомендации, по-видимому, связаны с простотой формулы (7.5.16), по которой вычисляется эта оценка. Однако достаточная статистика не совпадает с числом  $d$  дефектных изделий, обнаруженных в первой выборке. В том случае, когда объем проверяемой продукции невелик, желательно для получения более точных оценок учитывать результаты проверки второй выборки. К сожалению, до настоящего времени вопросы построения несмещенных оценок для случаев использования планов типа двукратной выборки еще не исследованы. Соответственно нет и оценок величин выигрыша в точности при более полном использовании информации о результатах разбраковки. По-видимому, одной из причин такого застоя является сложность получения соответствующих формул. С точки зрения методов никаких трудностей принципиального характера не возникает. Вывод соответствующих формул можно проводить вполне аналогично тому, как это делалось выше. Для примера мы ограничимся только случаем использования плана типа двукратной выборки  $(n_1 n_2 c_1 c_2)_{1313}$ . Достаточная статистика  $(N'', D'')$  имеет вид

$$N'' = \begin{cases} n_1, & d_1 > c_2 \text{ или } d_1 \leq c_1, \\ n_1 + n_2, & c_1 < d_1 \leq c_2, \end{cases}$$

$$D'' = \begin{cases} d_1, & d_1 > c_2 \text{ или } d_1 \leq c_1, \\ d_1 + d_2, & c_1 < d_1 \leq c_2, \end{cases}$$

где  $d_i$  — число дефектных изделий, обнаруженных в  $i$ -й выборке. Аналогичные соотношения можно выписать для  $N'$ ,  $N''$ ,  $D'$ ,  $D''$ . В соответствии с (7.5.2) и (7.5.3) формулы для несмещенных оценок имеют вид

$$M\varphi = D, \quad M\varphi' = MD', \quad M\varphi'' = MD'' \quad (7.5.49)$$

Если искать несмещенные оценки в классе функций, зависящих только от  $N''$  и  $D''$ , т.е. от числа проверенных и числа обнаруженных дефектных изделий, то для несмещенной оценки  $\varphi$ , расписывая более подробно левую формулу (7.5.49), имеем

$$\sum_{d_1 < c_1, d_1 > c_2} \varphi(d_1, 1) B_{ND}^{n_1 d_1} +$$

$$+ \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = 0}^{n_2} \varphi(d_1 + d_2, 2) B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1, D-d_1}^{n_2 d_2} = D. \quad (7.5.50)$$

Здесь  $\varphi(d, 1)$  соответствует случаю, когда проверялась только первая выборка, а  $\varphi(d, 2)$  — когда проверялись две выборки. Это соотношение должно быть справедливым при любом  $D=0, 1, \dots, N$ . Левая часть является многочленом  $(n_1 + n_2)$ -й степени по  $D$ , а правая часть равна  $D$ , поэтому можно, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $D$  в левой и правой частях (7.5.3), составить  $n_1 + n_2 + 1$  уравнений для нахождения такого же количества неизвестных  $\varphi(d, 1)$  и  $\varphi(d, 2)$ . Число значений  $\varphi(d, 1)$  равно  $n_1 - (c_2 - c_1) + 1$ , а число  $\varphi(d, 2)$  равно  $n_2 + (c_2 - c_1)$ . Заметим, что для решения (7.4.50) проще использовать прием подбора частных значений  $D$ . Полагая сначала  $D=0, \dots, c$ , а затем  $D=N, N-1, \dots, N-(n_1 - c_2) + 1$ , мы найдем все значения  $\varphi(d, 1)$ :

$$\varphi(d, 1) = \frac{N}{n} d, \quad d_1 = d \leq c \quad \text{или} \quad d_1 = d > c_2. \quad (7.5.51)$$

Значения  $\varphi(d, 2)$  можно после этого найти, подставляя в (7.5.50) значения  $D=c_1+1, c_1+2, \dots$ . Полученная система уравнений имеет треугольную матрицу коэффициентов при неизвестных  $\varphi(d, 2)$ ,  $d=c_1+1, \dots, n_2+(c_2-c_1)$ . Это позволяет алгоритмизировать процесс вычислений, последовательно находя значения  $\varphi(d, 2)$ .

Если пойти тем же путем для построения несмещенных оценок  $\varphi'(d, i)$  и  $\varphi''(d, i)$ , то левую часть  $M\varphi' = MD'$ ,  $M\varphi'' = MD''$  надо записать аналогично (7.5.50), а в правой части вместо  $D$  поставить

$$MD' = \sum_{d_1 > c_2} (D - d_1) B_{ND}^{nd_1} + \\ + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = c_2 - d_1 + 1}^{n_2} [D - (d_1 + d_2)] B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N - n_1, D - d_1}^{n_2 d_2}, \quad (7.5.52)$$

$$MD'' = \sum_{d_1 = 0}^{c_1} (D - d_1) B_{ND}^{nd_1} + \\ + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = 0}^{c_1 - d_1} [D - (d_1 + d_2)] B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N - n_1, D - d_1}^{n_2 d_2}. \quad (7.5.53)$$

$MD'$  и  $MD''$ , как это следует из (7.2.8) и формул (7.5.52), (7.5.53), являются многочленами  $(n_1 + n_2 + 1)$ -й степени по  $D$ , тогда как  $M\varphi'$  и  $M\varphi''$  суть многочлены степени  $n_1 + n_2$  по  $D$ . Таким образом, второе и третье уравнения (7.5.49) не имеют решений, независимых от  $D$  и удовлетворяющих им при любых значениях  $D=0, 1, \dots, N$ . Противоречивость уравнений приводит к необходимости повысить на единицу степень многочленов, выражающих  $M\varphi'$  и  $M\varphi''$ . Этого можно достичь разными способами. Одним из экономичных способов является правило проверки  $(n_1 + n_2 + 1)$ -го издella. Применительно к плану  $(n_1 n_2 c_1 c_2)_{1313}$  это правило означает,

что решение принимается так, как если бы испытания проводились в соответствии с планом  $(n_1 n_2 c_1 c_2)_{1313}$ . Однако, когда  $c_1 < d \leq c_2$ , после проверки второй выборки и принятия соответствующего решения проверяется еще одно изделие,  $(n_1 + n_2 + 1)$ -е. Подчеркиваем, что результаты проверки  $(n_1 + n_2 + 1)$ -го изделия не влияют на принятое ранее решение.

Будем записывать  $\varepsilon = 0$ , если  $(n_1 + n_2 + 1)$ -е изделие годное, и  $\varepsilon = 1$ , если оно дефектное. Из теоремы 7.5.3 следует, что достаточной статистикой является  $(d_1, n_1)$ , если  $c_2 < d_1$ , или  $d_1 \leq c_1$  и  $(d_1 + d_2 + \varepsilon, n_1 + n_2 + 1)$ , если  $c_1 < d_1 \leq c_2$ . Поскольку величины  $n_1$  и  $n_2$  нам известны до начала проверки, то эквивалентным выражением будет пара  $(d_1 + d_2 + \varepsilon, 2)$ , если  $c_1 < d_1 \leq c_2$ , и пара  $(d_1, 1)$  в противоположном случае. Значения величин  $\tilde{D}'$  и  $\tilde{D}''$ , соответствующие случаю использования правила проверки  $(n_1 + n_2 + 1)$ -го изделия, приведены в таблице 7.5.3.

Таблица 7.5.3

$d_1$	$\tilde{D}'$	$\tilde{D}''$
$d_1 \leq c_1$	0	$D - d_1$
$c_1 < d_1 \leq c_2$ $d_1 + d_2 \leq c_2$	0	$D - (d_1 + d_2 + \varepsilon)$
$c_1 < d_1 \leq c_2$ $d_1 + d_2 > c_2$	$D - (d_1 + d_2 + \varepsilon)$	0
$d_1 > c_2$	$D - d_1$	0

В соответствии со значениями таблицы 7.5.3 правые части уравнений  $M\varphi' = MD'$  и  $M\varphi'' = MD''$  имеют вид

$$MD' = \sum_{d_1=c_2+1}^{n_1} (D-d_1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{d_2=c_1-d_1+1}^{n_2} \sum_{\varepsilon=0,1} [D-(d_1+d_2+\varepsilon)] \times \\ \times B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1}^{n_2 d_2} B_{D-d_1}(\varepsilon), \quad (7.5.54)$$

$$MD'' = \sum_{d_1=0}^{c_1} (D-d_1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \sum_{d_1=c_1+1}^{c_2} \sum_{d_2=0}^{c_2-d_1} \sum_{\varepsilon=0,1} [D-(d_1+d_2+\varepsilon)] \times \\ \times B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1}^{n_2 d_2} B_{D-d_1}(\varepsilon), \quad (7.5.55)$$

где  $B(\varepsilon) = B_{N-(n_1+n_2)}^{1-\varepsilon} B_{D-(d_1+d_2)}^{\varepsilon}$ . Левые части уравнений  $M\varphi' = MD'$  и  $M\varphi'' = MD''$  в соответствии с правилом проверки  $(n_1 + n_2 + 1)$ -го

изделия записываются в виде

$$M\varphi^{\omega} = \sum_{d_1 < c_1, d_1 > c_2} \varphi^{\omega}(d_1, 1) B_{ND}^{n_1 d_1} + \\ + \sum_{d_1 = c_1 + 1}^{c_2} \sum_{d_2 = 0}^{n_2} \sum_{\varepsilon = 0, 1} \varphi^{\omega}(d_1 + d_2 + \varepsilon, 2) B_{ND}^{n_1 d_1} B_{N-n_1}^{n_2 d_2} B_{D-d_1}(\varepsilon), \quad (7.5.56)$$

где  $\omega = \prime$  или  $\omega = \prime\prime$  в зависимости от того, какая несмещенная оценка отыскивается. Теперь уже левая и правая части уравнений, полученных приравниванием (7.5.54) и (7.5.55) к (7.5.56), являются многочленами степени  $n_1 + n_2 + 1$ . Эти уравнения можно разрешать относительно неизвестных точно так же, как это делалось для случая использования однократной выборки. Рекомендуем, как и при решении (7.5.50), сначала найти значения  $\varphi^{\omega}(d, 1)$ ; если значения  $\varphi^{\omega}$  найдены, то, используя соотношения (7.5.53) и (7.5.34), можно построить оценки  $\tilde{\varphi}^{\omega}$ , имеющие небольшие смещения относительно  $\tilde{D}^{\omega}$ .

Из приведенных примеров видно, что возникающие трудности получения различных оценок в случаях планов типа двукратной выборки носят вычислительный характер. Можно составить программы для получения несмещенных оценок на электронных вычислительных машинах. Следует иметь в виду, что уже в ближайшее десятилетие вычислительные машины будут помогать управлять производством на многих крупных предприятиях. Как частный пример такой помощи можно рассматривать вычисление эффективности приемочного контроля. Один раз составив (или получив от другой организации) программу обработки результатов контроля партий, можно будет получать сводки о ходе контроля, оперативно перестраивая его в зависимости от ухудшения или улучшения качества и изменения требований заказчика.

## § 7.6. Введение в задачи текущего контроля

Общие положения. Все предыдущие параграфы этой главы были посвящены вопросам приемочного контроля с альтернативным делением изделий на годные и дефектные. Это, конечно, не означает, что приемочный контроль играет ведущую роль в статистических методах контроля качества, а объясняется большей осведомленностью авторов в вопросах приемочного контроля. К настоящему времени вышло несколько книг, в которых подробно разбираются вопросы текущего контроля (см. [3], [20]). Очень полно, с изложением деталей и числовыми примерами, вопросы текущего контроля рассматриваются в 17 главах книги Коудена [6]. Уделив в настоящем издании этим вопросам только один параграф,



мы излагаем их в более широком плане, чем это делается в книге Коудена.

В отличие от приемочного контроля, где определяется степень пригодности для использования уже готовых партий продукции, текущий контроль должен обеспечить нормальный отлаженный ход технологического процесса. Таким образом, текущий контроль надо рассматривать как систему правил, обеспечивающих быстрое выявление недопустимых отклонений качества производимой продукции. Текущий контроль проводится на

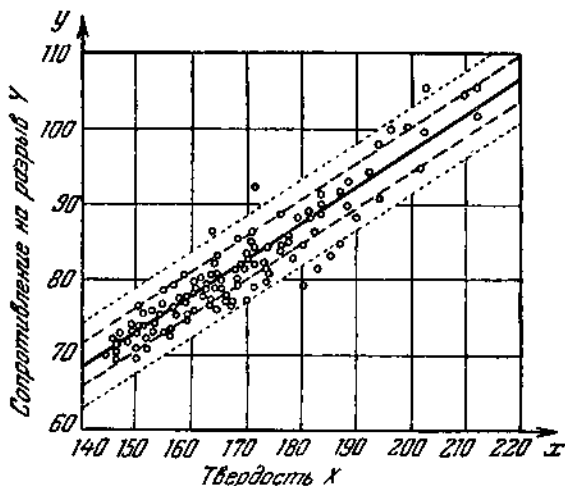


Рис. 7.6.1.

контрольных постах (КП), либо с помощью автоматизированных устройств, либо путем непосредственного измерения. Таких КП организуется несколько. Они ставятся после наиболее ответственных операций, результаты которых играют решающую роль в обеспечении качества. Поскольку нужно своевременно выявить возникшие отклонения от нормального хода процесса, то желательно использовать всю информацию, полученную в результате измерений. В силу этого контроль по количественному признаку играет доминирующую роль в методах текущего контроля. Объемы выборок здесь, как правило, значительно меньше, чем при проведении приемочного контроля. Ниже будут даны другие причины, приводящие к целесообразности использования количественных результатов измерений. Важной фазой разработки правил текущего контроля является выбор измеряемых параметров. Объем измеряемых параметров ограничивается экономической целесообразностью. Сле-

дует также учитывать и возможную взаимную зависимость измеряемых параметров, что также может привести к уменьшению необходимого объема измерений. На рис. 7.6.1 показаны результаты измерений 118 образцов отожженной стали. По оси  $x$  отложены значения твердости, выраженные в  $кг/см^2$ , а по оси  $y$  — сопротивление на разрыв. Этот рисунок взят из книги Коудена (стр. 375). Измерения на твердость проще и не разрушают изделий. Ввиду большой корреляции можно уменьшить объем испытаний на разрыв,

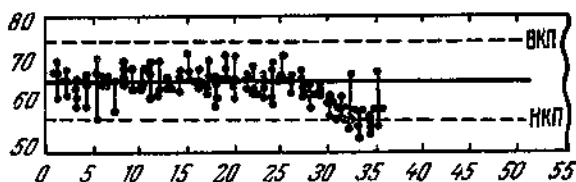


Рис. 7.6.2.

заменяв их испытаниями на твердость. Выявление таких зависимостей представляет особую ценность в тех случаях, когда измерения одного из параметров стоят значительно дороже, чем измерения другого коррелированного с ним параметра.

Если уже решено, какие параметры надо измерять, то чаще всего текущий контроль проводится по следующей схеме. Из каждых  $N$  выпущенных изделий отбирают  $n$  (4—20) изделий. Пусть  $x_{k1}, \dots, x_{kn}$  — численные значения измеряемого параметра в  $k$ -й выборке. По этим результатам вычисляют среднее  $\bar{x}_k = (x_{k1} + \dots + x_{kn})/n$  и размах  $R_k = x_{ki0} - x_{kj0}$ , где  $x_{ki0} = \max_i x_{ki}$ ,  $x_{kj0} = \min_j x_{ki}$ .

Значения  $\bar{x}_k$  и  $R_k$  наносятся на соответствующие контрольные карты средних и размахов. На рис. 7.6.2, взятом также из книги Коудена, показаны результаты измерений 35 выборок на сопротивление разрыву хлопчатобумажной ткани. Пунктирные линии ВКП и НКП соответствуют так называемым верхним и нижним контрольным пределам. Выход хотя бы одного из значений  $\bar{x}_k$  и  $R_k$  за контрольные пределы является сигналом к проверке нормальности хода технологического процесса. Отчетливо видна тенденция уменьшения средних значений в выборках с номерами 30—35. Исследование показало, что причиной уменьшения сопротивления на разрыв явилось ухудшение качества начальной смеси. О других методах использования контрольных карт см. [21], [22].

Необходимость исследования разладок нормального производства. Исследование статистических свойств параметров может оказать существенное влияние на выбор

методов проведения текущего контроля. Оно может оказаться полезным и при уже выбранной методике, подобной только что описанной схеме двух контрольных карт. Особое внимание при этом надо обратить на выделение наиболее характерных видов нежелательных изменений статистических свойств параметров — разладок. Как правило, при нормальном ходе производства результаты измерений параметров большого количества изделий имеют гистограммы, аналогичные приведенной на рис. 7.6.3. На этом рисунке построена гистограмма значений величины сопротивлений в омах. Для

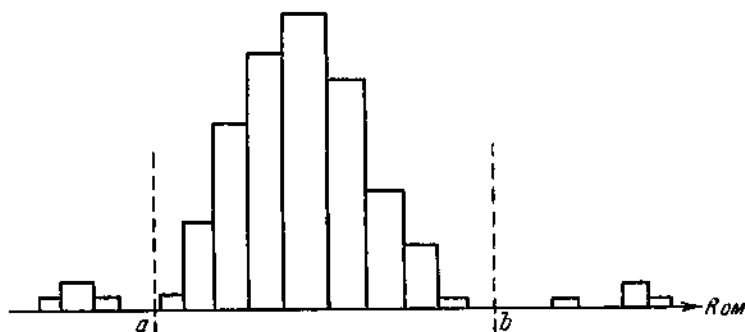


Рис. 7.6.3.

гистограммы характерно наличие большой группы элементов, имеющих значения, лежащие в пределах интервала  $(a, b)$ . Эта группа элементов характеризуется таким разбросом значений параметров, для которого можно предположить наличие плотности вероятностей, задаваемой определенной статистической зависимостью вида  $f(x, \theta)$ , где  $\theta$  — параметр, характеризующий плотность. Число изделий, имеющих значения параметров вне интервала  $(a, b)$ , невелико по сравнению со всем количеством проверенных изделий. А. А. Ступаченко группу изделий, имеющих распределение  $f(x, \theta)$ , называет «здоровой» частью продукции. Большие отклонения значений параметров связаны, как правило, с наличием дефектов или, что бывает реже, вызваны неудачной комбинацией многих исходных параметров, определяющих в итоге значение измеряемого параметра. При стабильном ходе технологического процесса вид и значения параметров  $\theta$ , определяющих плотность вероятностей  $f(x, \theta)$  «здоровой» части продукции, меняются несущественно. Такое допущение об устойчивости  $f(x, \theta)$  выполняется уже значительно реже для элементов, имеющих большие отклонения этих параметров. Таким образом, нельзя считать, что большие отклонения параметров происходят в соответствии с определенным распределением

вероятностей, не меняющим своего вида с течением времени. Трудно ожидать статистической устойчивости больших отклонений параметров, так как причины, вызывающие эти отклонения, могут быть весьма специфичны.

Очень часто, но, конечно, не всегда, «здоровая» часть продукции имеет распределение, близкое к нормальному или логарифмически нормальному распределению. Однако могут встретиться случаи, когда распределение «здоровой» части продукции многовершинное. Многовершинность может получиться в результате смешивания

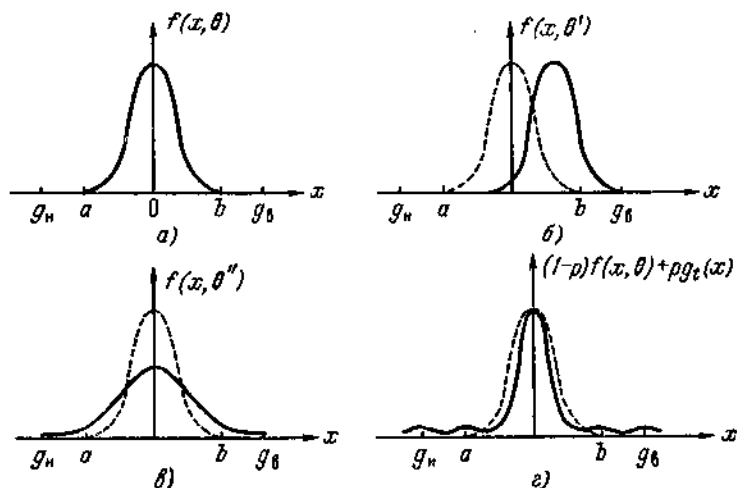


Рис 7.6.4.

исходной продукции от двух технологических цепочек, имеющих различные режимы работы. Исходя из вида гистограммы, показанной на рис. 7.6.3, разладки можно разбить в первом приближении на три группы. На рис. 7.6.4, а показан идеализированный случай, когда технологический процесс отлажен и значения параметров «здоровой» части продукции, характеризующих качество, лежат в пределах интервала допусков ( $g_n$ ,  $g_b$ ). Изделий, имеющих большие отклонения параметров, нет. Разладка типа I состоит в том, что распределение «здоровой» части продукции настолько сильно смещается в сторону одной из границ поля допуска, что значительная часть изделий имеет значения параметров, лежащие вблизи границы допуска или даже превышающие ее (рис. 7.6.4, б). При наличии разладки типа I плотность вероятностей распределения значений параметров имеет тот же аналитический вид  $f(x, \theta')$ , но  $\theta' \neq \theta$ . Разладка типа II характеризуется резким воз-

растанием разброса значений измеряемых параметров, когда значительная часть элементов имеет значения, либо выходящие за пределы интервала допусков ( $g_n$ ,  $g_b$ ), либо лежащие вблизи его границ. График плотности вероятностей  $f(x, \theta)$  в случае разладки типа II показан на рис. 7.6.4, в.

Наконец, на рис. 7.6.4, г показан график плотности  $f(x)$  для распределения вероятностей в случае разладок типа III. Здесь вид плотности распределения здоровой части продукции примерно тот же, что и в идеализированном случае, показанном на рис. 7.6.4, а. Однако здесь резко возрастает число изделий, имеющих большие отклонения значений параметров. Если обозначить через  $p_t$  число таких элементов, а через  $g_t(x)$  — плотность вероятностей их распределения, соответствующую времени выпуска  $t$ , то общая плотность вероятностей представится в виде суперпозиции  $f(x) = (1 - p_t) f(x, \theta) + p_t g_t(x)$ . На практике эти разладки могут встретиться в различных комбинациях. Например, возможно, что нарушения нормального хода технологического процесса приведут к одновременному появлению разладок типа II и типа III и т.п. Возможны и другие принципиально различные типы разладок. Выяснение типов разладок необходимо для построения математической теории, дающей рациональные решающие правила остановки технологического процесса на подналадку. На языке терминов проверки статистических гипотез такое выяснение эквивалентно описанию конкурирующих гипотез для исходной гипотезы, соответствующей нормальному ходу производства.

Проведенный выше анализ типов разладок позволяет заключить, что в общем случае необходим текущий контроль как по количественным, так и по качественным признакам. Учитывая численные значения измеряемых параметров, можно более оперативно измерять отклонения в «здоровой» части продукции, тогда как для учета числа изделий, имеющих большие отклонения, надо использовать непараметрические методы. Например, целесообразно учитывать только число изделий, имеющих большие отклонения от параметров изделий, входящих в группу «здоровой» продукции. Трудность использования параметрических методов для оценки числа изделий, имеющих большие отклонения, обусловлена тем, что вид плотности  $g_t(x)$  может очень сильно и самым непредвиденным образом меняться с течением времени  $t$ . Если это не так, то и здесь можно использовать более полную информацию о численных значениях параметров изделий, когда эти параметры имеют большие отклонения.

Характеристики планов текущего контроля. Связь с теорией управляемых процессов. После выяснения статистической структуры параметров, характеризующих качество при нормальном ходе производства и наличии разладок

на участке  $A$  технологического процесса, разрабатывается алгоритм обработки данных об измерениях. В результате обработки либо принимается решение об определенном виде подрегулировки процесса, либо подается сигнал об остановке работ на участке  $A$ . После этого выясняются и устраняются причины, вызвавшие ухудшение качества. Вычисления в соответствии с алгоритмом либо проводятся вручную, либо строится оптимизатор  $B$ , в который поступает информация о качестве продукции на выходе участка  $A$ . Оптимизатор либо воздействует на параметры технологического процесса, либо подает сигнал для аварийной остановки (рис. 7.6.5).

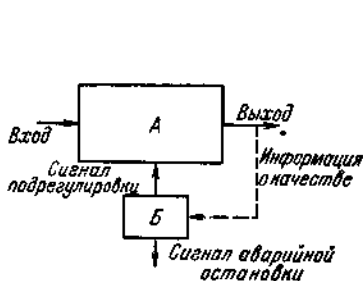


Рис. 7.6.5.

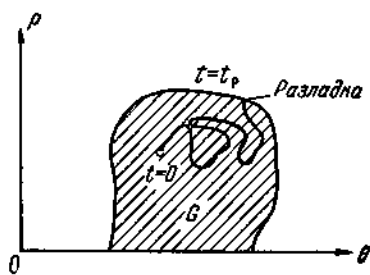


Рис. 7.6.6.

Если остановка технологического процесса стоит больших средств, то в алгоритм целесообразно включить переход с облегченного контроля на более жесткий для получения более достоверного решения об остановке. Переход на более жесткий контроль, например, может означать увеличение объема выборки  $n$ .

Если исходить из типов разладок, показанных на рис. 7.6.4, то в каждый момент времени  $t$  качество выпускаемых изделий характеризуется значениями параметров  $\theta_t$  и  $p_t$ . Эти параметры меняются со временем. Из экономических или иных соображений выбирается область  $G$  допустимых значений параметров  $\theta$ ,  $p$  (рис. 7.6.6). С этой точки зрения разладка наступает тогда, когда значения параметров  $\theta_t$ ,  $p_t$  выходят за границу области  $G$ . О значениях параметров  $\theta_t$ ,  $p_t$  мы можем судить лишь по результатам измерений параметров изделий. Таким образом, информация о значениях  $\theta_t$  и  $p_t$  является неполной. При таком подходе язвенно выступает связь задач текущего контроля с рождающейся сейчас теорией управления случайными процессами по неполным данным. Мы обращаем внимание на вышедшие недавно работы Чернова [22] и Шнирева [23].

О степени пригодности решающих правил, в соответствии с которыми принимается решение об остановке процесса на подналадку,

можно судить по значениям оперативных характеристик и функций оперативности. *Оперативной характеристикой* плана текущего контроля называют функцию  $P(t) = P(t, \theta, p)$ , равную вероятности принять до момента  $t$  решение об остановке процесса на подналадку, если  $\theta_s \equiv \theta$ ,  $p_s \equiv p$  для  $0 \leq s \leq t$ . Функцией оперативности назовем среднее время  $T = T(\theta, p)$ , необходимое для принятия решения об остановке процесса на подналадку, когда  $\theta_s \equiv \theta$ ,  $p_s = p$ ,  $0 \leq s \leq t$ . Функция  $P(t)$  зависит от трех переменных  $t, \theta, p$ , поэтому встает вопрос о наиболее целесообразном численном или графическом ее задании. Наибольший интерес

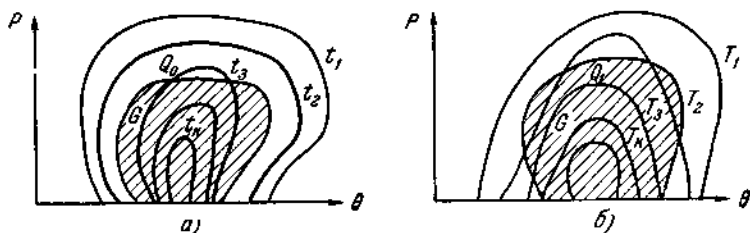


Рис. 7.6.7.

представляют значения  $t_q = t(\theta, p, q)$ , для которых  $P(t_q, \theta, p) = q$ . Задавшись значением  $q$  ( $=0,9$  или  $0,1$ ), можно на плоскости значений параметров  $\theta, p$  для определенного набора времен  $t_1 < t_2 < t_3 < \dots$  нанести линии  $t(p, \theta, q) = t_i$ . Для значений параметров  $\theta, p$ , лежащих на линии, соответствующей  $t_k$ , вероятность остановки процесса на подналадку за время  $t \leq t_k$  равна  $q$ . Аналогичным образом можно на плоскости значений  $(\theta, p)$  нанести линии  $T(\theta, p) = T_i$ ,  $T_1 < T_2 < \dots < T_k < \dots$ . Примерный вид полученных графиков показан на рис. 7.6.7, а, б. Если взять точку  $Q_0 = (\theta_0, p_0) \in G$ , то из рис. 7.6.7, а видно, что для обнаружения такой разладки с вероятностью  $0,9$  требуется время, большее  $t_1$ , но меньше  $t_2$ . Если же процесс имеет параметры  $Q_1 = (\theta_1, p_1) \in G$ , т.е. разладки нет, то из рис. 7.5.7, б находим, что среднее время до остановки процесса на подналадку  $T_2 < T(\theta_1, p_1) < T_3$ . В данном случае  $T(\theta_1, p_1)$  является средним временем до ложной тревоги. Если же значения параметров  $\theta, p$  лежат вне области  $G$ , то  $T(\theta, p)$  — среднее время запаздывания в обнаружении разладки.

Пример на вычисление характеристик плана текущего контроля. В заключение параграфа рассмотрим частный пример на вычисление оперативной характеристики и функции оперативности. Предположим, что из каждых  $N$  изделий отбираются  $n$  изделий, для которых производится измерение параметра  $x$ , характеризующего качество. Пусть статистическое исследование

показало, что могут иметь место только разладки типов I и II ( $p_i \equiv 0$ ) и что плотность вероятностей  $f(x, \theta) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ , где  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ . Область  $G$  допустимых значений параметра  $\theta$  описывается неравенствами  $\mu_n < \mu < \mu_B$ ,  $0 < \sigma^2 < \sigma_B^2$ . Пусть в результате проверки  $k$ -й выборки получены значения параметров  $x_{k1}, \dots, x_{kn}$ . Несмещенными оценками для  $\mu$  и  $\sigma^2$  являются  $\bar{x}_k$  и  $s_k^2$ :

$$\bar{x}_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ki}, \quad s_k^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_{ki} - \bar{x}_k)^2. \quad (7.6.1)$$

Решение об остановке процесса на подналадку производится следующим образом. Задаем контрольные пределы  $y_n, y_B$  для  $\bar{x}$  и  $z_B^2$

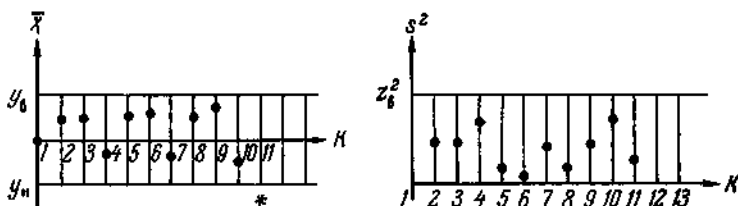


Рис. 7.6.8.

для  $s^2$ . Процесс останавливается на подналадку, когда нарушается хотя бы одно из неравенств

$$y_n < \bar{x}_k < y_B, \quad 0 < s^2 < z_B^2. \quad (7.6.2)$$

Для наглядности результаты измерений наносятся на контрольные карты среднего и эмпирической дисперсии. Вид контрольных карт показан на рис. 7.6.8. При таком узком подходе задача состоит в обоснованном выборе значений контрольных пределов  $y_n, y_B, z_B^2$  и объема выборки  $n$ . Для этого необходимо знать оперативную характеристику и функцию оперативности.

Так как  $\bar{x}_k$  имеет нормальное распределение со средним  $\mu$  и дисперсией  $\frac{\sigma^2}{n}$ , когда  $\theta = (\mu, \sigma^2)$ , то

$$p_1(\mu, \sigma^2) = P \{ y_n < \bar{x} < y_B \} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{A_n}^{A_B} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad (7.6.3)$$

где  $A_n = \frac{y_n - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ ,  $A_B = \frac{y_B - \mu}{\sigma} \sqrt{n}$ . Из леммы Фишера получаем,



что  $\frac{s^2 \sqrt{n-1}}{\sigma^2}$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $(n-1)$ -й степенью свободы. Поэтому

$$p_2(\mu, \sigma^2) = \mathbf{P} \{0 < s^2 < z_{\alpha}^2\} = \left( \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{\frac{n-1}{2}} \right)^{-1} \int_0^{\frac{z_{\alpha}^2}{\sigma^2}} t^{\frac{n-3}{2}} e^{-\frac{t}{2}} dt. \quad (7.6.4)$$

Учитывая взаимную независимость статистик  $\bar{x}$  и  $s^2$ , находим, что вероятность  $p(\mu, \sigma^2)$  одновременного выполнения неравенств (7.5.2)

$$p(\mu, \sigma) = p_1(\mu, \sigma^2) p_2(\mu, \sigma^2), \quad (7.6.5)$$

где  $p_1, p_2$  определяются по формулам (7.6.3), (7.6.4). Результаты измерений оценок  $\bar{x}_k, s_k^2$  взаимно независимы от выборки  $k$  выборке, так что номер  $v$  выборки, по результатам измерений которой принимается решение об остановке на подналадку, есть случайная величина, имеющая геометрическое распределение:

$$\mathbf{P} \{v = k\} = [1 - p(\mu, \sigma^2)] p(\mu, \sigma^2)^{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (7.6.6)$$

Здесь, конечно, предполагается, что во всех выборках  $\mu$  и  $\sigma^2$  одинаковы. Если измерения производятся через одинаковое время  $S$ , то функция оперативности

$$T(\mu, \sigma) = SMv = S [1 - p(\mu, \sigma^2)]^{-1}. \quad (7.6.7)$$

Соответственно для оперативной характеристики

$$p(t, \mu, \sigma) = \mathbf{P} \{vS < t\} = 1 - p^k(\mu, \sigma^2), \quad (7.6.8)$$

где  $k = \left[ \frac{t}{S} \right]$ ,  $[a]$  — целая часть числа  $a$ . Значения контрольных пределов  $y_u, y_v$  и величины объема выборки выбираются из условий

$$\min_{\mu, \sigma^2 \in G_1} T(\mu, \sigma) \geq T_1, \quad \max_{\mu, \sigma^2 \in G_2} T(\mu, \sigma^2) \leq T_2, \quad (7.6.9)$$

где  $G_1 \subseteq G$ , т. е. часть допустимой области, а  $G_2 \supset G$ . Можно выписать аналогичные требования, наложенные на оперативные характеристики и задающие для точек  $(\mu, \sigma^2) \in G$  вероятности ложных тревог, а для точек  $(\mu, \sigma^2) \notin G$  — вероятности пропуска разладок за выбранное время  $t$ . Значения  $T_i, t$  и  $G_1, G_2$  можно выбирать с учетом экономических соображений.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица 1

Значения функции  $y = e^{-x}$ 

$x$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	1,0000	0,9900	0,9802	0,9704	0,9608	0,9512	0,9418	0,9324	0,9231	0,9139
0,1	0,9048	8958	8869	8781	8694	8607	8521	8437	8353	8270
0,2	8187	8106	8025	7945	7866	7788	7710	7634	7558	7483
0,3	7408	7334	7261	7189	7118	7047	6977	6907	6839	6771
0,4	6703	6636	6570	6505	6440	6376	6313	6250	6188	6126
0,5	6065	6005	5945	5886	5827	5769	5712	5655	5599	5543
0,6	5488	5433	5379	5326	5273	5220	5168	5117	5066	5016
0,7	4966	4916	4867	4819	4771	4724	4677	4630	4584	4538
0,8	4493	4449	4404	4360	4317	4274	4232	4189	4148	4107
0,9	4066	4025	3985	3945	3906	3867	3829	3791	3753	3716
1,0	0,3679	0,3642	0,3606	0,3570	0,3534	0,3499	0,3465	0,3430	0,3396	0,3362
1,1	3329	3296	3263	3230	3198	3166	3135	3104	3073	3042
1,2	3012	2982	2952	2923	2894	2865	2836	2808	2780	2753
1,3	2725	2698	2671	2645	2618	2592	2567	2541	2516	2491
1,4	2466	2441	2417	2393	2369	2346	2322	2299	2276	2254
1,5	2231	2209	2187	2165	2144	2123	2101	2080	2060	2039
1,6	1919	1909	1979	1959	1940	1920	1901	1882	1864	1845
1,7	1827	1809	1791	1773	1755	1738	1720	1703	1686	1670
1,8	1633	1636	1620	1604	1588	1572	1557	1541	1526	1511
1,9	1496	1481	1466	1451	1437	1423	1409	1395	1381	1367
2,0	0,1353	0,1340	0,1327	0,1313	0,1300	0,1287	0,1275	0,1262	0,1249	0,1237
2,1	1225	1212	1200	1188	1177	1165	1153	1142	1130	1119
2,2	1108	1097	1086	1075	1065	1054	1043	1033	1023	1013

Продолжение табл. 1

z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,4	0,1003	0,0993	0,0983	0,0973	0,0963	0,0954	0,0944	0,0935	0,0926	0,0916
2,4	0,0907	0,0898	0,0889	0,0880	0,0872	0,0863	0,0854	0,0846	0,0837	0,0829
2,5	0,0821	0,0813	0,0805	0,0797	0,0789	0,0781	0,0773	0,0765	0,0758	0,0750
2,6	0,0743	0,0735	0,0728	0,0721	0,0714	0,0707	0,0700	0,0693	0,0686	0,0679
2,7	0,0672	0,0665	0,0659	0,0652	0,0646	0,0639	0,0633	0,0627	0,0620	0,0614
2,8	0,0608	0,0602	0,0596	0,0590	0,0584	0,0578	0,0573	0,0567	0,0561	0,0556
2,9	0,0550	0,0545	0,0539	0,0534	0,0529	0,0523	0,0518	0,0513	0,0508	0,0503
3,0	0,0498	0,0493	0,0488	0,0483	0,0478	0,0474	0,0469	0,0464	0,0460	0,0455
3,1	0,0450	0,0446	0,0442	0,0437	0,0433	0,0429	0,0424	0,0420	0,0416	0,0412
3,2	0,0408	0,0404	0,0400	0,0396	0,0392	0,0388	0,0384	0,0380	0,0376	0,0373
3,3	0,0369	0,0365	0,0362	0,0358	0,0354	0,0351	0,0347	0,0344	0,0340	0,0337
3,4	0,0334	0,0330	0,0327	0,0324	0,0321	0,0317	0,0314	0,0311	0,0308	0,0305
3,5	0,0302	0,0299	0,0296	0,0293	0,0290	0,0287	0,0284	0,0282	0,0279	0,0276
3,6	0,0273	0,0271	0,0268	0,0265	0,0263	0,0260	0,0257	0,0255	0,0252	0,0250
3,7	0,0247	0,0245	0,0242	0,0240	0,0238	0,0235	0,0233	0,0231	0,0228	0,0226
3,8	0,0224	0,0221	0,0219	0,0217	0,0215	0,0213	0,0211	0,0209	0,0207	0,0204
3,9	0,0202	0,0200	0,0198	0,0196	0,0194	0,0193	0,0191	0,0189	0,0187	0,0185
4,0	0,0183	0,0181	0,0180	0,0178	0,0176	0,0174	0,0172	0,0171	0,0169	0,0167
4,1	0,0166	0,0164	0,0162	0,0161	0,0159	0,0158	0,0156	0,0155	0,0153	0,0151
4,2	0,0150	0,0148	0,0147	0,0146	0,0144	0,0143	0,0141	0,0140	0,0138	0,0137
4,3	0,0136	0,0134	0,0133	0,0132	0,0130	0,0129	0,0128	0,0127	0,0125	0,0124
4,4	0,0123	0,0122	0,0120	0,0119	0,0118	0,0117	0,0116	0,0114	0,0113	0,0112
4,5	0,0111	0,0110	0,0109	0,0108	0,0107	0,0106	0,0105	0,0104	0,0103	0,0102
4,6	0,0101	0,0100	0,0099	0,0098	0,0097	0,0096	0,0095	0,0094	0,0093	0,0092

Продолжение табл. I

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4,7	0,0091	0,0090	0,0089	0,0088	0,0087	0,0086	0,0085	0,0085	0,0084	0,0083
4,8	0082	0081	0081	0080	0079	0078	0078	0077	0076	0075
4,9	0074	0074	0073	0072	0072	0071	0070	0069	0069	0068
5,0	0,0067	0,0067	0,0066	0,0065	0,0065	0,0064	0,0063	0,0063	0,0062	0,0062
5,1	0061	0060	0060	0059	0059	0058	0057	0057	0056	0056
5,2	0055	0055	0054	0054	0053	0052	0052	0051	0051	0050
5,3	0050	0049	0049	0048	0048	0047	0047	0046	0046	0046
5,4	0045	0045	0044	0044	0043	0043	0043	0042	0042	0041
5,5	0041	0041	0040	0040	0039	0039	0038	0038	0038	0037
5,6	0037	0037	0036	0036	0036	0035	0034	0034	0034	0034
5,7	0033	0033	0033	0032	0032	0032	0031	0031	0031	0031
5,8	0030	0030	0030	0029	0029	0029	0029	0028	0028	0028
5,9	0027	0027	0027	0027	0026	0026	0026	0026	0025	0025
6,0	0,0025	0,0025	0,0024	0,0024	0,0024	0,0024	0,0023	0,0023	0,0023	0,0023
6,2	0020	0020	0020	0020	0019	0019	0019	0019	0019	0019
6,4	0017	0016	0016	0016	0016	0016	0016	0015	0015	0015
6,6	0014	0013	0013	0013	0013	0013	0013	0013	0013	0012
6,8	0011	0011	0011	0011	0011	0010	0010	0010	0010	0010

Таблица 2

Значения функции  $y = x^a$ 

$x \backslash a$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1,1
0,00010	0,3981	0,1585	0,0631	0,0251	0,0100	0,0398	0,0831	0,04398
0,00016	0,4173	0,1741	0,0726	0,0303	0,0126	0,04528	0,0919	0,04668
0,00025	0,4365	0,1903	0,0831	0,0362	0,0158	0,0560	0,10131	0,04109
0,00040	0,4575	0,2091	0,0956	0,0437	0,0200	0,06915	0,01191	0,04183
0,00063	0,4785	0,2290	0,1096	0,0524	0,0251	0,0830	0,0275	0,04302
0,00100	0,5011	0,2513	0,1259	0,0631	0,0316	0,10158	0,0398	0,04501
0,00160	0,5252	0,2761	0,1450	0,0761	0,0400	0,1210	0,0580	0,04841
0,00250	0,5494	0,3018	0,1658	0,0936	0,0500	0,1475	0,0829	0,05137
0,00400	0,5758	0,3315	0,1909	0,1099	0,0632	0,1764	0,121	0,05230
0,00630	0,6023	0,3631	0,2187	0,1319	0,0794	0,2108	0,173	0,05379
0,01000	0,6306	0,3981	0,2511	0,1585	0,0999	0,2511	0,0251	0,05631
0,01600	0,6610	0,4374	0,2891	0,1913	0,1264	0,2937	0,0366	0,0106
0,02500	0,6914	0,4781	0,3305	0,2285	0,1580	0,3404	0,0523	0,0173
0,04000	0,7247	0,5252	0,3810	0,2761	0,2001	0,4000	0,0762	0,0290
0,06300	0,7588	0,5752	0,4360	0,3309	0,2511	0,4600	0,1096	0,0478
0,10000	0,7945	0,5945	0,5011	0,3981	0,3163	0,5214	0,1585	0,0795
0,16000	0,8328	0,6935	0,6126	0,4805	0,4001	0,6000	0,2309	0,1333
0,25000	0,8702	0,7580	0,6597	0,5746	0,5001	0,7000	0,3299	0,2176
0,40000	0,9121	0,8328	0,7596	0,6935	0,6325	0,8500	0,4805	0,3649
0,63000	0,9550	0,9121	0,8702	0,8311	0,7937	1,0000	0,6907	0,6017
1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,60000	1,0481	1,0986	1,1514	1,2068	1,2649	1,3258	1,4564	1,6770
2,50000	1,0964	1,2008	1,3165	1,4434	1,5825	1,7332	2,0834	2,7429
4,00000	1,1491	1,3192	1,5159	1,7402	1,9997	2,2979	3,0313	4,5951

Продолжение табл. 2

$\alpha$ $x$	1.4	1.7	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0	5.0
0,00010	0,0 <sup>251</sup>	0,0 <sup>158</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>8100</sup>	0,0 <sup>1100</sup>	0,0 <sup>13100</sup>	0,0 <sup>15100</sup>	0,0 <sup>18100</sup>
0,00016	0,0 <sup>485</sup>	0,0 <sup>352</sup>	0,0 <sup>225</sup>	0,0 <sup>324</sup>	0,0 <sup>1410</sup>	0,0 <sup>18519</sup>	0,0 <sup>19556</sup>	0,0 <sup>19105</sup>
0,00025	0,0 <sup>898</sup>	0,0 <sup>746</sup>	0,0 <sup>620</sup>	0,0 <sup>988</sup>	0,0 <sup>156</sup>	0,0 <sup>1247</sup>	0,0 <sup>1391</sup>	0,0 <sup>18977</sup>
0,00040	0,0 <sup>173</sup>	0,0 <sup>166</sup>	0,0 <sup>159</sup>	0,0 <sup>317</sup>	0,0 <sup>640</sup>	0,0 <sup>1128</sup>	0,0 <sup>1256</sup>	0,0 <sup>18102</sup>
0,00063	0,0 <sup>331</sup>	0,0 <sup>363</sup>	0,0 <sup>398</sup>	0,0 <sup>898</sup>	0,0 <sup>250</sup>	0,0 <sup>1629</sup>	0,0 <sup>1158</sup>	0,0 <sup>18996</sup>
0,00100	0,0 <sup>631</sup>	0,0 <sup>795</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>317</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>1317</sup>	0,0 <sup>1100</sup>	0,0 <sup>14100</sup>
0,00160	0,0 <sup>122</sup>	0,0 <sup>177</sup>	0,0 <sup>256</sup>	0,0 <sup>102</sup>	0,0 <sup>410</sup>	0,0 <sup>163</sup>	0,0 <sup>1657</sup>	0,0 <sup>19105</sup>
0,00250	0,0 <sup>228</sup>	0,0 <sup>375</sup>	0,0 <sup>525</sup>	0,0 <sup>813</sup>	0,0 <sup>156</sup>	0,0 <sup>782</sup>	0,0 <sup>1391</sup>	0,0 <sup>18979</sup>
0,00400	0,0 <sup>440</sup>	0,0 <sup>639</sup>	0,0 <sup>160</sup>	0,0 <sup>101</sup>	0,0 <sup>641</sup>	0,0 <sup>405</sup>	0,0 <sup>256</sup>	0,0 <sup>1103</sup>
0,00630	0,0 <sup>830</sup>	0,0 <sup>181</sup>	0,0 <sup>397</sup>	0,0 <sup>315</sup>	0,0 <sup>250</sup>	0,0 <sup>198</sup>	0,0 <sup>158</sup>	0,0 <sup>11993</sup>
0,01000	0,0 <sup>158</sup>	0,0 <sup>398</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>100</sup>
0,01600	0,0 <sup>306</sup>	0,0 <sup>885</sup>	0,0 <sup>256</sup>	0,0 <sup>324</sup>	0,0 <sup>410</sup>	0,0 <sup>518</sup>	0,0 <sup>656</sup>	0,0 <sup>8105</sup>
0,02500	0,0 <sup>571</sup>	0,0 <sup>189</sup>	0,0 <sup>625</sup>	0,0 <sup>987</sup>	0,0 <sup>156</sup>	0,0 <sup>247</sup>	0,0 <sup>390</sup>	0,0 <sup>8976</sup>
0,04000	0,0 <sup>1110</sup>	0,0 <sup>421</sup>	0,0 <sup>160</sup>	0,0 <sup>321</sup>	0,0 <sup>642</sup>	0,0 <sup>128</sup>	0,0 <sup>257</sup>	0,0 <sup>6103</sup>
0,06300	0,0 <sup>208</sup>	0,0 <sup>910</sup>	0,0 <sup>397</sup>	0,0 <sup>998</sup>	0,0 <sup>250</sup>	0,0 <sup>629</sup>	0,0 <sup>158</sup>	0,0 <sup>8996</sup>
0,10000	0,0 <sup>398</sup>	0,0 <sup>200</sup>	0,0 <sup>549</sup>	0,0 <sup>317</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>317</sup>	0,0 <sup>100</sup>	0,0 <sup>100</sup>
0,16000	0,0 <sup>769</sup>	0,0 <sup>444</sup>	0,0 <sup>256</sup>	0,0 <sup>102</sup>	0,0 <sup>748</sup>	0,0 <sup>164</sup>	0,0 <sup>659</sup>	0,0 <sup>8105</sup>
0,25000	0,1437	0,0948	0,0625	0,0313	0,0156	0,02782	0,02391	0,08978
0,40000	0,2775	0,2108	0,1601	0,1013	0,0640	0,0405	0,0256	0,0102
0,63000	0,5236	0,4561	0,3969	0,3151	0,2501	0,1985	0,1575	0,0993
1,00000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
1,9309	2,2233	2,2233	2,5600	3,2381	4,0960	5,1810	6,5535	1,0486.10
2,50000	3,6111	4,7541	6,2589	9,9046	1,5658.10	2,4749.10	3,9173.10	9,8063.10
4,00000	6,9587	1,0549.10	1,5991.10	3,1976.10	6,3943.10	1,2774.10 <sup>2</sup>	2,5570.10 <sup>2</sup>	1,0225.10 <sup>3</sup>

Таблица 3

## Квантили нормального распределения

$p$	$u_p$	$p$	$u_p$	$p$	$u_p$
0,50	0,000	0,68	0,468	0,86	1,080
0,51	0,025	0,69	0,496	0,87	1,126
0,52	0,051	0,70	0,524	0,88	1,175
0,53	0,075	0,71	0,553	0,89	1,227
0,54	0,100	0,72	0,583	0,90	1,281
0,55	0,125	0,73	0,613	0,91	1,341
0,56	0,150	0,74	0,643	0,92	1,405
0,57	0,176	0,75	0,674	0,93	1,476
0,58	0,202	0,76	0,706	0,94	1,555
0,59	0,228	0,77	0,739	0,95	1,645
0,60	0,254	0,78	0,772	0,96	1,751
0,61	0,279	0,79	0,806	0,97	1,881
0,62	0,306	0,80	0,842	0,98	2,054
0,63	0,332	0,81	0,878	0,99	2,326
0,64	0,358	0,82	0,915	0,999	3,090
0,65	0,385	0,83	0,954	0,9999	3,720
0,66	0,412	0,84	0,995	0,99999	4,265
0,67	0,440	0,85	1,036		

$$p = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_p} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$



Таблица 4

Квантили распределения  $\chi^2$  \*)

Число степеней свободы, $l$	$\chi^2_{0,1}$	$\chi^2_{0,5}$	$\chi^2_{0,5}$	$\chi^2_{0,7}$	$\chi^2_{0,9}$	$\chi^2_{0,95}$	$\chi^2_{0,99}$	$\chi^2_{0,999}$
1	0,016	0,148	0,455	1,07	2,71	3,84	6,63	10,8
2	0,211	0,713	1,39	2,41	4,61	5,99	9,21	13,8
3	0,594	1,42	2,37	3,67	6,25	7,81	11,3	16,3
4	1,06	2,19	3,36	4,88	7,78	9,49	13,3	18,5
5	1,61	3,00	4,35	6,06	9,24	11,1	15,1	20,5
6	2,20	3,83	5,35	7,23	10,6	12,6	16,8	22,5
7	2,83	4,67	6,35	8,38	12,0	14,1	18,5	24,3
8	3,49	5,53	7,34	9,52	13,4	15,5	20,1	26,1
9	4,17	6,39	8,34	10,7	14,7	16,9	21,7	27,9
10	4,87	7,27	9,34	11,8	16,0	18,3	23,2	29,6
11	5,58	8,15	10,3	12,9	17,3	19,7	24,7	31,3
12	6,30	9,03	11,3	14,0	18,5	21,0	26,2	32,9
13	7,04	9,93	12,3	15,1	19,8	22,4	27,7	34,5
14	7,79	10,08	13,3	16,2	21,1	23,7	29,1	36,1
15	8,55	11,7	14,3	17,3	22,3	25,0	30,6	37,7
16	9,31	12,6	15,3	18,4	23,5	26,3	32,0	39,3
17	10,10	13,5	16,3	19,5	24,8	27,6	33,4	40,8
18	10,9	14,4	17,3	20,6	26,0	28,9	34,8	42,3
19	11,7	15,4	18,3	21,7	27,2	30,1	36,2	43,8
20	12,4	16,3	19,3	22,8	28,4	31,4	37,6	45,3
21	13,2	17,2	20,3	23,9	29,6	32,7	38,9	46,8
22	14,0	18,1	21,3	24,9	30,8	33,9	40,3	48,3
23	14,8	19,0	22,3	26,0	32,0	35,2	41,6	49,7
24	15,7	19,9	23,3	27,1	33,2	36,4	43,0	51,2
25	16,5	20,9	24,3	28,2	34,4	37,7	44,3	52,6
26	17,3	21,8	25,3	29,2	35,6	38,9	45,6	54,1
27	18,1	22,7	26,3	30,3	36,7	40,1	47,0	55,5
28	18,9	23,6	27,3	31,4	37,9	41,3	48,3	56,9
29	19,8	24,6	28,3	32,5	39,1	42,6	49,6	58,3
30	20,6	25,5	29,3	33,5	40,3	43,8	50,9	59,7

$$\frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\chi^2} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{1}{2}x} dx = p$$

\* Я. Янко, Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, Москва, 1961.

Т а б л и ц а 5

## Сокращенная таблица биномиального распределения

В таблице даны значения  $\sum_{k=d}^n C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ . Например, если испытываются 15 элементов по плану [N, B, T], вероятность отказа элемента  $p=0.06$ , то вероятность того, что будет зарегистрировано три или более отказов, равна 0.05713, а вероятность того, что число отказов равно трем, есть  $0.05713 - 0.01036 = 0.04677$

n	p		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
	d											
5	1		0,04901	0,09608	0,14127	0,18463	0,22622	0,26610	0,30431	0,34092	0,37597	0,40951
	2		0,0098	0,0384	0,0847	0,1476	0,2259	0,3187	0,4249	0,5436	0,6738	0,8146
	3		0,0001	0,0008	0,0026	0,0060	0,0116	0,0197	0,0308	0,0453	0,0634	0,0856
	4		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0006	0,0011	0,0019	0,0030	0,0046
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001
6	1		0,05852	0,11416	0,16703	0,21724	0,26491	0,31013	0,35301	0,39364	0,43213	0,46856
	2		0,0146	0,0569	0,1246	0,2155	0,3277	0,4592	0,6082	0,7729	0,9515	1,1427
	3		0,0002	0,0015	0,0050	0,0117	0,0223	0,0376	0,0584	0,0851	0,1183	0,1585
	4		0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0009	0,0018	0,0032	0,0054	0,0085	0,0127
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003
7	1		0,06793	0,13187	0,19202	0,24855	0,30166	0,35152	0,39830	0,44215	0,48324	0,52170
	2		0,0203	0,0786	0,1709	0,2938	0,4438	0,6178	0,8127	1,0259	1,2548	1,4969
	3		0,0003	0,0026	0,0086	0,0198	0,0376	0,0629	0,0969	0,1401	0,1933	0,2569
	4		0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0019	0,0039	0,0071	0,0118	0,0184	0,0273
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0001	0,0001	0,0003	0,0006	0,0011
8	1		0,07726	0,14924	0,21626	0,27861	0,33658	0,39043	0,44042	0,48678	0,52975	0,56953
	2		0,0269	0,1034	0,2234	0,3815	0,5724	0,7916	1,0347	1,2976	1,5768	1,8690
	3		0,0005	0,0042	0,0135	0,0308	0,0579	0,0962	0,1470	0,2110	0,2889	0,3809
	4		0,0001	0,0001	0,0005	0,0016	0,0037	0,0075	0,0134	0,0220	0,0341	0,0502
	5		0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0004	0,0004	0,0008	0,0015	0,0026

Продолжение табл. 5

n	d	p									
		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
9	1	0,08648	0,16625	0,23977	0,30747	0,36975	0,42701	0,47959	0,52784	0,57207	0,61258
	2	0,0344	0,1311	0,2816	0,4777	0,7121	0,9784	1,2705	1,5832	1,9117	2,2516
	3	0,0008	0,0061	0,0198	0,0448	0,0836	0,1380	0,2091	0,2979	0,4048	0,5297
	4	0,0000	0,0002	0,0009	0,0027	0,0064	0,0128	0,0227	0,0372	0,0570	0,0833
	5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0003	0,0008	0,0017	0,0031	0,0055	0,0089
10	1	0,09562	0,18293	0,26258	0,33517	0,40126	0,46138	0,51602	0,56561	0,61058	0,65132
	2	0,0427	0,1618	0,3451	0,5815	0,8614	1,1759	1,5173	1,8788	2,2545	2,6390
	3	0,0011	0,0066	0,0276	0,0621	0,1150	0,1884	0,2834	0,4008	0,5404	0,7019
	4	0,0000	0,0003	0,0015	0,0044	0,0103	0,0203	0,0358	0,0580	0,0883	0,1280
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0006	0,0015	0,0031	0,0059	0,0101	0,0163
11	1	0,10466	0,19927	0,28470	0,36176	0,43120	0,49370	0,54990	0,60036	0,64563	0,68619
	2	0,0518	0,1951	0,4135	0,6923	1,0189	1,3822	1,7723	2,1810	2,6011	3,0264
	3	0,0016	0,0117	0,0372	0,0829	0,1524	0,2476	0,3698	0,5190	0,6947	0,8956
	4	0,0000	0,0005	0,0023	0,0067	0,0155	0,0304	0,0531	0,0934	0,1290	0,1853
	5	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0011	0,0026	0,0054	0,0100	0,0171	0,0275
12	1	0,11362	0,21528	0,30616	0,38729	0,45964	0,52408	0,58140	0,63233	0,67782	0,71757
	2	0,0617	0,2311	0,4865	0,8094	1,1836	1,5954	2,0332	2,4868	2,9481	3,4100
	3	0,0021	0,0154	0,0485	0,1073	0,1957	0,3157	0,4680	0,6520	0,8662	1,1087
	4	0,0000	0,0007	0,0033	0,0098	0,0224	0,0434	0,0753	0,1201	0,1799	0,2564
	5	0,0000	0,0000	0,0002	0,0006	0,0018	0,0043	0,0088	0,0161	0,0272	0,0433
13	1	0,12248	0,23098	0,32687	0,41180	0,48666	0,55263	0,61071	0,66175	0,70655	0,74581
	2	0,0725	0,2695	0,5637	0,9319	1,3542	1,8142	2,2978	2,7937	3,2925	3,7866
	3	0,0027	0,0197	0,0616	0,1354	0,2451	0,3925	0,5775	0,7987	1,0536	1,3388
	4	0,0001	0,0010	0,0047	0,0137	0,0310	0,0598	0,1028	0,1627	0,2417	0,3416
	5	0,0000	0,0000	0,0003	0,0010	0,0029	0,0067	0,0134	0,0244	0,0410	0,0646
14	1	0,13125	0,24636	0,34716	0,43533	0,51233	0,57948	0,63796	0,68881	0,73296	0,77123
	2	0,0840	0,3103	0,6449	1,0593	1,5299	2,0369	2,5645	3,0996	3,6321	4,1537
	3	0,0034	0,0247	0,0767	0,1672	0,3005	0,4778	0,6980	0,9583	1,2551	1,5936
	4	0,0001	0,0014	0,0064	0,0185	0,0417	0,0797	0,1360	0,2136	0,3148	0,4413
	5	0,0000	0,0001	0,0004	0,0015	0,0043	0,0098	0,0197	0,0354	0,0590	0,0923

Продолжение табл. 5

n	d	p									
		0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	0,10
15	1	0,13994	0,26143	0,36675	0,45791	0,53671	0,60471	0,66330	0,71370	0,75699	0,79411
	2	0,0963	0,3534	0,7297	1,1911	1,7095	2,2624	2,8315	3,4027	3,9649	4,5096
	3	0,0042	0,0304	0,0937	0,2029	0,3620	0,5713	0,8286	1,1297	1,4690	1,8406
	4	0,0001	0,0018	0,0085	0,0245	0,0547	0,1036	0,1753	0,2731	0,3994	0,5556
	5	0,0000	0,0001	0,0006	0,0022	0,0061	0,0140	0,0278	0,0497	0,0820	0,1272
20	1	0,18209	0,33239	0,45621	0,55800	0,64151	0,70989	0,76576	0,81131	0,84836	0,87842
	2	0,1686	0,95990	1,1984	1,8966	2,6416	3,3955	4,1314	4,8314	5,4840	6,0820
	3	0,0100	0,0700	0,2101	0,4386	0,7548	1,1497	1,6100	2,1205	2,6657	3,2307
	4	0,0004	0,0060	0,0267	0,0741	0,1590	0,2897	0,4713	0,7062	0,9933	1,3295
	5	0,0000	0,0004	0,0026	0,0096	0,0257	0,0563	0,1071	0,1834	0,2904	0,4317
25	1	0,22218	0,39654	0,53363	0,63960	0,72261	0,78709	0,83704	0,87564	0,90537	0,92821
	2	0,2576	0,8865	1,7196	2,6419	3,5762	4,4734	5,3040	6,0628	6,7139	7,2879
	3	0,0195	0,1324	0,3796	0,7648	1,2711	1,8711	2,5344	3,2317	3,9370	4,6291
	4	0,0011	0,0145	0,0619	0,1652	0,3409	0,5976	0,9361	1,3509	1,8315	2,3641
	5	0,0000	0,0012	0,0078	0,0278	0,0716	0,1505	0,2745	0,4514	0,6861	0,9799
30	1	0,26030	0,45452	0,59899	0,70614	0,78536	0,84374	0,88663	0,91803	0,94095	0,95761
	2	0,3615	1,2055	2,2692	3,3882	4,4646	5,4453	6,3064	7,0421	7,6573	8,1630
	3	0,0332	0,2172	0,6007	1,1690	1,8782	2,6780	3,5125	4,3460	5,1447	5,8865
	4	0,0022	0,0289	0,1190	0,3059	0,6077	1,0262	1,5498	2,1579	2,8253	3,5256
	5	0,0001	0,0030	0,0185	0,0632	0,1564	0,3154	0,5526	0,8736	1,2769	1,7549
40	1	0,33103	0,55430	0,70429	0,80463	0,87149	0,91584	0,94513	0,96439	0,97700	0,98522
	2	0,6074	1,9046	3,3846	4,7902	6,0094	7,0096	7,7994	8,4055	8,8603	9,1953
	3	0,0750	0,4567	1,1783	2,4447	3,2326	4,3350	5,3748	6,3055	7,1058	7,7719
	4	0,0069	0,0324	0,1140	0,2784	0,5315	0,9079	1,4331	2,1321	2,8971	3,7098
	5	0,39499	0,63583	0,78193	0,87011	0,92306	0,95467	0,97344	0,98453	0,99104	0,99485
50	1	0,8944	2,8423	4,4472	5,9562	7,2057	8,1000	8,7351	9,1729	9,4676	9,6621
	2	0,1382	0,7843	1,8920	3,3329	4,5947	5,8375	6,8921	7,7403	8,4827	8,8827
	3	0,0160	0,1776	0,6276	1,3913	2,3959	3,5270	4,6726	5,7470	6,6966	7,4871
	4	0,0015	0,0321	0,1681	0,4897	1,0362	1,7940	2,7097	3,7105	4,7234	5,6880

## Формулы оценок и доверительных интервалов

План испытаний	Достаточная статистика	Оценка	Несмещенность
$[N, B, T]$	$d(T)$ — число отказов за время $T$	$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{NT}$	несмещенная
$[N, B, r]$	$t_r$ — момент $r$ -го отказа	$\hat{\lambda} = \frac{r-1}{Nt_r}$	несмещенная, если $r > 1$
$[N, B, (r, T)]$	$\begin{cases} t_r, & \text{если } t_r \leq T \\ d(T), & \text{если } t_r > T \end{cases}$	$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{NT}, & t_r > T \\ \frac{r-1}{Nt_r}, & t_r \leq T \end{cases}$	несмещенная, если $r > 1$
$[N, B, T]$	$d(T)$ и $S_B(T)$ — суммарная наработка в момент $T$	$\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{S_B(T)}$ , или $\hat{\lambda} = \frac{d(T)}{\left[ N - \frac{d(T)}{2} \right] T}$ , если $\frac{d(T)}{N}$ мало	смещенная

Таблица 6

для параметра  $\lambda$  экспоненциального закона

Дисперсия оценки	Доверительный интервал с коэффициентом доверия, не меньшим $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	Таблицы
$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{NT}$	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{NT},$ $\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{NT}, \quad d = d(T)$	$\Delta_\alpha(d)$ даны в таблице 7
$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda^2}{r-2}, \quad r > 2$	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{Nt_r},$ $\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{Nt_r}$	$\Delta_\alpha(d)$ даны в таблице 7
$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{NT} L_{r-2}(\lambda NT) + \frac{\lambda^2}{r-2} [1 - L_{r-2}(\lambda NT)]$	Если $t_r \leq T$ , для $\lambda$ и $\bar{\lambda}$ используются формулы плана $[N, B, r]$ ; если же $t_r > T$ , то используются формулы плана $[N, B, T]$	—
сложная формула в виде ряда	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta'(d)}{T}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{\Delta}'(d)}{T}$	$\Delta', \bar{\Delta}'$ даны в таблице 8 для $\alpha = 0,95$

План испытаний	Достаточная статистика	Оценка	Несмещенность
$[N, B, r]$	$S_B(t_r)$ — суммарная наработка в момент $t_r$	$\hat{\lambda} = \frac{r-1}{S_B(t_r)}$	несмещенная
$[N, B, (r, T)]$	$\begin{cases} d(T), S_B(T), & \text{если } t_r > T; \\ S_B(t_r), & \text{если } t_r \leq T \end{cases}$	$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(T)}{S_B(T)}, & t_r > T \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & t_r \leq T \end{cases}$	смещенная
$[N, B, (r, HS_0)]$	$\begin{cases} S_B(t_r), & \text{если } t_r < T; \\ d(t_0), & \text{если } S_0 = S_B(t_0) < S_B(t_r) \end{cases}$	$\hat{\lambda} = \begin{cases} \frac{d(t_0)}{S_0}, & S_0 < S_B(t_r) \\ \frac{r-1}{S_B(t_r)}, & S_0 \geq S_B(t_r) \end{cases}$	несмещенная

## Продолжение табл. 6

Дисперсия оценки	Доверительный интервал с коэффициентом доверия, не меньшим $\alpha = 1 - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$	Таблицы
$D[\lambda] = \frac{\lambda^2}{r-2}, \quad r > 2$	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)},$ $\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}$	$\Delta_\alpha(d)$ даны в таблице 7
сложная формула в виде ряда	Если $t_r > T$ , используется формула для $\lambda, \bar{\lambda}$ плана $\{N, B, T\}$ , если же $t_r \leq T$ , то $\lambda$ и $\bar{\lambda}$ находятся как решения уравнений (3.4.38), (3.4.39)	—
$D[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{S_0} L_{r-2}(\lambda S_0) +$ $+ \frac{\lambda^2}{r-2} [1 - L_{r-2}(\lambda S_0)]$	$\underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(d-1)}{S_0},$ $\bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(d)}{S_0},$ если $S_0 < S_B(t_r)$ ; $\left\{ \begin{array}{l} \underline{\lambda} = \frac{\Delta_{1-\varepsilon_2}(r-1)}{S_B(t_r)}, \\ \bar{\lambda} = \frac{\Delta_{\varepsilon_1}(r-1)}{S_B(t_r)}, \end{array} \right. \text{ если}$ $S_0 \geq S_B(t_r)$	$\Delta_\alpha(d)$ даны в таблице 7



Таблица 7

Квантили  $\Delta_c(d)$  пуассоновского распределения,  $L_d(\Delta_c(d)) = \alpha$ 

$d \backslash \alpha$	0,99993	0,9999	0,9993	0,999	0,993	0,99	0,95
0	0,000070	0,000100	0,000700	0,00100	0,00702	0,01005	0,05129
1	0,01188	0,01421	0,03789	0,04540	0,12326	0,14855	0,35536
2	0,07633	0,08618	0,16624	0,19053	0,38209	0,43604	0,81769
3	0,21115	0,23180	0,36894	0,42855	0,74108	0,82325	1,36632
4	0,41162	0,44446	0,68204	0,73937	1,17032	1,27911	1,97015
5	0,66825	0,71375	1,03236	1,10710	1,65152	1,78528	2,61301
6	0,97222	1,03040	1,42874	1,52034	2,17293	2,33021	3,28532
7	1,31628	1,38697	1,86297	1,97081	2,72659	2,90611	3,98082
8	1,69465	1,77758	2,32694	2,45242	3,30682	3,50746	4,69523
9	2,10271	2,19758	2,82197	2,96052	3,90942	4,13020	5,42541
10	2,53672	2,64323	3,33840	3,49148	4,53118	4,77125	6,16901
11	2,99367	3,11150	3,87531	4,04244	5,16960	5,42818	6,92421
12	3,47103	3,59988	4,43033	4,61106	5,82265	6,09907	7,68958
13	3,96672	4,10632	5,00152	5,19544	6,48871	6,78235	8,46394
14	4,47896	4,62904	5,58725	5,79398	7,16642	7,47673	9,24633
15	5,00626	5,16657	6,18615	6,40533	7,85464	8,18111	10,03596
16	5,54732	5,71762	6,79705	7,02835	8,55241	8,89457	10,83214
$d \backslash \alpha$	0,93	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40
0	0,07257	0,10536	0,22314	0,35667	0,51082	0,69315	0,91629
1	0,43081	0,53181	0,82439	1,09735	1,37642	1,67835	2,02231
2	0,94230	1,10206	1,53504	1,91378	2,28508	2,67406	3,10538
3	1,53414	1,74477	2,29679	2,76371	3,21132	3,67206	4,17526
4	2,17670	2,43259	3,08954	3,63361	4,14774	4,67091	5,23662

Продолжение табл. 7

$d$	$a$	0,93	0,90	0,80	0,70	0,60	0,50	0,40
5		2,85488	3,15190	3,90366	4,51714	5,03098	5,67016	6,29192
6		3,55984	3,89477	4,73366	5,41074	6,03924	6,66964	7,34265
7		4,28584	4,66612	5,57606	6,31217	6,99377	7,66925	8,38977
8		5,02995	5,43247	6,42848	7,21993	7,94661	8,66895	9,43395
9		5,78633	6,22130	7,28922	8,13293	8,90441	9,66871	10,47568
10		6,55583	7,02075	8,15702	9,05036	9,86440	10,66852	11,51533
11		7,33581	7,82934	9,03090	9,97161	10,82624	11,66836	12,55317
12		8,12496	8,64594	9,91010	10,89620	11,78972	12,66823	13,58944
13		8,92222	9,46962	10,79398	11,82373	12,75462	13,66811	14,62431
14		9,72672	10,29962	11,68206	12,75388	13,72081	14,66802	15,65793
15		10,53773	11,13530	12,57389	13,68639	14,68814	15,66793	16,69043
16		11,35465	11,97613	13,46913	14,52103	15,56651	16,56785	17,72191
$d$	$a$	0,30	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005
0		1,20397	1,60944	2,30253	2,99573	3,68888	4,60517	5,29832
1		2,43022	2,99431	3,89972	4,74386	5,57164	6,63835	7,43013
2		3,61557	4,27903	5,32232	6,29579	7,22469	8,40595	9,27379
3		4,76223	5,51504	6,68078	7,75366	8,76727	10,04512	10,97748
4		5,89036	6,72098	7,99359	9,15352	10,24159	11,60462	12,59409
5		7,00555	7,90599	9,27467	10,51303	11,66833	13,10848	14,14976
6		8,11105	9,07538	10,52207	11,84240	13,05947	14,57062	15,65968
7		9,20895	10,23254	11,77091	13,14811	14,42268	15,99996	17,13359
8		10,30068	11,37977	12,99471	14,43465	15,76319	17,40265	18,57822
9		11,38727	12,51875	14,20599	15,70522	17,08480	18,78312	19,99842
10		12,46951	13,65073	15,40664	16,96292	18,39036	20,14468	21,39783
11		13,54798	14,77666	16,59812	18,20751	19,68204	21,48991	22,77926
12		14,62316	15,89731	17,78158	20,44257	22,82084	22,82084	24,14494
13		15,69544	17,01328	18,95796	20,66857	22,23040	24,13912	25,49669
14		16,78512	18,12509	20,12801	21,88648	23,48962	25,44609	26,83598
15		17,83246	19,23316	21,29237	23,09713	24,74022	26,74289	28,16406
16		18,89769	20,33782	22,45158	24,30118	25,98300	28,03045	29,48196

Значения  $\Delta'_\alpha(d)$  и  $\bar{\Delta}'_\alpha(d)$ ,  $\alpha = 0,95$ 

$d \backslash N$	50	60	80	100	150	200
0	0,07378	0,06148	0,04611	0,03689	0,02459	0,01844
	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
1	0,11257	0,09365	0,07009	0,05600	0,03727	0,02793
	0,00051	0,00042	0,00032	0,00025	0,00017	0,00013
2	0,14750	0,12248	0,09146	0,07298	0,04849	0,03631
	0,00489	0,00407	0,00305	0,00243	0,00162	0,00121
3	0,18090	0,14994	0,11172	0,08902	0,05904	0,04417
	0,01263	0,01049	0,00783	0,00625	0,00415	0,00311
4	0,21362	0,17672	0,13136	0,10454	0,06921	0,05173
	0,02248	0,01863	0,01388	0,01106	0,00734	0,00549
5	0,24607	0,20317	0,15066	0,11972	0,07912	0,05909
	0,03384	0,02800	0,02082	0,01657	0,01097	0,00820
6	0,27853	0,22949	0,16975	0,13471	0,08886	0,06630
	0,04640	0,03832	0,02842	0,02259	0,01493	0,01115
7	0,31115	0,25582	0,18875	0,14957	0,09848	0,07341
	0,05995	0,04942	0,03657	0,02902	0,01915	0,01429
8	0,34408	0,28226	0,20772	0,16435	0,10801	0,08044
	0,07440	0,06120	0,04518	0,03580	0,02358	0,01758
9	0,37742	0,30889	0,22671	0,17910	0,11748	0,08741
	0,08966	0,07360	0,05419	0,04289	0,02819	0,02100
10	0,41126	0,33578	0,24576	0,19385	0,12691	0,09434
	0,10570	0,08657	0,06358	0,05025	0,03297	0,02453
11	0,44568	0,36297	0,26490	0,20863	0,13631	0,10123
	0,12247	0,10008	0,07331	0,05785	0,03788	0,02816
12	0,48077	0,39053	0,28417	0,22344	0,14569	0,10810
	0,13996	0,11411	0,08336	0,06568	0,04293	0,03189
13	0,51659	0,41848	0,30359	0,23831	0,15507	0,11495
	0,15818	0,12865	0,09372	0,07372	0,04809	0,03569
14	0,55322	0,44688	0,32318	0,25325	0,16445	0,12178
	0,17711	0,14368	0,10437	0,08198	0,05337	0,03957
15	0,59074	0,47577	0,34295	0,26828	0,17384	0,12861
	0,19677	0,15921	0,11531	0,09042	0,05875	0,04352
16	0,62922	0,50519	0,36294	0,28341	0,18325	0,13544
	0,21717	0,17524	0,12654	0,09906	0,06423	0,04753
17	0,66875	0,53518	0,38314	0,29864	0,19267	0,14226
	0,23833	0,19177	0,13804	0,10788	0,06980	0,05160
18	0,70942	0,56578	0,40360	0,31399	0,20213	0,14909
	0,26027	0,20881	0,14982	0,11688	0,07547	0,05574
19	0,75131	0,59704	0,42431	0,32947	0,21161	0,15592
	0,28303	0,22637	0,16188	0,12607	0,08123	0,05993

Таблица 9

Проверка гипотезы о равенстве вероятностей безотказной работы элементов двух типов с вероятностью ошибки  $\alpha=0,1$

$\frac{N_1}{N_1 + N_2} =$	0,1		1/6		0,2		0,25		0,3		1/3		0,4		0,5		
	$d_1 + d_2$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$	$d'$	$d''$
0	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
1	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
2	*	2	*	2	*	2	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
3	*	2	*	3	*	3	*	3	*	3	*	3	*	*	*	*	*
4	*	3	*	3	*	3	*	4	*	4	*	4	*	4	*	*	*
5	*	3	*	3	*	4	*	4	*	4	*	4	*	5	0	5	5
6	*	3	*	4	*	4	*	4	*	5	*	5	0	5	0	6	6
7	*	3	*	4	*	4	*	5	*	5	*	5	0	6	0	7	7
8	*	3	*	4	*	5	*	5	*	6	0	6	0	6	1	7	8
9	*	4	*	4	*	5	*	5	0	6	0	6	0	7	1	8	9
10	*	4	*	5	*	5	*	6	0	6	0	7	1	8	1	9	10
11	*	4	*	5	*	6	0	6	0	7	0	7	1	8	2	9	10
12	*	4	*	5	*	6	0	7	0	7	0	8	1	9	2	10	11
13	*	4	*	6	*	6	0	7	0	8	1	8	1	9	3	10	11
14	*	4	*	6	0	6	0	7	1	8	1	9	2	10	3	11	12
15	*	5	*	6	0	7	0	8	1	9	1	9	2	10	3	12	13
16	*	5	*	6	0	7	0	8	1	9	1	9	2	11	4	12	13
17	*	5	0	7	0	7	0	8	1	9	2	10	3	11	4	13	14
18	*	5	0	7	0	8	1	9	1	10	2	10	3	12	5	13	14
19	*	5	0	7	0	8	1	9	2	10	2	11	3	12	5	14	15
20	*	5	0	7	0	8	1	9	2	10	2	11	3	13	5	15	16
21	*	5	0	7	0	8	1	10	2	11	3	12	4	13	6	15	16
22	*	6	0	8	1	9	1	10	2	11	3	12	4	14	6	16	17
23	*	6	0	8	1	9	2	10	2	12	3	12	4	14	7	16	17
24	*	6	0	8	1	9	2	11	3	12	3	13	5	15	7	17	18
25	*	6	0	8	1	9	2	11	3	12	4	13	5	15	7	18	19
26	*	6	0	9	1	10	2	11	3	13	4	14	5	16	8	18	19
27	*	6	1	9	1	10	2	12	3	13	4	14	6	16	8	19	20
28	*	7	1	9	1	10	2	12	4	13	4	15	6	16	9	19	20
29	0	7	1	9	1	10	3	12	4	14	5	15	6	17	9	20	21
30	0	7	1	10	2	11	3	13	4	14	5	15	7	17	10	20	21

## 95%-ные доверительные пределы для параметра

$N-d$	$d$									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	—	0,975	0,842	0,708	0,602	0,522	0,459	0,410	0,369	0,336
	—	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	1,000	0,987	0,906	0,806	0,716	0,641	0,579	0,527	0,483	0,445
	0,025	0,013	0,008	0,006	0,005	0,004	0,004	0,003	0,003	0,003
2	1,000	0,992	0,932	0,853	0,777	0,710	0,651	0,600	0,556	0,518
	0,158	0,094	0,068	0,053	0,043	0,037	0,032	0,028	0,025	0,023
3	1,000	0,994	0,947	0,882	0,816	0,755	0,701	0,652	0,610	0,572
	0,292	0,194	0,147	0,118	0,099	0,085	0,075	0,067	0,060	0,055
4	1,000	0,995	0,957	0,901	0,843	0,788	0,738	0,692	0,651	0,614
	0,398	0,284	0,223	0,184	0,157	0,137	0,122	0,109	0,099	0,091
5	1,000	0,996	0,963	0,915	0,863	0,813	0,766	0,723	0,684	0,649
	0,478	0,359	0,290	0,245	0,212	0,187	0,167	0,151	0,139	0,128
6	1,000	0,996	0,968	0,925	0,878	0,833	0,789	0,749	0,711	0,677
	0,541	0,421	0,349	0,299	0,262	0,234	0,211	0,192	0,177	0,163
7	1,000	0,997	0,972	0,933	0,891	0,849	0,808	0,770	0,734	0,701
	0,590	0,473	0,400	0,348	0,308	0,277	0,251	0,230	0,213	0,198
8	1,000	0,997	0,975	0,940	0,901	0,861	0,823	0,787	0,753	0,722
	0,631	0,517	0,444	0,390	0,349	0,316	0,289	0,266	0,247	0,230
9	1,000	0,997	0,977	0,945	0,909	0,872	0,837	0,802	0,770	0,740
	0,664	0,555	0,482	0,428	0,386	0,351	0,323	0,299	0,278	0,260
10	1,000	0,998	0,979	0,950	0,916	0,882	0,848	0,816	0,785	0,756
	0,692	0,587	0,516	0,462	0,419	0,384	0,354	0,329	0,308	0,289
11	1,000	0,998	0,981	0,953	0,922	0,890	0,858	0,827	0,797	0,769
	0,715	0,615	0,572	0,492	0,449	0,413	0,383	0,357	0,335	0,315
12	1,000	0,998	0,982	0,957	0,927	0,897	0,867	0,837	0,809	0,782
	0,735	0,640	0,572	0,519	0,476	0,440	0,410	0,384	0,361	0,340
13	1,000	0,998	0,983	0,960	0,932	0,903	0,874	0,846	0,819	0,793
	0,753	0,661	0,595	0,544	0,501	0,465	0,435	0,408	0,384	0,364
14	1,000	0,998	0,984	0,962	0,936	0,909	0,881	0,854	0,828	0,803
	0,768	0,681	0,617	0,566	0,524	0,488	0,457	0,430	0,407	0,385
15	1,000	0,998	0,985	0,964	0,939	0,913	0,887	0,861	0,836	0,812
	0,782	0,698	0,636	0,586	0,544	0,509	0,478	0,451	0,427	0,406
16	1,000	0,999	0,986	0,966	0,943	0,918	0,893	0,868	0,844	0,820
	0,794	0,713	0,653	0,604	0,563	0,529	0,498	0,471	0,447	0,425
17	1,000	0,999	0,987	0,968	0,946	0,922	0,898	0,874	0,851	0,828
	0,805	0,727	0,669	0,621	0,581	0,547	0,516	0,488	0,465	0,443
18	1,000	0,999	0,988	0,970	0,948	0,925	0,902	0,879	0,857	0,835
	0,815	0,740	0,683	0,637	0,597	0,564	0,533	0,506	0,482	0,460
19	1,000	0,999	0,988	0,971	0,950	0,929	0,906	0,884	0,862	0,841
	0,824	0,751	0,696	0,651	0,612	0,579	0,549	0,522	0,498	0,476
20	1,000	0,999	0,989	0,972	0,953	0,932	0,910	0,889	0,868	0,847
	0,832	0,762	0,708	0,664	0,626	0,593	0,564	0,537	0,513	0,492

Пример. Если при испытаниях  $N=25$  элементов по плану  $[N, B, T]$  отказало  $r$  элементов  $P(T)$  лежит в интервале  $0,121 < P(T) < 0,494$ , так как здесь  $d=7$ ,  $N-d=18$ .

\*) Я. Я в о, Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, Москва, 1961.

Таблица 10

в биномиальном распределении для малых  $N^*$ )

	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0,308	0,285	0,265	0,247	0,232	0,218	0,206	0,195	0,185	0,176	0,168
0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1	0,413	0,385	0,360	0,339	0,319	0,302	0,287	0,273	0,260	0,249	0,238
0	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,002	0,001	0,001	0,001	0,001	0,001
2	0,484	0,545	0,428	0,405	0,383	0,364	0,347	0,331	0,317	0,304	0,292
0	0,021	0,019	0,018	0,017	0,016	0,015	0,014	0,013	0,012	0,012	0,011
3	0,538	0,508	0,481	0,456	0,434	0,414	0,396	0,379	0,363	0,349	0,336
0	0,050	0,047	0,043	0,040	0,038	0,036	0,034	0,032	0,030	0,029	0,028
4	0,581	0,551	0,524	0,499	0,476	0,456	0,437	0,419	0,403	0,388	0,374
0	0,084	0,078	0,073	0,068	0,064	0,061	0,057	0,054	0,052	0,050	0,047
5	0,616	0,587	0,560	0,535	0,512	0,491	0,471	0,453	0,436	0,421	0,407
0	0,118	0,110	0,103	0,097	0,091	0,087	0,082	0,078	0,075	0,071	0,068
6	0,645	0,617	0,590	0,565	0,543	0,522	0,502	0,484	0,467	0,451	0,436
0	0,152	0,142	0,133	0,126	0,119	0,113	0,107	0,102	0,098	0,094	0,090
7	0,671	0,643	0,616	0,592	0,570	0,549	0,529	0,512	0,494	0,478	0,463
0	0,184	0,173	0,163	0,154	0,146	0,139	0,132	0,126	0,121	0,116	0,111
8	0,692	0,665	0,639	0,616	0,593	0,573	0,553	0,535	0,518	0,502	0,487
0	0,215	0,203	0,191	0,181	0,172	0,164	0,156	0,149	0,143	0,138	0,132
9	0,711	0,685	0,660	0,636	0,615	0,594	0,575	0,557	0,540	0,524	0,508
0	0,244	0,231	0,218	0,207	0,197	0,188	0,180	0,172	0,165	0,159	0,153
10	0,728	0,702	0,678	0,655	0,634	0,614	0,595	0,577	0,560	0,544	0,528
0	0,272	0,257	0,244	0,232	0,221	0,211	0,202	0,194	0,186	0,179	0,173
11	0,743	0,718	0,694	0,672	0,651	0,631	0,612	0,594	0,578	0,561	0,546
0	0,298	0,282	0,268	0,256	0,244	0,234	0,224	0,215	0,207	0,199	0,192
12	0,756	0,732	0,709	0,687	0,666	0,647	0,628	0,611	0,594	0,578	0,563
0	0,322	0,306	0,291	0,278	0,266	0,255	0,245	0,235	0,227	0,218	0,211
13	0,768	0,744	0,722	0,701	0,680	0,661	0,643	0,626	0,609	0,591	0,579
0	0,345	0,328	0,313	0,299	0,287	0,275	0,264	0,255	0,245	0,237	0,229
14	0,779	0,756	0,734	0,713	0,694	0,675	0,657	0,640	0,624	0,608	0,593
0	0,366	0,349	0,334	0,320	0,306	0,295	0,283	0,273	0,264	0,255	0,247
15	0,789	0,766	0,745	0,725	0,705	0,687	0,669	0,653	0,637	0,621	0,607
0	0,386	0,369	0,353	0,339	0,325	0,313	0,302	0,291	0,281	0,272	0,263
16	0,798	0,776	0,755	0,736	0,717	0,698	0,681	0,665	0,649	0,634	0,619
0	0,405	0,388	0,372	0,357	0,343	0,331	0,319	0,308	0,298	0,288	0,280
17	0,806	0,785	0,765	0,745	0,727	0,709	0,692	0,676	0,660	0,645	0,631
0	0,423	0,406	0,389	0,374	0,360	0,347	0,335	0,324	0,314	0,304	0,295
18	0,814	0,793	0,773	0,755	0,736	0,719	0,702	0,686	0,671	0,656	0,642
0	0,440	0,422	0,406	0,391	0,376	0,363	0,351	0,340	0,329	0,319	0,310
19	0,821	0,801	0,782	0,763	0,745	0,728	0,712	0,696	0,681	0,666	0,652
0	0,456	0,439	0,422	0,408	0,392	0,379	0,366	0,355	0,344	0,334	0,324
20	0,827	0,808	0,789	0,771	0,753	0,737	0,720	0,705	0,690	0,676	0,662
0	0,472	0,454	0,437	0,421	0,407	0,393	0,381	0,369	0,358	0,348	0,338

7 элементов, то с вероятностью, не меньшей 0,95, можно утверждать, что вероятность

Таблица II

Критические значения  $F$ -распределения \*)а)  $F_{0,99}$ 

$f_1 \backslash f_2$	2	4	6	8	10	12	20	24	30	40	60	120	$\infty$
2	99,000	99,249	99,332	99,374	99,399	99,416	99,449	99,458	99,466	99,474	99,483	99,491	99,501
4	18,000	15,977	15,207	14,799	14,546	14,374	14,020	13,929	13,838	13,745	13,652	13,558	13,463
6	10,925	9,148	8,466	8,102	7,874	7,718	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
8	8,649	7,006	6,371	6,029	5,814	5,667	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
10	7,559	5,994	5,386	5,057	4,849	4,706	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,997	3,909
12	6,927	5,412	4,821	4,499	4,296	4,155	3,858	3,781	3,701	3,619	3,536	3,449	3,361
14	6,515	5,035	4,456	4,140	3,939	3,800	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
16	6,226	4,773	4,202	3,890	3,691	3,553	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
18	6,013	4,579	4,015	3,705	3,508	3,371	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,660	2,566
20	5,849	4,431	3,871	3,564	3,368	3,231	2,938	2,859	2,779	2,695	2,608	2,517	2,421
22	5,719	4,313	3,758	3,453	3,258	3,121	2,827	2,749	2,668	2,583	2,495	2,403	2,306
24	5,614	4,218	3,667	3,363	3,168	3,032	2,738	2,659	2,577	2,492	2,404	2,310	2,211
26	5,526	4,140	3,591	3,288	3,094	2,958	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,132
28	5,453	4,074	3,528	3,226	3,032	2,896	2,602	2,522	2,440	2,354	2,263	2,167	2,066
30	5,390	4,018	3,474	3,173	2,979	2,843	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	5,179	3,828	3,291	2,993	2,801	2,665	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	4,977	3,649	3,119	2,823	2,632	2,496	2,198	2,115	2,029	1,936	1,836	1,726	1,601
120	1,787	3,480	2,956	2,663	2,472	2,336	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
$\infty$	4,605	3,319	2,802	2,511	2,321	2,185	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

\*) Я. Я. н. о. Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, Москва, 1961.

Продолжение табл. 11

6)  $F_{0,995}$ 

$t_1$ / $t_2$	2	4	6	8	10	12	20	24	30	40	60	120	$\infty$
2	199,00	199,25	199,33	199,37	199,40	199,42	199,45	199,46	199,47	199,47	199,48	199,49	199,51
4	26,284	23,155	21,975	21,352	20,967	20,705	20,167	20,030	19,892	19,752	19,611	19,468	19,325
6	14,544	12,028	11,073	10,566	10,250	10,034	9,589	9,474	9,358	9,241	9,122	9,002	8,879
8	11,042	8,805	7,952	7,496	7,211	7,015	6,608	6,503	6,396	6,288	6,177	6,065	5,951
10	9,427	7,343	6,545	6,116	5,847	5,661	5,274	5,173	5,071	4,966	4,859	4,750	4,639
12	8,510	6,521	5,575	5,345	5,086	4,906	4,530	4,432	4,331	4,228	4,123	4,015	3,904
14	7,922	5,998	5,257	4,857	4,603	4,428	4,059	3,961	3,862	3,760	3,655	3,547	3,436
16	7,514	5,638	4,913	4,521	4,272	4,099	3,734	3,638	3,539	3,437	3,332	3,224	3,112
18	7,215	5,375	4,663	4,276	4,031	3,860	3,498	3,402	3,303	3,201	3,096	2,987	2,873
20	6,987	5,174	4,472	4,090	3,847	3,678	3,318	3,222	3,123	3,022	2,916	2,806	2,690
22	6,806	5,017	4,323	3,944	3,703	3,535	3,176	3,081	2,982	2,880	2,774	2,663	2,546
24	6,661	4,890	4,202	3,826	3,587	3,420	3,062	2,967	2,868	2,765	2,659	2,546	2,428
26	6,541	4,785	4,103	3,730	3,492	3,325	2,969	2,873	2,774	2,671	2,563	2,450	2,330
28	6,440	4,698	4,020	3,649	3,412	3,246	2,890	2,794	2,695	2,592	2,483	2,369	2,247
30	6,356	4,623	3,949	3,580	3,344	3,179	2,823	2,727	2,628	2,524	2,415	2,300	2,176
40	6,066	4,374	3,713	3,350	3,117	2,953	2,598	2,502	2,402	2,296	2,184	2,064	1,932
60	5,795	4,140	3,492	3,134	2,904	2,742	2,387	2,290	2,187	2,079	1,962	1,834	1,688
120	5,539	3,921	3,285	2,933	2,705	2,544	2,188	2,089	1,984	1,871	1,747	1,606	1,431
$\infty$	5,298	3,715	3,091	2,744	2,519	2,358	2,000	1,898	1,789	1,669	1,533	1,364	1,000



Таблица 12

## Критерий Хартли \*)

$n$	$h_{0,04}$	$h_{0,01}$	$n$	$h_{0,05}$	$h_{0,01}$
2	39	199	8	403	2063
3	88	448	9	475	2432
4	142	729	10	550	2813
5	202	1036	11	626	3204
6	266	1362	12	704	3605
7	333	1705			

\*) H. O. Hartley, The maximum  $F$ -ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance, *Biometrika* 37 (1950), 308—312.

Таблица 13

## Критерий Фишера \*)

$\alpha=0,95$		$\alpha=0,95$		$\alpha=0,95$	
$n$	$g_{\alpha}(n)$	$n$	$g_{\alpha}(n)$	$n$	$g_{\alpha}(n)$
5	0,68377	25	0,22805	40	0,15738
10	0,44495	30	0,19784	45	0,14310
15	0,33462	35	0,17513	50	0,13135
20	0,27040				

\*) R. A. Fisher, Tests of significance in harmonic analysis, *Proc Roy Soc* 125 (1929), 54—59.

Таблица 14

Значения функции  $y = 2 \arcsin \sqrt{x}$  \*)

$x$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,00	0,000	0,200	0,284	0,348	0,403	0,451	0,495	0,536	0,574	0,609
0,10	0,644	0,676	0,707	0,738	0,767	0,795	0,823	0,850	0,876	0,902
0,20	0,927	0,952	0,976	1,000	1,024	1,047	1,070	1,093	1,115	1,137
0,30	1,159	1,181	1,203	1,224	1,245	1,266	1,287	1,308	1,328	1,349
0,40	1,369	1,390	1,410	1,430	1,451	1,471	1,491	1,511	1,531	1,551
0,50	1,571	1,591	1,611	1,631	1,651	1,671	1,691	1,711	1,731	1,752
0,60	1,772	1,793	1,813	1,834	1,855	1,875	1,897	1,918	1,939	1,961
0,70	1,982	2,004	2,026	2,049	2,071	2,094	2,118	2,141	2,165	2,190
0,80	2,214	2,240	2,265	2,292	2,319	2,346	2,375	2,404	2,434	2,465
0,90	2,498	2,532	2,568	2,606	2,647	2,691	2,739	2,793	2,858	2,941

\*) Я. Янко. Математико-статистические таблицы. Госстатиздат, Москва, 1961

Таблица 15

Критерий Колмогорова. Значения функции Колмогорова  $K(y)$  \*

$y$	$K(y)$	$y$	$K(y)$	$y$	$K(y)$	$y$	$K(y)$	$y$	$K(y)$
0,28	0,61	0,1492	1,00	0,7300	1,40	0,9603	1,80	0,9693	2,20
0,29	0,62	0,1632	1,01	0,7406	1,41	0,9625	1,81	0,9715	2,21
0,30	0,63	0,1777	1,02	0,7508	1,42	0,9645	1,82	0,9735	2,22
0,31	0,64	0,1927	1,03	0,7608	1,43	0,9665	1,83	0,9753	2,23
0,32	0,65	0,2080	1,04	0,7704	1,44	0,9684	1,84	0,9770	2,24
0,33	0,66	0,2236	1,05	0,7798	1,45	0,9701	1,85	0,9787	2,25
0,34	0,67	0,2396	1,06	0,7889	1,46	0,9718	1,86	0,9802	2,26
0,35	0,68	0,2558	1,07	0,7976	1,47	0,9734	1,87	0,9814	2,27
0,36	0,69	0,2722	1,08	0,8061	1,48	0,9750	1,88	0,9830	2,28
0,37	0,70	0,2888	1,09	0,8143	1,49	0,9764	1,89	0,9842	2,29
0,38	0,71	0,3055	1,10	0,8223	1,50	0,9778	1,90	0,9854	2,30
0,39	0,72	0,3223	1,11	0,8299	1,51	0,9791	1,91	0,9864	2,31
0,40	0,73	0,3391	1,12	0,8373	1,52	0,9803	1,92	0,9874	2,32
0,41	0,74	0,3560	1,13	0,8445	1,53	0,9815	1,93	0,9884	2,33
	0,75	0,3728	1,14	0,8514	1,54	0,9826	1,94	0,9892	2,34
	0,76	0,3896	1,15	0,8580	1,55	0,9836	1,95	0,9904	2,35
	0,77	0,4064	1,16	0,8644	1,56	0,9846	1,96	0,99079	2,36
	0,78	0,4230	1,17	0,8706	1,57	0,9855	1,97	0,99149	2,37
	0,79	0,4395	1,18	0,8765	1,58	0,9864	1,98	0,99213	2,38
	0,80	0,4558	1,19	0,8822	1,59	0,9873	1,99	0,99273	2,39

Продолжение табл. 15

$\nu$	$K(\nu)$	$\nu$	$K(\nu)$	$\nu$	$K(\nu)$	$\nu$	$K(\nu)$	$\nu$	$K(\nu)$
0,42	0,02548	0,81	0,4720	1,20	0,8877	1,60	0,9880	2,00	0,99329
0,43	0,07738	0,82	0,4880	1,21	0,8930	1,61	0,9888	2,01	0,99380
0,44	0,09773	0,83	0,5038	1,22	0,8981	1,62	0,9895	2,02	0,99428
0,45	0,01266	0,84	0,5194	1,23	0,9030	1,63	0,99015	2,03	0,99474
0,46	0,0160	0,85	0,5347	1,24	0,9076	1,64	0,99078	2,04	0,99516
0,47	0,0200	0,86	0,5497	1,25	0,9121	1,65	0,99136	2,05	0,99552
0,48	0,0247	0,87	0,5645	1,26	0,9164	1,66	0,99192	2,06	0,99588
0,49	0,0300	0,88	0,5791	1,27	0,9205	1,67	0,99244	2,07	0,99620
0,50	0,0360	0,89	0,5933	1,28	0,9245	1,68	0,99293	2,08	0,99650
0,51	0,0428	0,90	0,6073	1,29	0,9283	1,69	0,99339	2,09	0,99680
0,52	0,0503	0,91	0,6209	1,30	0,9319	1,70	0,99383	2,10	0,99705
0,53	0,0585	0,92	0,6343	1,31	0,9354	1,71	0,99423	2,11	0,99723
0,54	0,0675	0,93	0,6473	1,32	0,9387	1,72	0,99461	2,12	0,99750
0,55	0,0772	0,94	0,6601	1,33	0,9418	1,73	0,99497	2,13	0,99770
0,56	0,0876	0,95	0,6725	1,34	0,9449	1,74	0,99531	2,14	0,99790
0,57	0,0986	0,96	0,6846	1,35	0,9477	1,75	0,99562	2,15	0,99806
0,58	0,1104	0,97	0,6964	1,36	0,9505	1,76	0,99592	2,16	0,99822
0,59	0,1228	0,98	0,7079	1,37	0,9531	1,77	0,99620	2,17	0,99838
0,60	0,1357	0,99	0,7191	1,38	0,9556	1,78	0,99646	2,18	0,99852
				1,39	0,9580	1,79	0,99670	2,19	0,99864
								3,00	0,997

\*) Я. И. К. О. Математическо-статистические таблицы. Госстатиздат, Москва, 1961.

Таблица 16

Критические значения максимального отклонения  
эмпирической функции распределения от теоретической  
(случай конечных объемов выборки)\*

$n$	$\alpha=0,20$	$\alpha=0,10$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,01$
1	0,900	0,950	0,975	0,990	0,995
2	684	776	842	900	929
3	565	636	708	785	829
4	493	565	624	689	734
5	447	509	563	627	669
6	410	468	519	577	617
7	381	436	483	538	576
8	358	410	454	507	542
9	339	387	430	480	513
10	323	369	409	457	489
11	0,308	0,352	0,391	0,437	0,468
12	296	338	375	419	449
13	285	325	361	404	432
14	275	314	349	390	418
15	266	304	338	377	404
16	258	295	327	366	392
17	250	286	318	355	381
18	244	279	309	346	371
19	237	271	301	337	361
20	232	265	294	329	352
21	0,226	0,259	0,287	0,321	0,344
22	221	253	281	314	337
23	216	247	275	307	330
24	212	242	269	301	323
25	208	238	264	295	317
26	204	233	259	290	311
27	200	229	254	284	305
28	197	225	250	279	300
29	193	221	246	275	295
30	190	218	242	270	290
31	0,187	0,214	0,238	0,266	0,285
32	184	211	234	262	281
33	182	208	231	258	277

\*) Я. Янко, Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, Москва, 1961

Продолжение табл. 16

$n$	$\alpha=0,20$	$\alpha=0,10$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,01$
34	0,179	0,205	0,227	0,254	0,273
35	177	202	224	251	269
36	174	199	221	247	265
37	172	196	218	244	262
38	170	194	215	241	258
39	168	191	213	238	255
40	165	189	210	235	252
41	0,163	0,187	0,208	0,232	0,249
42	162	185	205	229	246
43	160	183	203	227	243
44	158	181	201	224	241
45	156	179	198	222	238
46	155	177	196	219	235
47	153	175	194	217	233
48	151	173	192	215	231
49	150	171	190	213	228
50	148	170	188	211	226
51	0,147	0,168	0,187	0,209	0,224
52	146	166	185	207	222
53	144	165	183	205	220
54	143	163	181	203	218
55	142	162	180	201	216
56	140	160	178	199	214
57	139	159	177	198	212
58	138	158	175	195	210
59	137	156	174	194	208
60	136	155	172	193	207
61	0,135	0,154	0,171	0,191	0,205
62	133	153	170	190	203
63	132	151	168	188	202
64	132	150	167	187	200
65	131	149	166	185	199
66	130	148	164	184	197
67	129	147	163	183	196

Продолжение табл. 16

$n$	$\alpha=0,20$	$\alpha=0,10$	$\alpha=0,05$	$\alpha=0,02$	$\alpha=0,01$
68	128	146	162	181	194
69	127	145	161	180	193
70	126	144	160	179	192
71	0,125	0,143	0,159	0,177	0,190
72	124	142	158	176	189
73	123	141	156	175	188
74	122	140	155	174	185
75	122	139	154	173	185
76	121	138	153	172	184
77	120	137	152	171	183
78	119	136	151	169	182
79	119	136	151	168	181
80	118	135	150	167	179
81	0,117	0,134	0,149	0,166	0,178
82	116	133	148	165	177
83	116	132	147	164	176
84	115	131	146	163	175
85	114	131	145	162	174
86	114	130	144	161	173
87	113	129	144	161	172
88	112	128	143	160	171
89	112	128	142	159	170
90	111	127	141	158	169
91	0,111	0,126	0,140	0,157	0,168
92	110	126	140	156	168
93	109	125	139	155	167
94	109	124	138	155	166
95	108	124	137	154	165
96	108	123	137	153	164
97	107	122	136	152	163
98	107	122	135	151	162
99	106	121	135	151	162
100	106	121	134	150	161

Таблица 17

## Критерий Смирнова \*)

$n = m$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$	$k = 12$
1	1,000000											
2	0,666667	1,000000										
3	0,400000	0,900000	1,000000									
4	0,228571	0,771429	0,971429	1,000000								
5	0,126984	0,642857	0,920635	0,992063	1,000000							
6	0,069264	0,525974	0,857143	0,974026	0,997835	1,000000						
7	0,037296	0,424825	0,787879	0,946970	0,991841	0,999417	1,000000					
8	0,019891	0,339860	0,717327	0,912976	0,981352	0,997514	0,999845	1,000000				
9	0,010537	0,269889	0,648293	0,874126	0,966434	0,993706	0,999559	1,000000				
10	0,005542	0,213070	0,582476	0,832179	0,947552	0,987659	0,997943	0,999783	0,999989	1,000000		
11	0,002903	0,167412	0,520850	0,788524	0,925339	0,979961	0,995634	0,999345	0,999938	0,999997	1,000000	
12	0,001515	0,131018	0,463902	0,744225	0,900453	0,968564	0,992141	0,998503	0,999796	0,999982	0,999999	
13	0,000788	0,102194	0,411804	0,700080	0,873512	0,955728	0,987351	0,997125	0,999500	0,999938	0,999995	1,000000
14	0,000408	0,079484	0,364515	0,656580	0,845065	0,949970	0,981218	0,995100	0,998979	0,998837	0,999981	0,999999
15	0,000211	0,061669	0,321862	0,614453	0,815584	0,924536	0,973752	0,992344	0,998163	0,999647	0,999948	0,999994
16	0,000109	0,047744	0,285588	0,573707	0,785465	0,906674	0,965002	0,988801	0,996985	0,999330	0,999880	0,999983
17	0,000056	0,036893	0,249393	0,534647	0,755041	0,887623	0,955047	0,984439	0,995389	0,998847	0,999762	0,999960
18	0,000029	0,028460	0,218952	0,497410	0,724582	0,867606	0,943982	0,979252	0,993331	0,998160	0,999571	0,999917
19	0,0148	0,021922	0,191938	0,462071	0,694311	0,846827	0,931911	0,973251	0,997076	0,997233	0,999286	0,999844
20	0,0761	0,016863	0,168030	0,428664	0,664409	0,825467	0,918942	0,966458	0,987701	0,996033	0,998884	0,999729
21	0,0590	0,012956	0,146921	0,397187	0,635020	0,803688	0,905183	0,958911	0,984095	0,99453	0,99834	0,99956
22	0,05199	0,009943	0,128321	0,367614	0,606260	0,781632	0,890738	0,950653	0,979953	0,99271	0,99764	0,99933
23	0,05102	0,007623	0,111963	0,339899	0,578218	0,759422	0,875705	0,941731	0,975280	0,99055	0,99676	0,99901

Продолжение табл. 17

$n = m$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	$k = 9$	$k = 10$	$k = 11$	$k = 12$
24	0, 0 <sup>052</sup>	0, 005839	0, 097600	0, 313983	0, 550963	0, 737166	0, 860177	0, 932197	0, 970087	0, 98803	0, 99568	0, 99860
25	0 <sup>027</sup>	004468	085007	289796	524546	714958	844240	922101	964389	98516	99438	99808
26	0, 0 <sup>014</sup>	0, 003417	0, 073980	0, 267263	0, 499005	0, 692877	0, 827971	0, 911498	0, 958206	0, 98193	0, 99287	0, 99744
27	0 <sup>069</sup>	002611	064338	246303	474362	670992	811443	900437	951562	97833	99111	99867
28	0 <sup>035</sup>	001994	055914	226833	450633	649362	794481	889969	944481	97438	98911	99576
29	0 <sup>018</sup>	001522	048563	208772	427823	628036	777865	877140	936989	97007	98686	99469
30	0 <sup>091</sup>	001161	042154	192037	405929	607055	760927	864996	929113	96542	98436	99346
31	0, 0 <sup>046</sup>	0, 000885	0, 036570	0, 176546	0, 384946	0, 586455	0, 743955	0, 852580	0, 920880	0, 96644	0, 98160	0, 9921
32	0 <sup>023</sup>	000674	031710	162223	364861	568264	726992	839930	912319	95514	97859	9905
33	0 <sup>012</sup>	000513	027483	148989	345657	546505	710076	827086	903455	94953	97533	9888
34	0 <sup>060</sup>	000391	023808	136773	327316	527198	693242	814080	894315	94363	97182	9898
35	0 <sup>031</sup>	000297	020616	125505	309816	508355	676519	800946	884924	93745	96807	9847
36	0, 0 <sup>016</sup>	0, 000226	0, 017845	0, 115120	0, 293133	0, 489989	0, 659934	0, 787713	0, 875307	0, 93101	0, 96407	0, 9824
37	0 <sup>079</sup>	000172	015440	105553	277243	472107	643512	774409	865487	92432	95985	9799
38	0 <sup>040</sup>	000131	013355	096747	262121	454713	627273	761059	855487	91740	95540	9773
39	0 <sup>020</sup>	000099	011547	088645	247738	437811	611234	747687	845327	91027	95074	9744
40	0 <sup>010</sup>	000075	009981	081195	234069	421400	595413	734313	835029	90293	94587	9714

\*) F. J. Massey: a) The distribution table for the deviation between two sample cumulatives, Ann. Math. Statist. 23, № 3 (1952), 435—442;

b) The distribution of the maximum deviation between two sample cumulatives step functions, Ann. Math. Statist. 22, № 1 (1951), 125—128.



Таблица 18

Границы критической области для критерия знаков \*)

n	Односторонние границы			n	Односторонние границы		
	2,5%	1%	0,5%		2,5%	1%	0,5%
5	0 5	0 5	0 5	55	20 35	19 36	18 37
6	1 5	0 6	0 6	56	21 35	19 37	18 38
7	1 6	1 6	0 7	57	21 36	20 37	19 38
8	1 7	1 7	1 7	58	22 36	20 38	19 39
9	2 7	1 8	1 8	59	22 37	21 38	20 39
10	2 8	1 9	1 9	60	22 38	21 39	20 40
11	2 9	2 9	1 10	61	23 38	21 40	21 40
12	3 9	2 10	2 10	62	23 39	22 40	21 41
13	3 10	2 11	2 11	63	24 39	22 41	21 42
14	3 11	3 11	2 12	64	24 40	23 41	22 42
15	4 11	3 12	3 12	65	25 40	23 42	22 43
16	4 12	3 13	3 13	66	25 41	24 42	23 43
17	5 12	4 13	3 14	67	26 41	24 43	23 44
18	5 13	4 14	4 14	68	26 42	24 44	23 45
19	5 14	5 14	4 15	69	26 43	25 44	24 45
20	6 14	5 15	4 16	70	27 43	25 45	24 46
21	6 15	5 16	5 16	71	27 44	26 45	25 46
22	6 16	6 16	5 17	72	28 44	26 46	25 47
23	7 16	6 17	5 18	73	28 45	27 46	26 47
24	7 17	6 18	6 18	74	29 45	27 47	26 48
25	8 17	7 18	6 19	75	29 46	27 48	26 49
26	8 18	7 19	7 19	76	29 47	28 48	27 49
27	8 19	8 19	7 20	77	30 47	28 49	27 50
28	9 19	8 20	7 21	78	30 48	29 49	28 50
29	9 20	8 21	8 21	79	31 48	29 50	28 51
30	10 20	9 21	8 22	80	31 49	30 50	29 51
31	10 21	9 22	8 23	81	32 49	30 51	29 52
32	10 22	9 23	9 23	82	32 50	31 51	29 53
33	11 22	10 23	9 24	83	33 50	31 52	30 53
34	11 23	10 24	10 24	84	33 51	31 53	30 54
35	12 23	11 24	10 25	85	33 52	32 53	31 54
36	12 24	11 25	10 26	86	34 52	32 54	31 55
37	13 24	11 26	11 26	87	34 53	33 54	32 55
38	13 25	12 26	11 27	88	35 53	33 55	32 56
39	13 26	12 27	12 27	89	35 54	34 55	32 57
40	14 26	13 27	12 28	90	36 54	34 56	33 57
41	14 27	13 28	12 29	91	36 55	34 57	33 58
42	15 27	14 28	13 29	92	37 55	35 57	34 58
43	15 28	14 29	13 30	93	37 56	35 58	34 59
44	16 28	14 30	14 30	94	38 56	36 58	35 59
45	16 29	15 30	14 31	95	38 57	36 59	35 60
46	16 30	15 31	14 32	96	38 58	37 59	35 61
47	17 30	16 31	15 32	97	39 58	37 60	36 61
48	17 31	16 32	15 33	98	39 59	38 60	36 62
49	18 31	16 33	16 33	99	40 59	38 61	37 62
50	18 32	17 33	16 34	100	40 60	38 62	37 63
51	19 32	17 34	16 35				
52	19 33	18 34	17 35				
53	19 34	18 35	17 36				
54	20 34	19 35	18 36				
n	5%	2%	1%	n	5%	2%	1%
	Двусторонние границы				Двусторонние границы		

\*) Б. Л. ван дер Варден, Математическая статистика, ИЛ, 1960.

Таблица 19

## Распределение статистики Вилкоксона \*)

k ↓	Объемы выборок g и h													
	2; 5	2; 6	2; 7	2; 8	2; 9	2; 10	3; 3	3; 4	3; 5	3; 6	3; 7	3; 8	3; 9	3; 10
0	4,76	3,57	2,78	2,22	1,82	1,52	5,00	2,86	1,79	1,19	0,83	0,61	0,45	0,35
1				4,44	3,64	3,03			3,57	2,38	1,67	1,21	0,91	0,70
2										4,76	3,33	2,42	1,82	1,40
3												4,24	3,18	2,45
4													5,00	3,85

k ↓	Объемы выборок g и h													
	4; 4	4; 5	4; 6	4; 7	4; 8	4; 9	4; 10	5; 5	5; 6	5; 7	5; 8	5; 9	5; 10	6; 6
0	1,43	0,79	0,48	0,30	0,20	0,14	0,10	0,40	0,22	0,13	0,08	0,05	0,03	0,11
1	2,86	1,59	0,95	0,61	0,40	0,28	0,20	0,79	0,43	0,25	0,16	0,10	0,07	0,22
2		3,17	1,90	1,21	0,81	0,56	0,40	1,59	0,87	0,51	0,31	0,20	0,13	0,43
3			3,33	2,12	1,41	0,98	0,70	2,78	1,52	0,88	0,54	0,35	0,23	0,70
4				3,64	2,42	1,68	1,20	4,76	2,60	1,52	0,93	0,60	0,40	1,30
5					3,64	2,52	1,80		4,11	2,40	1,48	0,95	0,63	2,06
6						3,78	2,70			3,66	2,25	1,45	0,97	3,25
7							3,80				3,26	2,10	1,40	4,65
8											4,66	3,00	2,00	
9												4,15	2,76	
10													3,76	
11														4,96

\*) Б. Л. ван дер Варден. Математическая статистика. ИЛ, 1960.



Таблица 20

## Колумбийский стандарт: однократная выборка \*)

Кодо- вое число	Объем вы- борки	Интервалы приемного качества в %													
		0,024- 0,035	0,035- 0,06	0,06- 0,12	0,12- 0,17	0,17- 0,22	0,22- 0,32	0,32- 0,65	0,65- 1,2	1,2- 2,2	2,2- 3,2	3,2- 4,4	4,4- 5,3	5,3- 6,4	6,4- 8,5
A	5	\$	\$	\$	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
B	10	\$	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
C	15	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	20	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
E	30	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
F	40	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
G	55	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
H	75	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
I	115	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
J	150	0	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
K	225	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
L	300	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
M	450	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
N	750	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
O	1500	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓

\$» означает сплошную проверку партии.  
«↓», «↑» означает, что за приемное берется первое число, стоящее ниже (выше) этой стрелки

\*) Statistical research group Columbia University, «Sampling Inspections», Mc Graw-Hill, N. Y., 1948.

## Колумбийский стандарт:

Кодовое число	№ вы- борки	Объем вы- борки	Интервалы приемле					
			0,024— 0,035	0,035— 0,06	0,06— 0,12	0,12— 0,17	0,17— 0,22	0,22— 0,32
			Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.
A	1 2	3 6	§	§	§	↓	↓	↓
B	1 2	7 14	§	↓	↓	↓	↓	↓
C	1 2	10 20	↓	↓	↓	↓	↓	↓
D	1 2	13 26	↓	↓	↓	↓	↓	+
E	1 2	20 40	↓	↓	↓	↓	+	↓
F	1 2	25 50	↓	↓	↓	+	↓	↓
G	1 2	35 70	↓	↓	+	↓	↓	↓
H	1 2	50 100	↓	+	↓	↓	↓	↓
I	1 2	75 150	↓	↓	↓	↓	↓	0 2 1 2
J	1 2	100 200	+	↓	↓	↓	0 2 1 2	0 3 2 3
K	1 2	150 300	↓	↓	↓	0 3 2 3	0 3 2 3	1 3 2 3
L	1 2	200 400	↓	↓	0 2 1 2	0 3 2 3	1 3 2 3	1 4 3 4
M	1 2	300 600	↓	0 2 1 2	0 3 2 3	1 3 2 3	1 4 3 4	1 6 5 6
N	1 2	500 1000	0 2 1 2	0 3 2 3	1 4 3 4	1 6 5 6	2 5 4 5	3 8 7 8
O	1 2	1000 2000	0 3 2 3	1 4 3 4	1 6 5 6	2 8 7 8	3 10 9 10	5 13 12 13

«§» означает сплошную проверку партии.

«+» знак, показывающий необходимость использования планов типа однократной  
«↓», «↑» означают, что приемочные и браковочные числа полагаются равными

\*) Statistical research group Columbia University, «Sampling inspection», Mc Graw-

Таблица 21

двукратная выборка \*)

ного качества в %							
0,32— 0,65	0,65— 1,2	1,2— 2,2	2,2— 3,2	3,2— 4,4	4,4— 6,3	5,3— 6,4	6,4— 8,5
Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.
↓	↑	↓	↓	↓	↓	0 2 1 2	0 2 1 2
↑	↓	↓	↓	0 3 2 3	0 3 2 3	1 3 2 3	1 4 3 4
↑	↓	↓	0 3 2 3	0 3 2 3	1 3 2 3	1 4 3 4	1 6 5 6
↓	↓	0 3 2 3	0 3 2 3	0 5 4 5	0 5 4 5	1 6 5 6	1 6 5 6
↓	0 2 1 2	1 3 2 3	1 4 3 4	1 5 4 5	1 5 4 5	2 7 5 6	3 8 7 8
↓	0 3 2 3	1 4 3 4	1 5 4 5	1 6 5 6	2 6 5 6	2 9 8 9	2 11 10 11
0 2 1 2	1 3 2 3	1 5 4 5	1 6 5 6	2 7 6 7	2 9 8 9	3 10 9 10	4 13 12 13
0 3 2 3	1 4 3 4	1 6 5 6	2 7 6 7	3 10 9 10	4 11 10 11	5 13 12 13	6 17 16 17
1 3 2 3	1 6 5 6	3 6 5 6	4 9 8 9	5 12 11 12	6 15 14 15	6 19 18 19	8 24 23 24
1 4 3 4	2 6 5 6	3 10 9 10	5 12 11 12	6 17 16 17	8 20 19 20	8 26 25 26	11 31 30 31
2 5 4 5	3 8 7 8	5 14 13 14	7 19 18 19	9 24 23 24	11 29 28 29	14 34 33 34	16 44 43 44
2 7 6 7	4 10 9 10	6 17 16 17	9 25 24 25	11 33 32 33	14 38 37 38	18 45 44 45	↑
3 9 8 9	5 16 15 16	8 26 25 26	12 36 35 36	16 48 47 48	↑	↑	↑
5 13 12 13	7 24 23 24	14 41 40 41	↑	↑	↑	↑	↑
7 26 25 26	14 44 43 44	↑	↑	↑	↑	↑	↑

выборки  
первым ниже (выше) следующим часам.

## Колумбийский стандарт:

Кодовое число	№ вы- борки	Объем вы- борки	Интервалы приемле					
			0,024— 0,035	0,035— 0,06	0,06— 0,12	0,12— 0,17	0,17— 0,22	0,22— 0,32
			Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.
А	1	3	§	§	§	↓	↓	↓
	2	2						
	3	2						
В	1	4						
	2	4						
	3	4	§	↓	↓	↓	↓	↓
	4	4						
	5	4						
С	1	5						
	2	5						
	3	5	↓	↓	↓	↓	↓	↓
	4	5						
	5	5						
D	1	6						
	2	6						
	3	6	↓	↓	↓	↓	↓	+
	4	6						
	5	6						
	6	6						
E	1	8						
	2	8						
	3	8	↓	↓	↓	↓	+	↓
	4	8						
	5	8						
	6	8						
	7	8						
F	1	10						
	2	10						
	3	10	↓	↓	↓	+	↓	↓
	4	10						
	5	10						
	6	10						
	7	10						
G	1	14						
	2	14						
	3	14	↓	↓	+	↓	↓	↓
	4	14						
	5	14						
	6	14						
	7	14						
H	1	20						• 2
	2	20						• 2
	3	20	↓	+	↓	↓	↓	• 2
	4	20						0 2
	5	20						0 2
	6	20						0 2
	7	20						2 3
I	1	30					• 2	• 2
	2	30					• 2	• 2
	3	30	↓	↓	↓	↓	• 2	0 2
	4	30					0 2	0 2
	5	30					0 2	1 3
	6	30					1 3	1 3
	7	30					2 3	2 3

Таблица 22

последовательная выборка \*)

ного качества в %																
0,32— 0,65		0,65— 1,2		1,2— 2,2		2,2— 3,2		3,2— 4,4		4,4— 5,3		5,3— 6,4		6,4— 8,5		
Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	
	↓		+		↓		↓		↓		↓		0	2	0	2
													0	2	0	2
													1	2	0	2
													2	2	0	2
													3	2	0	2
													4	2	0	2
													5	2	0	2
													6	2	0	2
													7	2	0	2
													8	2	0	2
													9	2	0	2
													10	2	0	2
													11	2	0	2
													12	2	0	2
													13	2	0	2
													14	2	0	2
													15	2	0	2
													16	2	0	2
													17	2	0	2
													18	2	0	2
													19	2	0	2
													20	2	0	2
													21	2	0	2
													22	2	0	2
													23	2	0	2
													24	2	0	2
													25	2	0	2
													26	2	0	2
													27	2	0	2
													28	2	0	2
													29	2	0	2
													30	2	0	2
													31	2	0	2
													32	2	0	2
													33	2	0	2
													34	2	0	2
													35	2	0	2
													36	2	0	2
													37	2	0	2
													38	2	0	2
													39	2	0	2
													40	2	0	2
													41	2	0	2
													42	2	0	2
													43	2	0	2
													44	2	0	2
													45	2	0	2



Кодовое число	№ выборки	Объем выборки	Интервалы приемле											
			0,024—0,035		0,035—0,06		0,06—0,12		0,12—0,17		0,17—0,22		0,22—0,32	
			Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.	Пр.	Бр.
J	1	40					*	2	*	2	*	2	*	2
	2	40					*	2	*	2	*	2	*	2
	3	40					*	2	*	2	*	2	*	2
	4	40	+				0	2	0	2	0	2	0	3
	5	40		↓		↓	0	2	1	3	1	3	1	3
	6	40					1	3	1	3	2	4	2	4
	7	40					2	3	2	3	4	5	4	5
K	1	50					*	2	*	2	*	2	*	2
	2	50					*	2	*	2	*	2	*	2
	3	50					*	2	0	2	0	3	0	3
	4	50					0	2	0	2	0	3	1	3
	5	50	↓		↓		0	2	0	2	1	3	2	4
	6	50					0	2	0	2	1	3	2	4
	7	50					0	2	0	3	2	4	2	4
	8	50					1	2	2	3	3	4	3	4
L	1	75					*	2	*	2	*	2	*	2
	2	75					*	2	*	2	0	2	0	3
	3	75					*	2	0	2	0	4	0	3
	4	75	↓				0	2	0	2	2	4	1	4
	5	75					0	2	0	2	2	5	2	5
	6	75					1	3	1	3	2	5	2	5
	7	75					2	3	2	3	4	5	4	5
M	1	100	*	1	*	1	*	2	*	2	*	2	*	3
	2	100	*	2	*	2	*	2	0	3	0	3	0	3
	3	100	*	2	*	2	0	2	0	3	0	3	0	4
	4	100	*	2	0	3	0	3	1	3	1	4	1	4
	5	100	0	2	0	3	1	3	1	4	1	4	2	5
	6	100	0	2	1	3	1	3	1	4	2	4	3	6
	7	100	0	2	1	3	1	3	2	4	3	5	4	7
	8	100	1	2	2	3	2	3	3	4	5	6	6	7
N	1	150	*	1	*	2	*	2	*	2	*	2	*	3
	2	150	*	2	*	2	*	2	0	3	0	4	1	4
	3	150	0	2	0	2	0	3	0	4	1	4	2	4
	4	150	0	2	0	2	0	3	0	4	1	5	3	6
	5	150	0	2	0	2	1	4	1	4	2	6	4	7
	6	150	0	3	0	3	1	5	2	5	3	6	5	8
	7	150	1	3	0	3	2	5	3	5	4	7	6	9
	8	150	1	3	1	3	3	5	4	6	5	8	7	10
	9	150	2	3	2	3	4	5	5	6	7	8	10	11
O	1	300	*	2	*	2	*	3	*	3	*	3	0	4
	2	300	*	2	*	2	*	3	0	4	1	5	1	5
	3	300	0	2	0	3	0	4	1	5	1	6	2	7
	4	300	0	3	1	4	1	4	2	6	3	7	4	9
	5	300	0	3	2	5	1	5	3	7	4	8	6	11
	6	300	0	3	2	5	2	6	4	7	5	9	8	13
	7	300	0	3	2	5	3	7	5	8	7	10	10	14
	8	300	1	3	3	5	3	7	6	9	8	11	12	15
	9	300	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	15	16

\* означает сплошную проверку партии.

«+» знак, показывающий необходимость использования планов типа однократной  
«↓», «↑» означают, что приемочные и браковочные числа полагаются равными  
«\*» означает, что если число выявленных дефектных изделий меньше браковочного

\*) Statistical research group Columbia University, «Sampling inspection».

Продолжение табл. 22

мого качества в %							
0,32— 0,65	0,65— 1,2	1,2— 2,2	2,2— 3,2	3,2— 4,4	4,4— 5,3	5,3— 6,4	6,4— 8,5
Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.	Пр. Бр.
* 2 0 3 1 3 3 5 3 5 3 5 4 5	* 3 1 4 2 4 4 6 5 7 6 8 8 9	0 4 1 5 3 6 5 8 6 10 8 12 11 12	0 4 2 7 5 9 7 11 9 13 11 15 15 16	1 5 2 8 5 11 8 14 11 17 14 19 18 19	1 6 5 9 7 12 10 16 13 19 17 21 22 23	2 6 5 11 9 15 13 19 17 22 22 26 26 27	2 8 7 12 18 21 23 26 28 31 30 31
* 2 0 4 2 4 2 5 3 6 4 7 5 7 6 7	* 3 1 4 2 6 3 7 4 8 5 9 7 10 9 10	0 4 2 6 3 8 5 10 7 12 9 14 11 16 15 16	0 5 3 8 5 11 8 13 10 15 13 18 15 20 19 20	1 6 3 9 7 13 10 16 13 19 16 22 19 25 24 25	2 7 4 11 8 15 12 19 16 22 21 26 25 29 28 29	2 7 7 13 12 18 17 22 21 27 26 32 30 36 36 37	3 9 8 14 14 20 19 25 25 31 30 38 36 43 43 44
* 3 1 4 1 5 2 6 3 6 5 8 7 8	0 4 2 5 3 7 5 9 7 10 9 11 10 11	0 5 3 8 6 10 8 13 11 16 13 18 18 19	1 7 4 10 8 14 12 18 15 21 18 25 24 25	2 8 6 13 10 17 15 22 19 26 24 31 30 31	3 9 8 15 13 20 19 26 25 32 30 37 36 37	4 10 11 16 18 23 25 30 32 36 39 43 42 43	↑
* 3 1 5 3 7 4 8 5 9 7 10 9 10	0 4 2 6 4 8 6 11 8 13 10 15 12 17 16 17	0 7 4 9 6 13 9 16 12 19 15 22 19 25 24 25	1 8 5 13 10 18 14 22 18 26 23 31 27 35 34 35	2 10 8 16 13 21 19 27 24 33 30 38 35 44 43 44	↑	↑	↑
0 4 1 5 2 7 4 9 6 11 8 13 10 14 12 15 15 16	0 6 3 8 5 11 7 13 10 16 13 19 15 21 18 24 23 24	1 8 6 13 10 18 15 22 19 27 24 31 28 36 33 41 41 42	↑	↑	↑	↑	↑
0 6 2 9 4 11 7 14 10 17 13 20 15 23 18 24 23 24	1 8 6 13 10 18 15 22 19 27 24 31 28 36 33 41 41 42	↑	↑	↑	↑	↑	↑

выборки.  
первым ниже (выше) следующим числам.  
числа, то необходимо перейти к следующей выборке.

Значения  $Q_c$ 

$c$	$\lambda$	$Q_c$
0	1,0	0,367 879
1	1,618 034	0,839 962
2	2,269 531	1,371 102
3	2,945 186	1,942 381
4	3,639 547	2,543 534
5	4,349 048	3,168 185
6	5,071 184	3,812 021
7	5,804 110	4,471 954
8	6,546 411	5,145 672
9	7,296 973	5,831 388
10	8,054 895	6,527 684
11	8,819 440	7,233 412
12	9,589 989	7,947 624
13	10,366 021	8,669 525
14	11,147 089	9,398 444
15	11,932 806	10,133 803
16	12,722 834	10,875 103
17	13,516 878	11,621 909
18	14,314 674	12,373 837
19	15,115 990	13,130 548
20	15,920 615	13,891 741

Таблица 24

Значения  $\theta_c$ . Однократные планы типа (Л, С)<sub>23</sub>, обеспечивающие минимум инспекции при заданном предельном выходном качестве

c	$k_M = 1,25$	1,5	1,75	2,0	2,25	2,5	2,75	3,0
0	1,8577	1,7801	1,7218	1,6761	1,6393	1,6090	1,5836	1,5619
1	5,9938	6,2035	6,4506	6,7231	7,0138	7,3181	7,6328	7,9559
2	12,8489	14,3061	15,9794	17,8538	19,9201	22,1727	24,6074	27,2215
3	22,8056	27,2709	32,7432	39,3031	47,0379	56,0381	66,3953	78,2018
4	36,2546	46,5288	60,1200	77,6940	99,9893	127,8114	162,0318	203,5869
5	53,6074	73,8210	102,7752	143,2597	198,6348	272,8749	370,6220	497,2384
6	75,3021	111,2867	167,1075	251,6220	376,3707	556,2021	809,8459	1160,5589
7	101,8075	161,4402	261,8326	426,3712	688,5724	1095,1553	1709,7170	2617,1010
8	133,6275	227,4595	398,7442	702,7834	1225,9578	2098,7605	3512,8680	5742,6847
9	171,3037	313,0920	593,7016	1133,1702	2135,5421	3934,8835	7059,7682	12321,9866

c	$k_M = 2,5$	4,0	4,5	5,0	5,5	6,0
0	1,5269	1,4998	1,4782	1,4606	1,4459	1,4335
1	8,6207	9,3039	10,0002	10,7061	11,4195	12,1386
2	32,9793	39,4335	46,5761	54,4014	62,9057	72,0860
3	106,5346	141,7821	184,6943	236,0230	296,5222	366,9476
4	312,7753	464,1827	667,6728	934,1697	1275,6565	1705,1578

c	$k_M = 7,0$	8,0	9,0	10,0	12,0	15,0
0	1,4136	1,3984	1,3864	1,3767	1,3619	1,3468
1	13,5897	15,0531	16,5250	18,0032	20,9723	25,4460
2	92,4665	115,5311	141,2726	169,6862	234,5184	351,7536
3	540,6050	763,0557	1040,3621	1378,6538	2262,3052	4196,8272
4	2885,6530	4501,0190	6994,2623	10223,1926	19916,9796	45696,8272

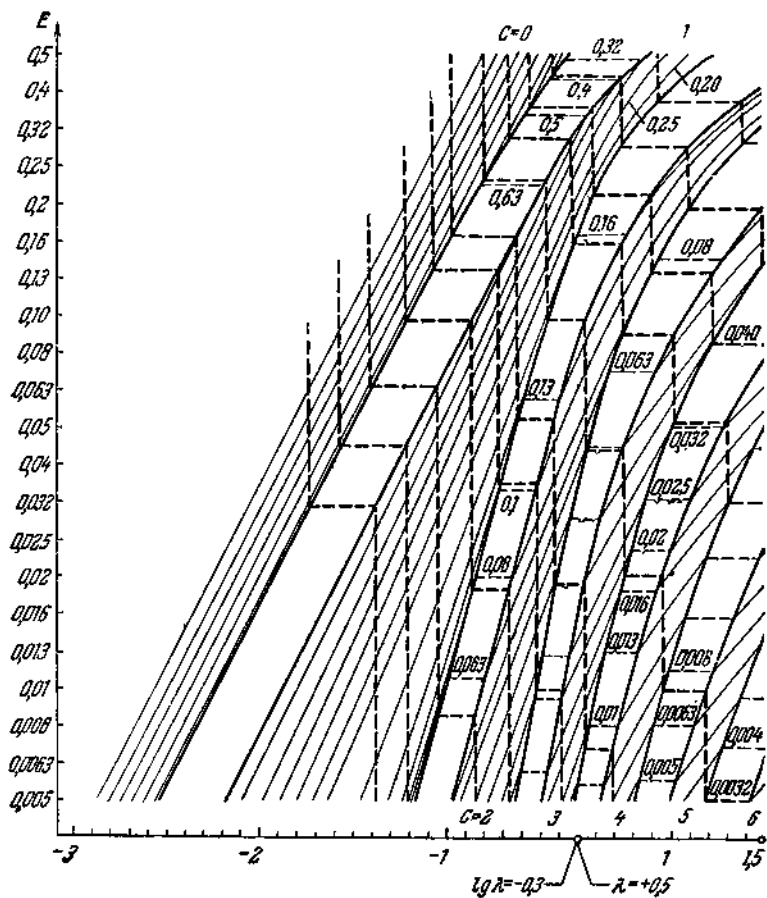
## Экономические планы типа

c	E		0,0003		0,010		0,016	
	lg $\gamma$	lg $\lambda$	lg $\gamma$	lg $\lambda$	lg $\gamma$	lg $\lambda$	lg $\gamma$	lg $\lambda$
0	1,0706	-3,3067	0,9761	-3,0197	0,8805	-2,7300		
0	0,4793	-2,8043	0,4310	-2,5678	0,3814	-2,3279		
0—1	-0,1120	-2,4489 -2,0909	-0,1141	-2,2470 -1,8895	-0,1177	-2,0409 -1,6840		
1	-0,7033	-1,5281	-0,6593	-1,3792	-0,6167	-1,2275		
1—2	-1,2946	-1,1338 -0,9242	-1,2044	-1,0276 -0,8188	-1,1158	-0,9177 -0,7101		
2	-1,5363	-0,7328	-1,4318	-0,6455	-1,3288	-0,5549		
2—3	-1,7781	-0,6033 -0,4564	-1,6592	-0,5275 -0,3814	-1,5418	-0,4485 -0,3034		
3	-1,9233	-0,3589	-1,7973	-0,2928	-1,6726	-0,2238		
3—4	-2,0685	-0,2900 -0,1774	-1,9354	-0,2294 -0,1175	-1,8034	-0,1659 -0,0549		
4	-2,1702	-0,1176	-2,0327	-0,0630	-1,8962	-0,0056		
4—5	-2,2719	-0,0734 0,0176	-2,1300	-0,0221 0,0683	-1,9891	0,0318 0,1216		
5—6	-2,4265	0,0898 0,1660	-2,2786	0,1348 0,2105	-2,1316	0,1822 0,2574		
6—7	-2,5503	0,2196 0,2851	-2,3980	0,2599 0,3250	-2,2465	0,3026 0,3672		
7—8	-2,6531	0,3267 0,3841	-2,4974	0,3635 0,4206	-2,3424	0,4025 0,4592		
8—9	-2,7406	0,4176 0,4686	-2,5823	0,4516 0,5023	-2,4244	0,4876 0,5380		
9—10	-2,8167	0,4962 0,5422	-2,6561	0,5279 0,5736	-2,4960	0,5616 0,6070		

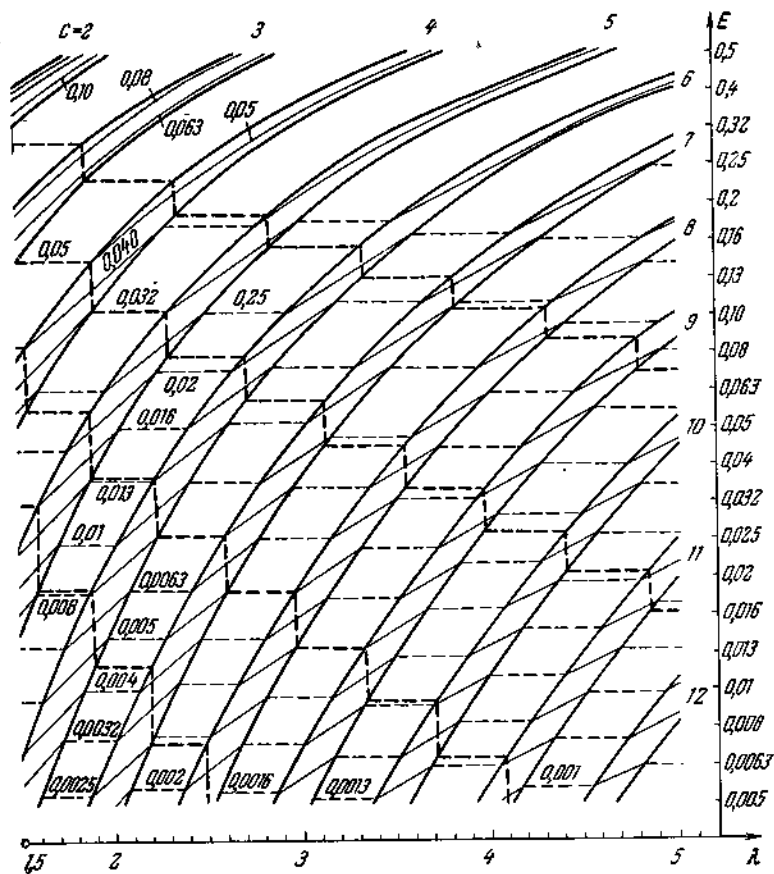
## однократной выборки

0,025		0,040		0,063		0,10	
lg $\gamma$	lg $\lambda$	lg $\gamma$	lg $\lambda$	lg $\gamma$	lg $\lambda$	lg $\gamma$	lg $\lambda$
0,7896	-2,4569	0,6928	-2,1707	0,5962	-1,8944	0,4914	-1,6115
0,3333	-2,1004	0,2804	-1,8604	0,2251	-1,6268	0,1610	-1,3853
-0,1230	-1,8442	-0,1320	-1,6351	-0,1460	-1,4301	-0,1694	-1,2168
	-1,4881		-1,2806		-1,0780		-0,8686
-0,5793	-1,0829	-0,5444	-0,9293	-0,5172	-0,7787	-0,4998	-0,6216
-1,0356	-0,8112	-0,9567	-0,6960	-0,8883	-0,5805	-0,8302	-0,4572
	-0,6050		-0,4917		-0,3788		-0,2589
-1,2350	-0,4670	-1,1421	-0,3714	-1,0600	-0,2754	-0,9881	-0,1723
-1,4345	-0,3712	-1,3274	-0,2868	-1,2318	-0,2012	-1,1459	-0,1088
	-0,2273		-0,1444		-0,0607		0,0292
-1,5584	-0,1561	-1,4440	-0,0818	-1,3413	-0,0065	-1,2481	0,0752
-1,6823	-0,1035	-1,5606	-0,0349	-1,4508	0,0351	-1,3502	0,1113
	0,0066		0,0740		0,1426		0,2169
-1,7709	0,0509	-1,6446	0,1132	-1,5302	0,1768	-1,4250	0,2461
-1,8594	0,0851	-1,7286	0,1439	-1,6097	0,2042	-1,4987	0,2700
	0,1741		0,2320		0,2911		0,3555
-1,9960	0,2292	-1,8588	0,2812	-1,7337	0,3347	-1,6161	0,3933
	0,3038		0,3550		0,4076		0,4650
-2,1065	0,3449	-1,9647	0,3919	-1,8348	0,4403	-1,7132	0,4936
	0,4091		0,4554		0,5031		0,5551
-2,1991	0,4413	-2,0535	0,4844	-1,9200	0,5289	-1,7945	0,5779
	0,4975		0,5401		0,5839		0,6322
-2,2784	0,5235	-2,1299	0,5625	-1,9934	0,6048	-1,8648	0,6505
	0,5736		0,6121		0,6538		0,6988
-2,3477	0,5951	-2,1968	0,6325	-2,0579	0,6712	-1,9266	0,7141
	0,6402		0,6772		0,7154		0,7577

### Номограмма экономических планов



## ТИПА ОДНОКРАТНОЙ ВЫБОРКИ





## ЛИТЕРАТУРА

### К главе 1

1. Маликов И. М., Половко А. М., Романов Н. А., Чукреев П. А., Основы теории и расчета надежности, Судпромгиз, 1960.
2. Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, «Советское радио», 1962.
3. Ллойд Д., Липов М., Надежность. Организация исследования, методы, математический аппарат, «Советское радио», 1964.
4. Vazovsky I., Reliability theory and practice, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962.
5. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
6. Вентцель Е. С., Теория вероятностей, Физматгиз, 1962.
7. Леман Э., Проверка статистических гипотез, «Наука», 1964.
8. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), ГТТИ, 1955.
9. Крамер Г., Математические методы статистики, ИЛ, 1948.
10. Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, ИЛ, 1960.
11. Колмогоров А. Н., Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.
12. Серенсен С. В., Когаев В. П., Степнов М. Н., Гиацинтов Е. В., О законе распределения долговечности при усталостных испытаниях, Заводская лаборатория 24, 3 (1958), 324—329.
13. Weibull W., A statistical distribution function of wide applicability, J. Appl. Mech. 18, 3 (1951), 293—297.
14. Колмогоров А. Н., О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении, ДАН СССР 31, 2 (1941), 99—101.
15. Филиппов А. Ф., О распределении размеров частиц при дроблении, Теория вероятностей и ее применения 6 (1961), 209—318.
16. Хинчин А. Я., Об унимодальных распределениях, Томск, Изв. НИИ матем. и механ. ун-та 2, 2 (1938), 1—7.
17. Gnedenko B., Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire, Ann. Math. 44, 3 (1943).
18. Gumbel E., Statistics of extremes, Columbia University press, N. Y., 1958.
19. Картеун J. С., Skew Frequency Curves, 1903.
20. Хинчин А. Я., Математические методы теории массового обслуживания, Изд-во АН СССР, 1955.
21. Григелионис Б., О сходимости сумм ступенчатых процессов к пуассоновскому, Теория вероятностей и ее применения 8, 2 (1963).
22. Clorpper J., Pearson E., The use of confidence or fiducial limits illustrated in the case of the binomial, Biometrika 26, 404—413 (1934).

## К главе 2

1. Маликов И. М., Половко А. М., Романов Н. А., Чукуре-ев П. А., Основы теории и расчета надежности, Судпромгиз, 1960.
2. Проблемы надежности радиоэлектронной аппаратуры (Сборник докладов пятого национального симпозиума США), Оборонгиз, 1960.
3. Knight G. R., Gervis E. R., Herd E. R., The definition of terms of Interest in the study of reliability, Trans. IRE, PGRQC, April 1955, p. 34.
4. Теория надежности в области радиоэлектроники, Терминология, Изд-во АН СССР, 1962.
5. Гнеденко Б. В., Шор Я. Б., Надежность, Энциклопедический справочник «Автоматизация производства и промышленная электроника», т. 2, Советская энциклопедия, 1963, 348—353.
6. Шеннон К., Бандвагон, Сб. «Работы по теории информации и кибернетики», ИЛ, 1963.
7. Bellman R., Dreyfus S., Dynamic Programming and the Reliability of Multicomponent Devices, Operation Research 6, 2 (1958), 200—206.
8. Беляев Ю. К., Линейчатые марковские процессы и их приложение к задачам теории надежности, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистики, Вильнюс, 1962, 309—323.
9. Севастьянов Б. А., Эргодическая теорема для марковских процессов и ее приложение к телефонным системам с отказами, Теория вероятностей и ее применения 2, 1 (1957), 106—116.
10. Марьянович Т. П., Надійність системи зі змішаним резервом, ДАН УРСР 8 (1961), 944—947.
11. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
12. Смит В., Теория восстановления, Сб. переводов, ИЛ. «Математика» 5, 3 (1961), 95—150.
13. Хинчин А. Я., Работы по теории массового обслуживания. Физматгиз, 1963.
14. Соловьев А. Д., Математические вопросы теории надежности, Радиоэлектронная промышленность 4 (1958).
15. Дружинин Г. В., Предсказание сохранности элементов и систем автоматки при векторных определяющих параметрах, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика 2 (1961), 165—170.
16. Григелионис Б. И., Предельные теоремы для сумм процессов восстановления, Сб. «Кибернетику на службу коммунизму». Изд-во «Энергия», т. 2 (1964), 246—265.
17. Соловьев А. Д., Надежность систем с восстановлением, Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2, Изд-во «Энергия», 1964, 189—193.

## К главе 3

1. Epstein B., Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential, Technometrics 1—2 (1960), 83—101, 167—183.
2. Epstein B., Sobel M., Life Testing, J. Amer. Stat. Assoc. 48 (1953), 486—502.
3. Epstein B., Sobel M. Sequential Life Tests in the Exponential Case, Ann. Math. Statist. 26, 1 (1955), 82—93.
4. Buckland W. R., Statistical assesement of the life characteristic, Griffin's statistical monographs & courses, London, 1964 (a bibliographic guide).

5. Као J. H. K., Computer Methods for Estimating Weibull Parameters in Reliability Study, Trans. IRE, PGRQC, July 1958, 15—22
6. Endicott H. S., Zoellner J. A., A preliminary investigation of the steady and progressive stress testing of mica capacitors, Proc. 7-th Nat. Symp. on reliability and quality control, 1961, 229—240.
7. Sarhan A., Greenberg B., Contributions to Order Statistics, N. Y., 1962.
8. Дынкин Е. Б., Необходимые и достаточные статистики для семейства распределений вероятностей, Успехи матем. наук 6, 1 (1951), 68—90.
9. Большев Л. Н., О сравнении параметров распределения Пуассона, Теория вероятностей и ее применения 7, 1 (1962), 119—120.
10. Pugh E. L., The best estimate of reliability in the exponential case, Oper. Res. 11, 1 (1963), 57—61.
11. Мирный Р. А., Соловьев А. Д., Оценка надежности системы по результатам испытаний ее компонент, Сб. «Кибернетику на службу коммунизму», т. 2, Изд-во «Энергия», 1964, 213—218.
12. Колмогоров А. Н., Несмещенные оценки, Известия АН СССР, сер. матем. 14 (1950), 303—326.

#### К главе 4

1. Леман Э., Проверка статистических гипотез, «Наука», 1964
2. Вальд А., Последовательный анализ, Физматгиз, 1960.
3. Wald A., Statistical decision functions, N. Y., 1950.
4. Янко Я., Математико-статистические таблицы, Госстатиздат, 1961.
5. Epstein B., Testing for the validity of the assumption that the underlying distribution of life is exponential, Technometrics 2, 1—2 (1960), 83—101, 167—183.
6. Cochran W. G., The  $\chi^2$  test of goodness of fit, Ann. Math. Statist. 23, 3 (1952), 315—345.
7. Sherman B., A random variable related to the spacing of sample values, Ann. Math. Statist. 21 (1950), 339—361
8. Bartholomew D. J., Testing for departure from the exponential distribution, Biometrika 44 (1957), 253—256.
9. Fisher R. A., Tests of significance in harmonic analysis, Proc. Roy. Soc. A 125 (1929), 54—59.
10. Hartley H. O., The maximum F-ratio as a short-cut test of heterogeneity of variance, Biometrika 37 (1950), 308—312.
11. Dvoretzky A., Kiefer J., Wolfowitz I., Sequential decision problems for processes with continuous time parameter, testing hypotheses, Ann. Math. Statist. 24 (1953), 254—264.
12. Михалевич В. С., Последовательные байесовские решения и оптимальные методы приемочного статистического контроля, Теория вероятностей и ее применения 1, 4 (1956).
13. Ширяев А. Н., К теории решающих функций и управлению процессом наблюдения по неполным данным, Trans. of the 3 Prague conference on information theory, Prague, 1964, 657—681.
14. Белман Р., Динамическое программирование, ИЛ, 1960.
15. Kiefer J., Wolfowitz I., Sequential tests of hypotheses about the mean occurrence time of a continuous parameter Poisson process, Naval research logistics quarterly 3, 3 (1956), 205—219.
16. Ван дер Варден Б. Л., Математическая статистика, ИЛ, 1960, 321—357.
17. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961, 354—360.

18. Гнеденко Б. В., О критерии Вилкоксона сравнения двух выборок, Бюлл. Польск. АН, сер. матем., астр. и физ. наук VI, 10 (1958), 611—614.
19. Гнеденко Б. В., Проверка неизменности распределения вероятностей в двух независимых выборках, Mathem. Nachr. 12, 1—2 (1954), 29—66.
20. Берлянд Х. Л., Квит И. Д., Про одну задачу порівняння двох виборок, ДАН УРСР 1 (1952), 13—15.
21. Квит И. Д., О теореме Н. В. Смирнова относительно сравнения двух выборок, ДАН СССР 71, 2 (1950), 229—231.
22. Мания Г. М., Практическое применение оценки максимума двухсторонних уклонений эмпирической кривой распределения в заданном интервале роста теоретического закона, Сообщ. АН Груз. ССР 14, 9 (1953), 521—524.
23. Мания Г. М., Практическое применение оценки максимума односторонних уклонений эмпирической кривой распределения в заданном интервале роста теоретического закона, Тр. Груз. политехн. ин-та 30(1954), 89—94.
24. Mann H. B. and Whitney D. R., On a Test of Whether One of Two Random variables is Stochastically Larger than the Other, Ann. Math. Statist. 18, 1 (1947), 50—60.
25. Рвачева Е. Л., О максимальном расхождении между двумя эмпирическими распределениями, Укр. матем. ж. 4, 4 (1952), 373—392.
26. Massey F. J., The distribution table for the deviation between two sample cumulatives, Ann. Math. Statist. 23, 3 (1952), 435—442.
27. Massey F. J., The distribution of the maximum deviation between two sample cumulative step functions, Ann Math Statist. 22, 1 (1951), 125—128.
28. Дунин-Барковский И. В. и Смирнов Н. В., Теория вероятностей и математическая статистика в технике (общая часть), Гостехиздат, 1955.

## К главе 5

1. Гнеденко Б. В., Курс теории вероятностей, Физматгиз, 1961.
2. Смирнов Н. В., Предельные законы распределения для членов вариационного ряда, Тр. Матем. ин-та АН СССР 25 (1949).
3. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, Изд-во «Мир» 1964.
4. Ллойд Д., Липов М., Надежность, «Советское радио», 1964, стр. 323.
5. Сница М. А., Методы резервирования радиоаппаратуры, Электросвязь 4 (1959).

## К главе 6

1. Гнеденко Б. В., О ненагруженном дублировании, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика 4 (1964).
2. Гнеденко Б. В., О дублировании с восстановлением, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика 5 (1964).
3. Соловьев А. Д., Асимптотическое распределение времени жизни дублированного элемента, Изв. АН СССР, Техническая кибернетика 5 (1964).
4. Соловьев А. Д., Об определении резервов для систем многократного действия, Изв. АН СССР, Энергетика и автоматика 2 (1962), 124—129.

5. Karlin S., Mc Gregor J., The differential equations of Birth and Death processes and the Stieltjes moment problem, *Trans. Amer. Math. Soc.* **85**, 2 (1957), 489—546.
6. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения, «Мир», 1964.
7. Хинчин А. Я., Работы по математической теории массового обслуживания, Физматгиз, 1963.
8. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н., Лекции по теории массового обслуживания, Киев, 1964.
9. Натансон И. П., Конструктивная теория функций, ГТТИ, 1949.
10. Соловьев А. Д., Надежность систем с восстановлением, Сб. «Кибернетика на службу коммунизму», т. 2, Изд-во «Энергия», 1964.
11. Беляев Ю. К., Линейчатые марковские процессы и их приложение к теории надежности, Труды VI Всесоюзного совещания по теории вероятностей и математической статистике, Вильнюс, 1962, 309—323.
12. Epstein B., Hosford T., Reliability of some two units redundant systems, *Proc. 6-th Nat. Symp. on reliability and quality control*, 1960, 466—476.
13. Gaver D. P., Time to failure and availability of paralleled systems with repair, *Trans. IRE, PGRQC*, June 1963, 30—33.

## К главе 7

1. Колмогоров А. Н., Несмещенные оценки, *Изв. АН СССР, сер. матем.* **14**, 4 (1950), 303—326.
2. Сираждинов С. Х., Эйдельмант М. И., К вопросу об оценках качества продукции по результатам выборочного контроля, *Тр. Ин-та матем. АН УзССР, Ташкент*, **22** (1961).
3. Abel Wallis W., *Techniques of Statistical Analysis*, 1947.
4. Dodge H. F., Romig H. G., *Sampling inspection*, N. Y., 1959.
5. Statistical Research Group Columbia University, *Sampling inspection*, N. Y., 1948.
6. Коуден Д., Статистические методы контроля качества, Физматгиз, 1961.
7. Стандарты статистического контроля (проект), Ин-т матем. АН. УзССР, Ташкент, 1961.
8. Hill J. D., Sampling inspection and defence specification, DEF-131 (with discussion), *J. Roy. Statist. Soc. A125*, 1 (1962), 31—87.
9. Шор Я. Б., Статистические методы анализа и контроля качества и надежности, «Советское радио», 1962.
10. Horsnell G., Economical acceptance sampling schemes, *J. Roy. Statist. Soc. A120* (1957), 148—201.
11. Van der Waerden B. L., Sampling inspection as a minimum loss problem, *Ann. Math. Statist.* **31**, 2 (1960), 369—384.
12. Hald A., The compound hypergeometric distribution and a system of single sampling inspection plans based on prior distributions and costs, *Technometrics* **2**, 3 (1960), 275—340, discussion 361—372.
13. Беляев Ю. К., Колмогоров А. Н., Экономичные планы приемочного контроля, Доклад на IV Всесоюзном математическом съезде, Ленинград, 1960.
14. Вальд А., Последовательный анализ, Физматгиз, 1960.
15. Сираждинов С. Х., Несмещенные оценки доли пропущенного брака при методе однократной выборки, *Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, Ташкент*, **20** (1955), 89—100.
16. Колмогоров А. Н., Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равно нулю, Ленинград, 1951.

17. Эйдельмант М. И., Инамов И., О практическом применении оценочных функций для анализа результатов статистического контроля качества продукции, Теория вероятностей и математическая статистика 1 (1964), Изд-во «Наука» АН УзССР, 48—57.
  18. Proc. Nat. Symp. on Reliability and Control in Electronics, USA, № 1—9, 1954—1963.
  19. Bowker A. H., Good H. P., Sampling inspection by variables, N. Y., 1952.
  20. Barnard G. A., Control charts and stochastic processes (with discussion), J. Roy. Statist. Soc. A 21, 2 (1959), 239—271.
  21. Goldsmith P. L., Whiffield H., Average run lengths in cumulative chart quality control schemes, Technometrics 3, 1 (1961), 11—20.
  22. Chernoff H., Sequential tests for the mean of a normal distribution, Proc. 4-th Berkeley Symp. on math. stat. and probability 1, (1961), 79—91.
  23. Ширяев А. Н., К обнаружению разладок производственного процесса, Теория вероятностей и ее применения 8, 3 (1963), 264—281, 4 (1963), 431—443.
-

## УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ<sup>1)</sup>

- Абсолютная непрерывность 25  
 Аксиомы вероятностей 16  
 Априорные вероятности 265  
 Априорное распределение числа дефектных изделий 382  
**Безотказность** 81  
 Безразличное качество 387  
 Бейесовские критерии 266  
 Больших чисел закон 41  
 Вариационный ряд 59, 297  
 Вероятностная бумага | нормальная 171  
   ~ показательная 242  
 Входное качество 389  
 Выходное качество 389  
 Гипотеза простая 69  
   — сложная 69  
   — основная 226  
   — конкурирующая 226  
 Гистограмма 164  
 Графические оценки параметров 169  
 Группа отказа 136  
 Двукратная выборка 384, 399  
 Дисперсия 35  
 Доверительный интервал 66, 196  
 Доверительный интервал для  $\lambda$ , план |  
    $[N, B, T]$  197  
   ~  $\{N, B, r\}$  199  
   ~  $[N, B, r]$  200  
   ~  $[N, B, T]$  201  
   ~  $[N, B, (r, T)]$  203  
   ~  $[N, B, (r, HS_0)]$  206  
   ~  $[N, B, (r, T)]$  207  
 Доверительные множества 222  
 Доверительный уровень 67  
 Долговечность 82  
 Достаточная статистика 63, 440  
**Изделие** 79  
 Инверсия 281  
 Интенсивность отказов 144  
 Качество 79  
 Квантиль 37  
 Коэффициент готовности 122, 125  
 Коэффициент доверия 67, 196, 215  
 Контроль входной 378  
   — выходной 378  
   — качественный 379  
   — по количественному признаку 379  
   — неразрушительный 380  
   — очистительный 381  
   — предупредительный 381  
   — приемочный 378  
   — разрушительный 380  
   — текущий 378, 460  
 Критерий 226  
   — Вилкоксона 281  
   — для проверки гипотез о значении параметра  $\lambda$ , план  $\{ [N, B, T] \}$  254  
   ~  $[N, B, r]$  255  
   ~  $[N, B, (r, T)]$  256  
   ~  $[N, B, T]$  258  
   ~  $[N, B, r]$  260  
   ~  $\{N, B, (r, T)\}$  260  
   ~  $[N, B, (r, HS_0)]$  261  
   ~ для разнотипных данных 268  
   ~ типа *B* последовательного анализа 266  
   ~ типа *B* последовательного анализа 275  
 Критерий знаков 278  
   — Колмогорова проверки показателности 246  
   — Колмогорова проверки типа распределения 230  
   — нерандомизированный 226  
   — основанный на однородных статистиках 247  
   — отношения правдоподобия 235  
   — равномерно наиболее мощный 237  
   — рандомизированный 227  
   — регулярный 267  
   — Смирнова 284  
   — согласия  $\chi^2$  70, 228, 229  
   — Фишера для большого интервала 250  
   — *F* Фишера 229, 248  
   — Хартли 252

<sup>1)</sup> В указателе терминов ~ (тильда) заменяет группу слов, отделенную вертикальной чертой в предыдущем термине, — (тире) заменяет слово.

- Критерий  $\chi^2$  для проверки показателности 244, 250  
 Критическая область (множество) 68, 226
- Математическое ожидание 33  
 Масштаб резервирования 329  
 Медиана 37  
 Метод доверительных интервалов 66  
 — квантилей 65, 172  
 — моментов 63, 172  
 — наибольшего (максимального) правдоподобия 61, 178  
 Множества 14  
 Множество пустое 15  
 Мода 37  
 Момент  $k$ -го порядка 36, 176  
 ~ начальный 36  
 ~ центральный 36
- Надежность восстанавливаемой системы 143  
 — изделия 80  
 — системы с конечным временем восстановления 149  
 Несмещенная оценка для вероятности безотказной работы 193  
 ~ дисперсии 445  
 ~ случайной величины 439  
 Несмещенные оценки для планов контроля  $\{ (n, c, c') \}$  451  
 ~  $(n, c)_{12}$  454  
 ~  $(n, c)_{23}$  455  
 ~  $(n, c)_{13}$  455  
 Несмещенные оценки для функции от  $D$  439  
 Нормальность хода производства 381
- Однократная выборка 391, 384  
 Опасность отказа 94, 117  
 Оперативная характеристика плана контроля 394, 385  
 Ординарность 55  
 Отсутствие последствия 54  
 Оценка 60  
 — достаточная 63  
 — максимального правдоподобия 62  
 — несмещенная 60  
 — состоятельная 60  
 — эффективная 61  
 — эффективности контроля 446  
 Оценка параметров экспоненциального закона, план  $\{ [N, B, T] \}$  182  
 ~  $[N, B, r]$  184  
 ~  $[N, B, (r, T)]$  185  
 ~  $[N, B, T]$  187
- Оценка параметров экспоненциального закона, план  $\{ [N, B, r] \}$  189  
 ~  $[N, B, (r, T)]$  191  
 ~  $[N, B, (r, HS_0)]$  192  
 Ошибка 1-го рода 68, 232  
 Ошибка 2-го рода 68
- Переключатель 322  
 Пересечение высокого уровня 358  
 — множеств 15  
 План испытаний 158  
 ~ типа  $B$  158  
 ~ типа  $B$  158  
 ~ типа  $[N, B, T]$ ,  $[N, B, r]$  и др. 159, 160  
 ~ типа последовательного анализа 384, 401  
 Плотность распределения 25  
 — восстановления 110  
 Поле событий ( $\sigma$ -алгебра) 16  
 Поток простейший 148  
 Правило приемки  $+1$ -го изделия 451  
 — Фишера 71  
 Предельное выходное качество 405  
 ~ допустимое качество 386  
 Преобразование Лапласа 71  
 ~ нормального закона 77  
 ~ экспоненциального закона 77  
 ~ гамма-распределения 78  
 Переходные вероятности 53  
 Период выжигания 96  
 — нормальной работы 96  
 — приработки 96  
 — старения 96  
 Прислешное качество 386  
 Производящая функция 144  
 Процесс восстановления 55, 109  
 ~ с конечным временем восстановления 122  
 Процесс Маркова 52  
 — неоднородный пуассоновский 56  
 — Пуассона 53  
 — случайный 50  
 Процесс типа гибели 304  
 ~ и размножения 335, 347  
 Пуассоновский поток с переменным параметром 146
- Распределение биномиальное 23  
 — бета 29  
 — Вейбулла 28, 102, 242  
 — гипергеометрическое 23, 239, 393  
 — гамма 27, 104  
 — двойное показательное 29, 104  
 — логарифмически нормальное 29, 104



- Распределение несобственное 26  
 — нормальное 26  
 — нецентральное Стьюдента 38, 218  
 — отрицательное биномиальное 21  
 — показательное (экспоненциальное) 27, 96, 97  
 — Пуассона 26  
 — равномерное 26  
 — смеси 30  
 — степенное (логарифмически показательное) 104  
 — Стьюдента 38  
 — Фишера—Снедекора 38, 229  
 — Эрланга 28  
 —  $\chi^2$  38  
 Резерв нагруженный 288  
 — ненагруженный 288, 306  
 — облегченный 288, 313  
 Решения  $D_1, D_2, D_3$  392, 442  
 Риск поставщика 386  
 — заказчика 386  
 Сбой 82  
 Свертка функций 73  
 Свойство оптимального критерия 270  
 Система 133  
 Случайная величина 33  
 Случайное событие 15  
 Случайные величины независимые 31  
 Событие достоверное 16  
 — противоположное 16  
 События независимые 18  
 — несовместимые 16  
 Соединение последовательное 133  
 — параллельное 135  
 Состоятельность критерия 284  
 Средний объем инспекции 402  
 Стандарт Доджа и Ромига 409  
 — Колумбийский 412  
 — Ташкентский 407  
 — экономических планов 436  
 Статистика Шермана 247  
 Статистическая гипотеза 67  
 Стационарность 54  
 Степени свободы распределения |  $\chi^2$  38  
 ~ Стьюдента 38  
 Стоимостной коэффициент 421  
 Сумма (объединение) множеств 15  
 Суммарная наработка 127, 159  
 Схема Бернулли 20  
 — невозвращенного шара 22  
 Теорема Бейеса 19  
 — Блекуэлла 114  
 — Гливенко 59  
 — Григелиониса 57  
 — запаздывания 73  
 — Ляпунова 42  
 — Муавра — Лапласа 40  
 — Неймана — Пирсона 69, 235  
 — Пуассона 39  
 — Смита (узловая) 114  
 — умножения вероятностей 18  
 — центральная предельная 42  
 Тождество Вальда 57  
 Улучшенная несмещенная оценка 439  
 Ускоренные испытания 162  
 Условия Линдберга 42  
 — Ляпунова 43  
 Условная вероятность 17  
 Уравнение правдоподобия 62  
 Уровень значимости критерия 70  
 Фазовое пространство состояний системы 85  
 Формула Бернулли 20  
 — Макегамы 20  
 — полной вероятности 18  
 Функция восстановления 110, 125  
 — мощности критерия 232  
 — надежности 90  
 — правдоподобия 61  
 — распределения случайной величины 24  
 — риска 264  
 Цепь вложенная 53  
 — Маркова 52  
 — однородная 53  
 — эргодическая 53  
 Экономичные планы контроля | допустимые 421  
 ~ рациональные однократные 423  
 ~ рациональные двукратные 430  
 Элемент 89  
 — стареющий 104  
 Эмпирическая квантиль 166  
 Эмпирические моменты 63  
 ~ центральные 63  
 Эмпирическая функция | распределения 59, 162  
 ~ надежности 91  
 ~ опасности отказов 165

## ОПЕЧАТКИ

Стр	Строка	Напечатано	Следует читать
115	6 сн.	$T_{0z}^{\frac{3}{2}}$	$T_0^{\frac{3}{2}} z$
128	1 сн	$G_{n+1} = ($	$G_{n+1} ($
165	4 св	$t > t_{-N}$	$t > t_N$
264	10 св	$\lambda^{r_1+d_2} (T_2) e^{-\lambda   \dots  }$	$\lambda^{r_1+d_2} (T_2) e^{-\lambda   \dots  }$